

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА О КРЕПЛЕНИИ СТРИНГЕРАМИ ПЛАСТИНЫ, ОСЛАБЛЕННОЙ СИСТЕМОЙ РАЗРЕЗОВ

И. Д. Суздальницкий

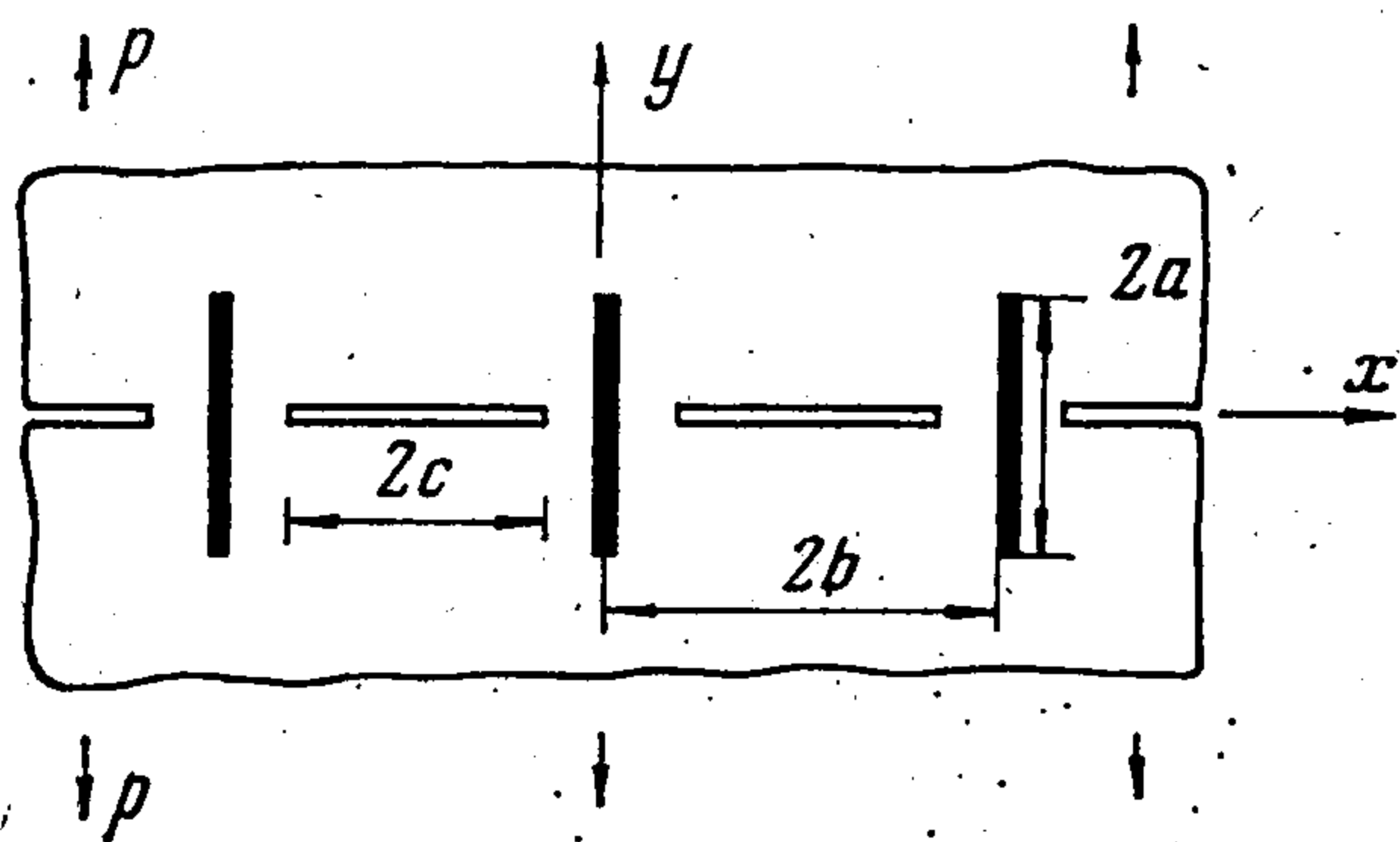
(Новосибирск)

Рассматривается пластина с периодической системой разрезов, ориентированных вдоль некоторой прямой, и усиленной периодической системой ребер жесткости (стрингеров), направленных перпендикулярно этой прямой. К пластине приложено растягивающее усилие, направленное перпендикулярно линии разрезов. Задача приведена к системе сингулярных интегро-дифференциальных уравнений. Результаты вычислений представлены в виде графиков, характеризующих зависимость коэффициентов интенсивности напряжений на концах разрезов и стрингеров от длины разрезов, длины и жесткости стрингеров.

Задача о влиянии стрингера на напряженное состояние пластины с ослаблениями изучалась рядом авторов. В частности, рассматривалось сочетание стрингера и кругового отверстия [1], двух стрингеров, симметрично расположенных около кругового отверстия [2], стрингера и трещины [1,3] и другие. Развитые в этих работах методы в совокупности с методами решения задач математической теории трещин [4] позволяют эффективно изучить периодическую систему разрезов [5], усиленную периодической системой ребер жесткости.

Цель данной статьи — оценка влияния на коэффициенты интенсивности напряжений на концах разрезов, периодически расположенных вдоль прямой, оказываемого стрингерами, ортогональными к этой прямой.

Пусть дана пластина, содержащая периодическую систему разрезов и периодическую систему стрингеров (фиг. 1). Разрезы направлены вдоль



Фиг. 1

прямой $y = 0$, имеют одинаковые длины $2c$ и расположены в интервалах длины $2b$ ($c < b$) так, что их середины $x_k = (2k + 1)b$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) совпадают с центрами интервалов. Непрерывно прикрепленные к пластине стрингеры одинаковой длины $2a$ ($a < b$) проходят через концы интервалов $x_k = 2kb$ и перпендикулярны прямой $y = 0$. Стрингеры изгибу не сопротивляются и работают лишь на растяжение;

E, ν, h — соответственно модуль упругости, коэффициент Пуассона и толщина пластины, E_0, S_0 — модуль упругости и площадь поперечного сечения стрингера.

Для элементов упругих полей приняты обозначения: $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ — компоненты напряжений, u, v — компоненты смещений пластины, $N(y)$ —

нормальное усилие в сечении стрингера, $\varepsilon^{\circ}(y)$ — относительное удлинение его оси.

К пластине приложены растягивающие усилия

$$(1) \quad \sigma_y^{\infty} = p = \text{const}, \quad \sigma_x^{\infty} = \tau_{xy}^{\infty} = 0$$

контуры разрезов свободны от напряжений.

Приведем соотношения [1], определяющие задачу.

Условия равновесия любого бесконечно малого элемента стрингера $L_k = \{x = 2kb, |y| < a\}$, прикрепленного к пластине по всей длине, отсутствия сопротивления стрингера изгибу и непрерывности компонентов смещений и относительного удлинения $\varepsilon_y = dv / \partial y$ при переходе через ось стрингера имеют вид

$$(2) \quad h(\tau_{xy}^+ - \tau_{xy}^-) - N'(y) = 0, \quad \sigma_x^+ - \sigma_x^- = 0$$

$$(3) \quad u^+ + iv^+ = u^- + iv^-, \quad \varepsilon_y^+ = \varepsilon_y^- = \varepsilon^{\circ}$$

Выражения (2) совместно с формулой $N(y) = E_0 S_0 \varepsilon^{\circ} = E_0 S_0 v'^+$ приводят к соотношению

$$(4) \quad h \int_{-a}^y [(\sigma_x + i\tau_{xy})^+ - (\sigma_x + i\tau_{xy})^-] dy - iE_0 S_0 \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^+ = 0$$

Условия отсутствия нормальных и касательных напряжений на берегах разрезов $l_k = \{|(2k+1)b - x| < c, y = 0\}$ имеют вид

$$(5) \quad \sigma_y^+ + i\tau_{xy}^+ = \sigma_y^- + i\tau_{xy}^- = 0$$

Введем функции Колосова — Мусхелишвили $\Phi(z), \Psi(z)$. Согласно [6]

$$(6) \quad \begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}] \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi'(z)] \\ 2\mu(u + iv) &= \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} \\ \Phi(z) &= \varphi'(z), \quad \Psi'(z) = \psi'(z), \quad z = x + iy \\ 2\mu &= E/(1 + \nu), \quad \kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu) \end{aligned}$$

Тогда соотношения (3) — (5) преобразуются к следующей краевой задаче:

$$(7) \quad \begin{aligned} H_1^+(t_1) - H_1^-(t_1) &= 0, \quad t_1 \in L_k \\ (\kappa + 1)[\varphi^+(t_1) - \varphi^-(t_1)] + \lambda_0 \operatorname{Re} H_2^+(t_1) &= 0 \\ H_3^{\pm}(t_2) &= 0, \quad t_2 \in l_k \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} H_1(z) &= \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} \\ H_2(z) &= \kappa\varphi'(z) - \overline{\varphi'(z)} + z\overline{\varphi''(z)} + \overline{\psi'(z)} \\ H_3(z) &= \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} + z\overline{\varphi''(z)} + \overline{\psi'(z)} \\ \lambda_0 &= E_0 S_0 / (2\mu h) \end{aligned}$$

Полагаем

$$(8) \quad \Phi(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\Phi_{1k}(z) + \Phi_{2k}(z)] + \frac{p}{4h}$$

$$\Psi(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{ \Phi_{3k}(z) - [z\Phi_{1k}(z)]' + \Phi_{4k}(z) + \\ + [(z - 4kb)\Phi_{2k}(z)]' \} + \frac{p}{2h}$$

$$\Phi_{jk}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b_{jk}} \frac{f_j(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}, \quad j = 1, 3$$

$$\varphi_{jk}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b_{jk}} \frac{f_j(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}, \quad \Phi_{jk}(z) = \varphi'_{jk}(z), \quad j = 2, 4$$

$$b_{1k} = b_{3k} = \{(2k + 1)b - c, (2k + 1)b + c\}$$

$$b_{2k} = b_{4k} = \{2kb - ia, 2kb + ia\}$$

Принятые представления позволяют удовлетворить условиям (1). Функции $\Phi_{1k}(z)$, $\Phi_{3k}(z)$ терпят разрыв при переходе через линию разреза, $\varphi_{2k}(z)$, $\varphi_{4k}(z)$ — при переходе через линию стрингера. Второе и четвертое соотношения (7) оказываются выполненными, если $f_3(\zeta) = -\overline{f_1(\zeta)}$, $f_4(\zeta) = \kappa f_2(\zeta)$.

Для двух оставшихся функций получаем систему сингулярных интегро-дифференциальных уравнений, которая после отделения действительной и мнимой частей ($f_j = \alpha_j + i\beta_j$, $j = 1, 2$) и использования разложений (см. [7], формулы 1.421.1, 1.421.3) тригонометрических и гиперболических функций в виде суммы простейших дробей принимает вид

$$(9) \quad \beta_2(y) = 0$$

$$\int_{b-c}^{b+c} W_1(\xi, x) \beta_1(\xi) d\xi + \int_{-a}^a W_3(\xi, x) \alpha_2(\xi) d\xi + \frac{\pi p}{h} = 0$$

$$\int_{b-c}^{b+c} W_1(\xi, x) \alpha_1(\xi) d\xi + \int_{-a}^a W_4(\xi, x) \alpha_2(\xi) d\xi = 0$$

$$\pi(\kappa + 1)\alpha_2(y) + \lambda_0 \left\{ \int_{-a}^a W_2(\xi, y) \alpha_2'(\xi) d\xi + \right.$$

$$\left. + \int_{b-c}^{b+c} [W_5(\xi, y) \alpha_1(\xi) + W_6(\xi, y) \beta_1(\xi)] d\xi + (\kappa + 1) \frac{p}{4h} \right\} = 0$$

Здесь

$$W_1 = \omega \operatorname{ctg} \omega(\xi - x - b),$$

$$W_2 = -\omega \left[\kappa - 1 + (\xi - y) \frac{d}{dy} \right] \operatorname{ctg} \omega(\xi - y)$$

$$W_3 = \frac{d}{dx} \left[(\kappa + 1) W_7 + 2\xi \frac{d}{dx} W_8 \right]$$

$$W_4 = \frac{d}{dx} \left[(\kappa + 3) W_8 - 2\xi \frac{d}{dx} W_7 \right]$$

$$W_5 = \frac{\omega}{4} \left[\kappa - 3 + 2y \frac{d}{dy} \right] (\gamma_1^{-1} \operatorname{sh} 2\omega y)$$

$$W_6 = \frac{\omega}{4} \left[\kappa - 1 + 2y \frac{d}{dy} \right] (\gamma_1^{-1} \sin 2\omega \xi)$$

$$W_7 = -\frac{\omega}{4} \gamma_2^{-1} \sin 2\omega x, \quad W_8 = \frac{\omega}{4} \gamma_2^{-1} \operatorname{sh} 2\omega \xi$$

$$\gamma_1 = \sin^2 \omega \xi + \operatorname{sh}^2 \omega y, \quad \gamma_2 = \cos^2 \omega x + \operatorname{sh}^2 \omega \xi, \quad \omega = \frac{\pi}{2b}$$

Второе уравнение системы (9) тождественно выполняется, если положить

$$\alpha_1(\xi) = 0, \quad \beta_1(b - \xi) = -\beta_1(b + \xi), \quad \alpha_2(-\xi) = \alpha_2(\xi)$$

Введем замену

$$x = cx^*, \quad \xi = b + c\tau, \quad x, \xi \in (b - c, b + c)$$

$$y = ay^*, \quad \xi = a\tau, \quad y, \xi \in (-a, a)$$

$$\beta_1(\xi) = \frac{p}{h} g_1(\tau), \quad \alpha_2(\xi) = \frac{p}{h} g_2(\tau)$$

Получим систему уравнений (символ звездочка опущен)

$$(10) \quad \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \{Q_1(\tau, x) g_1(\tau) + Q_2(\tau, x) g_2(\tau)\} d\tau = -1, \quad |x| < 1$$

$$g_2(y) - \frac{\lambda\kappa}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g_2'(\tau) d\tau}{\tau - y} +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \{Q_3(\tau, y) g_2(\tau) + Q_4(\tau, y) g_1(\tau)\} d\tau = -\frac{\lambda_0}{4\pi}, \quad |y| < 1$$

Здесь

$$Q_1(\tau, x) = e \operatorname{ctg} e(\tau - x)$$

$$Q_2(\tau, x) = -\frac{s^2}{4e} \frac{d}{dx} \left[(\kappa + 1) (\sin 2exh(x, \tau)) - \right. \\ \left. - \frac{2s\tau}{e} \frac{d}{dx} (\operatorname{sh} 2s\tau h(x, \tau)) \right]$$

$$Q_3(\tau, y) = -\frac{s^2}{3} (\kappa - 2) + \frac{s^4}{15} (\kappa - 4) (\tau - y)^2 - \\ - \frac{2s^6}{189} (\kappa - 6) (\tau - y)^4 + O(s^8)$$

$$Q_4(\tau, y) = -\frac{e}{2} \left[\kappa - 1 + 2y \frac{d}{dy} \right] (\sin 2e\tau h(\tau, y))$$

$$h(x, y) = (\operatorname{ch}^2 sy - \sin^2 ex)^{-1}$$

$$e = c\omega, \quad s = a\omega, \quad \lambda = \lambda_0 [a(1 + \kappa)]^{-1} = (1 + \nu)^2 S_0 E_0 / (2ahE)$$

Первое уравнение (10) разрешимо относительно $g_1(x)$. Действительно, рассмотрим функции]

$$(11) \quad F_1(z) = \frac{e}{2\pi} \int_{-1}^1 g_1(\tau) \operatorname{ctg} e(\tau - z) d\tau$$

$$F_2(z) = \frac{1}{R(z)} \frac{e}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\gamma(\tau) R^+(\tau) \cos e\tau}{\sin e\tau - \sin ez} d\tau + \frac{1}{2} \left[\frac{\sin ez}{R(z)} - 1 \right]$$

$$(R(z) = (\sin^2 ez - \sin^2 e)^{1/2}, \quad R^+(\tau) = (\sin^2 e - \sin^2 e\tau)^{1/2})$$

Используя формулы Сохоцкого, можно убедиться, что на разрезах в силу (10)

$$F_1^+(x) + F_1^-(x) = F_2^+(x) + F_2^-(x), \quad x \in l_k$$

вследствие чего (см. [6], § 108) $F_1(z) \equiv F_2(z)$. Тогда

$$F_1^+(x) - F_1^-(x) = F_2^+(x) - F_2^-(x), \quad x \in l_k$$

или

$$(12) \quad g_1(x) = -[R^+(x)]^{-1} \left(\sin ex + \frac{e}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\gamma(\tau) R^+(\tau) \cos e\tau}{\sin e\tau - \sin ex} d\tau \right)$$

$$\left(\int_{-1}^1 g_1(x) dx = 0 \right)$$

$$\gamma(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 Q_2(\tau, x) g_2(\tau) d\tau$$

Нечетность функции $g_1(x)$ обеспечивает выполнение условия однозначности смещений при обходе вокруг разреза, приведенного выше в скобках.

Подставляя (12) во второе уравнение (10), получим сингулярное интегро-дифференциальное уравнение

$$(13) \quad g_2(y) - \frac{\lambda\kappa}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g_2'(\tau) d\tau}{\tau - y} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 G(\tau, y) g_2(\tau) d\tau = p_0(y)$$

$$(14) \quad G(\tau, y) = -\lambda Q_3(\tau, y) - \frac{e}{\pi^2} \int_{-1}^1 R^+(\xi) \cos e\xi Q_2(\xi, \tau) d\xi \times$$

$$\times \int_{-1}^1 \frac{Q_4(\eta, y) d\eta}{R^+(\eta) (\sin e\eta - \sin e\xi)}$$

$$p_0(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 [R^+(\eta)]^{-1} Q_4(\eta, y) \sin e\eta d\eta - \frac{\lambda_0}{4\pi}$$

Коэффициент интенсивности напряжений, характеризующий особенность компоненты поля напряжений σ_y на конце $z = b + c$ разреза l_0 , определяется выражением

$$K = \lim_{z \rightarrow b+c} 2 \sqrt{2|z - (b+c)|} \Phi(z)$$

которое, в силу (8), (11), (12), приводится к виду

$$(15) \quad K = K_0 \left(1 - e\pi^{-2} \sin^{-1} e \int_{-1}^1 g_2(\tau) d\tau \int_{-1}^1 \frac{R^+(\xi) Q_2(\xi, \tau) \cos e\xi}{\sin e\xi - \sin e} d\xi \right)$$

$$K_0 = p (1/2ce^{-1} \operatorname{tg} e)^{1/2}$$

где K_0 — значение этого коэффициента в случае отсутствия стрингеров, найденное на основании результатов статьи [5].

Оценим также влияние разрезов на интенсивность напряжений на концах стрингеров. Имеем

$$\tau_{xy} = \operatorname{Im} [\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)] =$$

$$= \operatorname{Im} [\varphi_{20}'(z) + \varphi_{40}'(z) + (z + \bar{z})\varphi_{20}''(z) + R_1(z)]$$

где $R_1(z)$ — непрерывная на L_0 функция. Согласно (8) и формулам Со-

хоцкого, на L_0

$$\tau_{xy}^+(y) - \tau_{xy}^-(y) = -(1 + \kappa)\alpha_2'(y)$$

Известно [1], что касательные усилия τ_{xy}^\pm обладают на конце стрингера, лежащем в конечной части плоскости, сингулярностью порядка $1/2$, вследствие чего

$$\tau_{xy}^\pm(y) = \mp^{1/2} (1 + \kappa)(a^2 - y^2)^{-1/2} h_1(y) + h_2(y)$$

где h_1, h_2 — непрерывные на L_0 функции.

Заметим, что $\alpha_2(\pm a) = 0$, откуда следует равенство $g_2(1) = g_2(-1) = 0$, необходимое при решении уравнения (13).

Действительно, согласно (8), $\alpha_2(y)$ — плотность представлений в виде интеграла типа Коши потенциальных функций $\varphi_{jk}(z)$ ($j = 2, 4$), производные которых на концах L_k должны иметь сингулярности одного порядка с τ_{xy} , т. е. $1/2$. Но это влечет ограниченность $\varphi_{jk}(z)$ в точках $z = \pm ia + 2kb$. Тогда обращение в нуль $\alpha_2(y)$ при $y = \pm a$ вытекает из утверждений (см. [8], § 22).

Коэффициент интенсивности напряжений на конце стрингера

$$(16) \quad K_{st} = \lim_{y \rightarrow a} \sqrt{a - y} \tau_{xy}^+(y) = -\frac{1}{2}(\kappa + 1) \lim_{y \rightarrow a} \sqrt{a - y} \alpha_2'(y) = \\ = \frac{p\sqrt{a}}{2h} (\kappa + 1) \lim_{y \rightarrow 1} \frac{g_2(y)}{\sqrt{1 - y^2}}$$

Интегралы в (14), (15) могут быть вычислены в виде сходящихся рядов по степеням $r = \sin e$. Это следует из возможности разложения функции $h(x, y)$, входящей в выражения ядер Q_2, Q_4 , в сходящийся ряд по степеням $\sin^2 ex / \operatorname{ch}^2 sy$ и замены $\sin ex = r \cos \theta$, приводящих рассматриваемые интегралы к табличным. Следуя далее вычислительной схеме (см. [1], § 11), получим для (13) систему алгебраических уравнений.

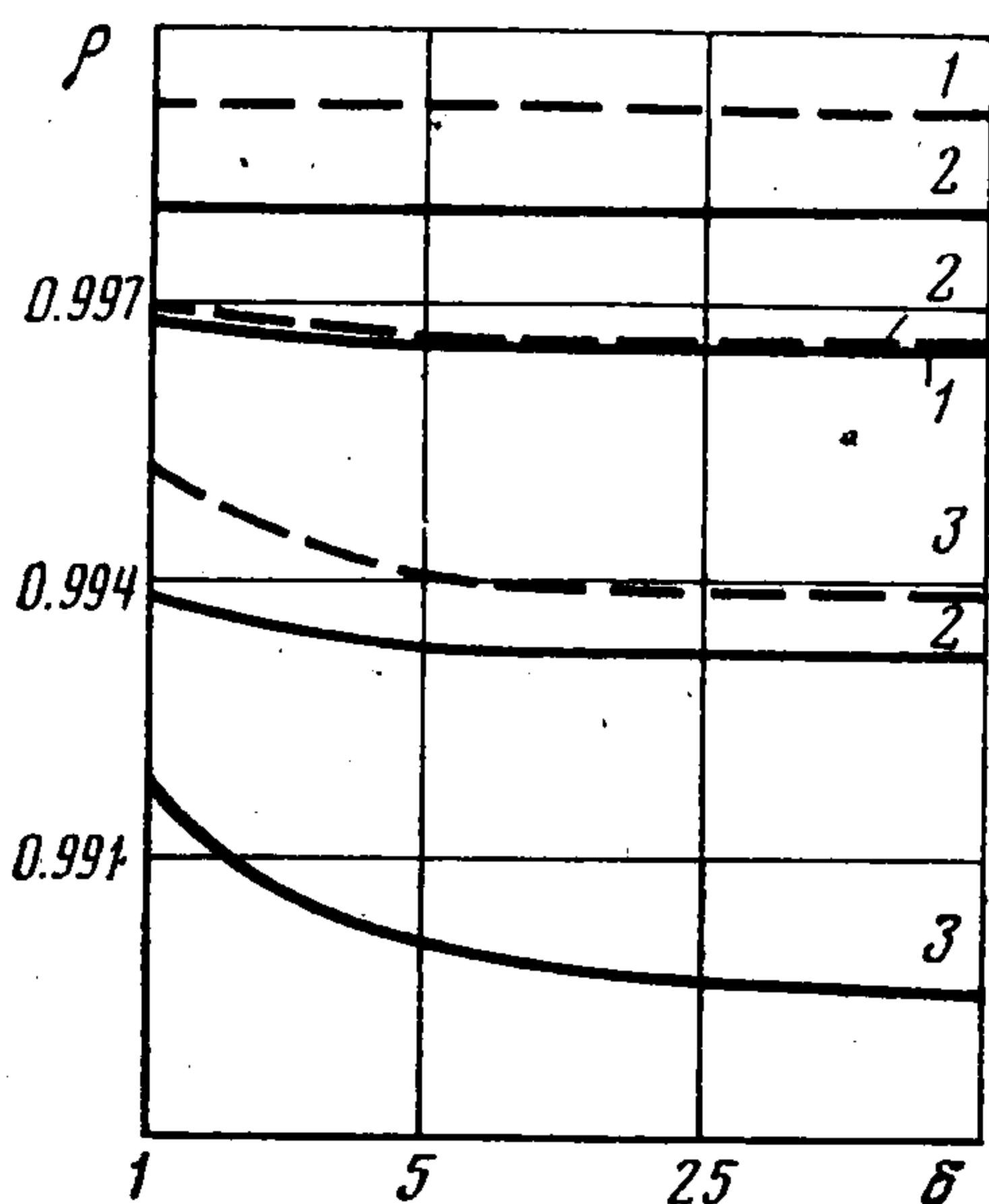
На фиг. 2 даны графики коэффициента $\rho = K / K_0$ при $\nu = 0.3$ для значений c / b , равных 0.7 (штриховые линии) и 0.9 (сплошные линии), в зависимости от параметра $\delta = 2E_0 S_0 / (Eah)$. Величина a / b принимает значения 0.4, 0.6, 0.8 (соответственно кривые 1—3). Влияние стрингера становится существенным, когда он расположен достаточно близко от конца разреза. При $c / b < 0.7$ снижение интенсивности напряжений благодаря присутствию стрингеров не превышает 1%.

Аналогичный эффект снятия напряжений на концах разрезов, расположенных вдоль прямой, наблюдается и при замене стрингеров ослаблениями в виде поперечных разрезов, ориентированных по направлению растяжения. Для сравнения приведем значения коэффициентов интенсивности напряжений в случаях системы разрезов и стрингеров и продольно-поперечной системы разрезов [4] (сравниваемые величины обозначены соответственно через ρ_{st} и ρ_{sl} , при этом $c / b = 0.7$, параметр жесткости стрингеров $\delta = 25$)

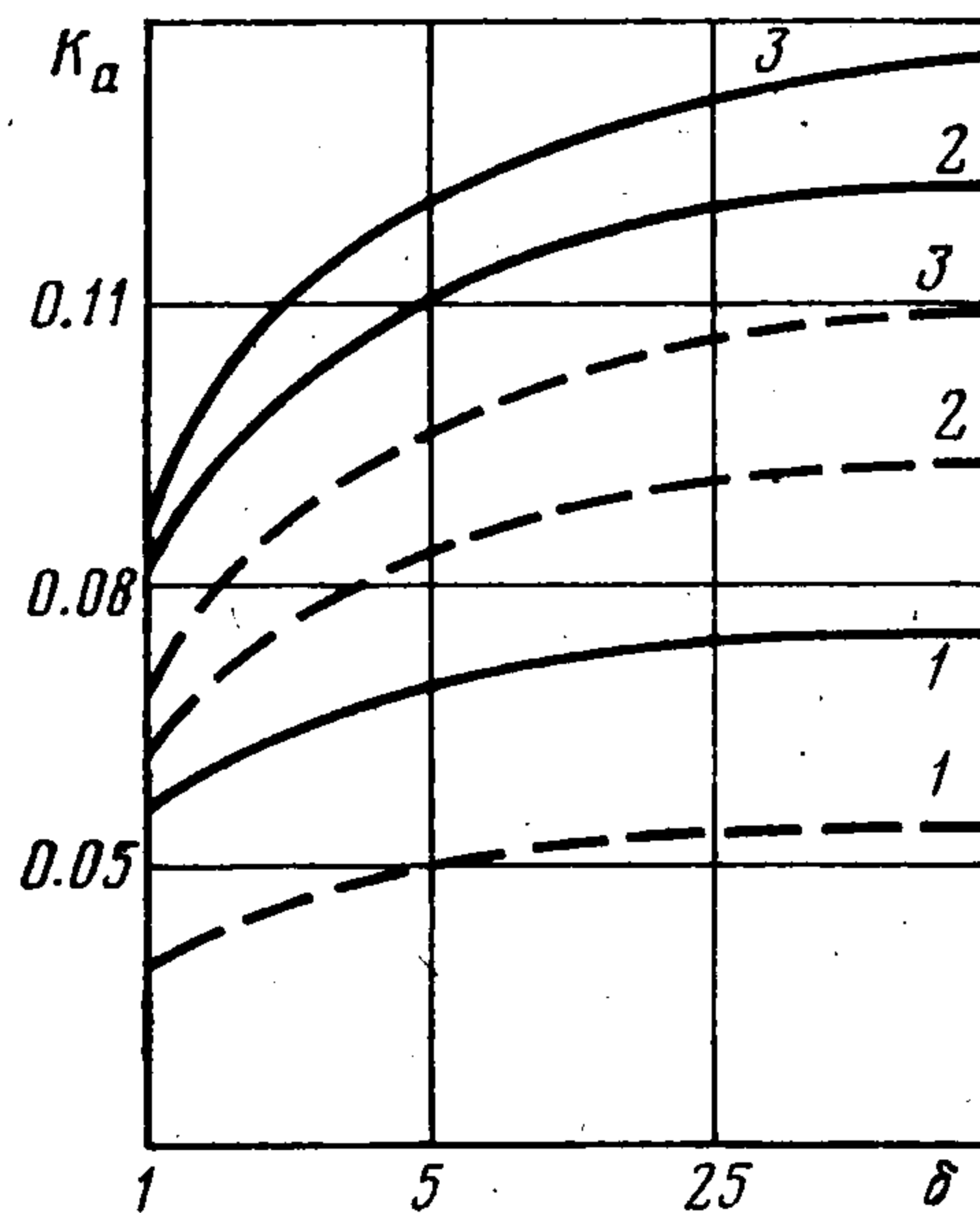
a/b	0.2	0.4	0.6	0.8
ρ_{st}	0.9996	0.9992	0.9967	0.9941
ρ_{sl}	0.9861	0.945	0.875	0.778

Однако нужно заметить, что при появлении растяжения вдоль оси x (фиг. 1) поперечные разрезы не только сами являются концентраторами напряжений, но и приводят к дополнительному росту напряжений на продольных разрезах.

Поведение коэффициента интенсивности напряжений на конце стрингера, вычисляемого согласно формуле (16), иллюстрирует фиг. 3 (соответ-



Фиг. 2



Фиг. 3

ствие параметров и линий здесь то же, что и на фиг. 2). При этом $K_a = K_{s1}h [\rho (1 + \kappa)]^{-1}$. Обратное влияние трещины на коэффициент интенсивности напряжений на конце стрингера оказывается существенным.

Увеличение жесткости стрингеров до значений, превышающих $\delta = 25$, заметного влияния на величину коэффициентов интенсивности как на конце разреза, так и на конце стрингера не оказывает.

Автор благодарен Л. М. Куршину за обсуждение результатов работы.

Поступила 23 X 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Каландия А. И. Математические методы двумерной упругости. М., «Наука», 1973.
2. Жоржолуани Г. Т., Каландия А. И. Влияние стрингера на распределение напряжений около отверстия. ПММ, 1974, т. 38, вып. 1.
3. Greif R., Sanders J. L., Jr. The effect of a stringer on the stress in a cracked sheet. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1965, 32, No. 1. (Рус. перев.: Прикл. механ. Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Сер. Е, 1965, № 1.)
4. Куршин Л. М., Суздальницкий И. Д. Напряженное состояние упругой плоскости, ослабленной бесконечным рядом продольно-поперечных трещин. ПМТФ, 1975 № 5.
5. Koiter W. T. An infinite row of collinear cracks in an infinite elastic sheet. Ingr-Arch., 1958, Bd 28, S. 168—172.
6. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
7. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963.
8. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., «Наука», 1968.