Прикладная математика и механика. Том 43, 1979

УДК 539.3 : 534.1

АВТОМОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА ОБ УДАРНОМ НАГРУЖЕНИИ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

А. А. Буренин, В. В. Лапыгин

(Воронеж)

Рассматривается автомодельная динамическая задача нелинейной теории упругости о косом ударе по полупространству. В зависимости от граничных условий на основании термодинамических ограничений на существование ударных волн в упругой среде строится единственно возможная комбинация волновых фронтов, посредством которых возмущение распространяется в среду. Обсуждаются особенности и приводятся результаты численного решения задачи.

Плоские автомодельные задачи нелинейной динамической теории упругости рассматривались ранее [1–3]. Было дано [1] обсуждение качественных особенностей задач рассматриваемого класса и для выбора единственно возможной волновой картины предложено воспользоваться законами термодинамики, рассмотрены [2] задачи об отражении плоских ударных волн от плоских преград, построено [3] аналитическое решение рассматриваемой задачи в случае малых граничных возмущений для неогуковской модели упругой среды.

Ниже задача об ударном нагружении полупространства, когда граничные условия заданы в скоростях, решается в рамках квадратичной теории упругости.

1. Система уравнений динамического деформирования упругой среды в прямоугольной декартовой системе координат имеет вид [4]

$$\sigma_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0}\frac{\partial W}{\partial e_{ik}}(\delta_{kj} - 2e_{kj}), \quad \sigma_{ij,\,j} = \rho\frac{\partial v_i}{\partial t} \tag{1.1}$$

$$v_i = \partial u_i/\partial t + v_j u_{i,\,j}, \quad 2e_{ij} = u_{i,\,j} + u_{j,\,i} - u_{k,\,i}u_{k,\,j}$$

$$I_1 = e_{jj}, \quad I_2 = e_{ij}e_{ji}, \quad I_3 = e_{ij}e_{jk}e_{ki}$$

$$\rho/\rho_0 = (1 - 2I_1 + 2I_1^2 - 2I_2 - {}^4/_3 I_1^3 + 4I_1I_2 - {}^8/_3 I_3)^{1/2}$$

Здесь σ_{ij}, e_{ij}, v_i, u_i — компоненты тензоров напряжений, конечных деформаций Альманси, векторов скорости и перемещения соответственно, ρ и ρ_0 — плотность в текущем и свободном состояниях.

Для замыкания системы уравнений (1.1) в дальнейшем будет использоваться следующая зависимость упругого потенциала W от инвариантов тензора деформаций Альманси:

$$W = {}^1/_2\lambda I_1^2 + \mu I_2 + lI_1I_2 + mI_1^3 + nI_3 \tag{1.2}$$

Пусть, начиная с момента времени $t = 0$, граница полупространства $x_1 > 0$, упругие свойства которого определены соотношением (1.2), нагружается таким образом, что каждая материальная точка границы начинает движение с постоянной скоростью, компоненты которой v_{10}, v_{20},

$v_{30} = 0$. Ограничиваясь лишь квадратичными членами по компонентам тензора $u_{i,j}$, систему уравнений (1.1), (1.2) в данном случае можно привести к виду

$$(\lambda + 2\mu)u_{1,11} + 2\alpha u_{1,1} u_{1,11} + 2\gamma u_{2,1}u_{2,11} = \rho_0 (1 - u_{1,1})dv_1 / dt \tag{1.3}$$

$$\mu u_{2,11} + (2\gamma - \mu)(u_{2,1}u_{1,11} + u_{1,1}u_{2,11}) = \rho_0 (1 - u_{1,1})dv_2 / dt$$

$$\alpha = 3 (l + m + n) - {}^7/_2 (\lambda + 2\mu), \quad \gamma = {}^1/_2 l + {}^3/_4 n - {}^1/_2 \lambda - \mu$$

Введя автомодельную переменную, перепишем (1.3) в безразмерной форме

$$AT'' + a_2\Theta'\Theta'' = 0, \quad (a_3 - \xi^2)\Theta'T'' + B\Theta'' = 0 \tag{1.4}$$

$$\xi = x_1 / (G_0 t), \quad u_1 = G_0 t T (\xi), \quad u_2 = G_0 t \Theta (\xi), \quad G_0 = [(\lambda + 2\mu) / \rho_0]^{1/2}$$

$$a_1 = 2\alpha / (\lambda + 2\mu), \quad a_2 = 2\gamma / (\lambda + 2\mu), \quad a_3 = (2\gamma - \mu) / (\lambda + 2\mu)$$

$$A = 1 - \xi^2 + (a_1 - 2)T' - 2\xi T, \quad \varkappa = \mu / (\lambda + 2\mu)$$

$$B = \varkappa - \xi^2 + (a_3 - 2\varkappa)T' - \xi T' + 2\xi T$$

Соотношения (1.4), где штрих означает дифференцирование по ξ, представляют собой однородную систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

Рассмотрим одномерную задачу, т. е. положим $v_{20} = 0$. Тогда из (1.4) получаем, что нетривиальное решение возможно лишь в случае $A = 0$. Последнее уравнение линейное и его решение имеет вид

$$T (\xi) = \exp (\xi^2 a) F (\xi), \quad F (\xi) = \int_1^\xi (\eta^2 - 1)\, a \exp (-\eta^2 a)\, d\eta \tag{1.5}$$

$$v_1 = G_0 \frac{\exp (\xi^2 a) F (\xi) (1 - 2\xi^2 a) - \xi a (\xi^2 - 1)}{1 - a (\xi^2 - 1) - \exp (\xi^2 a)\, 2\xi a F (\xi)}, \quad a = (a_1 - 2)^{-1}$$

В (1.5) учитывается, что передний фронт возмущения занимает положение $\xi = 1$ (непосредственно вытекает из уравнения $A = 0$). Нетривиальное решение должно быть справедливо на некотором отрезке $\xi_0 \leqslant \xi \leqslant 1$, где $\xi_0 \leqslant v_{10} / G_0$ и $v_1 (\xi_0) = v_{10}$. Подставляя последние соотношения в (1.5), получаем, что если $a_1 < 2$, то нетривиальное решение возможно лишь в случае $v_{10} < 0$. Для реальных материалов [5] $a_1 \leqslant -3.5$, т. е. приходим к тем же результатам, что и в случае совершенного газа. Центрированная волна Римана возникает лишь тогда, когда воздействие приводит к расширению среды ($v_{10} < 0$). Возмущение, приводящее к сжатию ($v_{10} > 0$), распространяется в среду как ударная волна. В этом случае всюду $T'' = 0$, кроме единственного значения $\xi = \xi^* = G / G_0$, где G — скорость ударной волны, которая вычисляется из уравнения $A = 0$ при $T = 0$. Заметим, что ξ^* меняется в зависимости от интенсивности ударной волны, однако всегда $\xi^* > 1$, т. е. $G > G_0$.

Если $v_{20} \neq 0$, то нетривиальные решения возможны, когда определитель системы (1.4) равен нулю.

$$AB - a_2 (a_3 - \xi^2)\Theta'^2 = 0 \tag{1.6}$$

В областях, где (1.6) не выполнено, (1.4) имеет тривиальное решение $T' = \text{const}$, $\Theta' = \text{const}$. В областях, где (1.6) выполнено, решение определяется центрированной волной Римана, передний и задний фронт которой являются слабыми волнами. Кроме центрированных волн, возмущение может распространяться в среду в виде ударных волн. С целью определения конкретной волновой картины воспользуемся равенством количества граничных условий числу постоянных интегрирования системы уравнений (1.4).

Пусть в результате динамического воздействия в среде распространяются n ударных волн и k центрированных волн ($2k$ слабых волн). В зоне тривиального решения (1.4) необходимо определить четыре постоянные интегрирования, в зоне нетривиального решения — три, неизвестными являются и скорости (положение) ударных и слабых волн. В данном случае имеется $n + k$ зон, где решение (1.4) тривиальное, и k зон, где нетривиальное, поэтому общее количество постоянных интегрирования равно $4(n + k) + 3k + 2k + n$. На каждой поверхности разрывов можно поставить четыре граничных условия. В случае ударной волны это будут $[u_i] = 0$ (непрерывность перемещений) и $[\sigma_{ij}]\nu_j = \rho^+ (v_n^+ - G)[v_i]$ (сохранение импульса), в случае слабой волны — $[v_i] = 0$ и соответствующее динамическое условие совместности разрывов первого порядка [6]. Таким образом, равенство числа граничных условий количеству постоянных интегрирования выражается соотношением $5n + 9k = 4(n + 2k) + 2$, откуда $n + k = 2$.

В результате косого удара по упругому полупространству в нем возникают либо две ударные волны, либо две центрированные волны Римана, либо одна ударная, другая центрированная (четыре случая). Выбор в каждом конкретном случае одной волновой картины из четырех возможных, в зависимости от вида граничных условий и системы уравнений (1.4), как, например, в одномерной задаче, не представляется возможным из-за их сложности. Другой путь состоит в изучении свойств ударных волн в упругой среде при плоской конечной деформации.

2. Ударную волну, распространявшуюся в упругой среде, движение которой определено равенствами (1.1), (1.2), будем интерпретировать некоторой поверхностью, на которой перемещения непрерывны, компоненты тензоров градиента перемещений, деформаций, напряжений, вектора скорости и плотность терпят разрыв первого рода. Если ось x_1 подвижной системы координат x_1, x_2, связанной с поверхностью разрывов, нормальна к ней, то компоненты вектора скорости вычисляются согласно формулам

$$v_i = \delta u_i / \delta t + (v_1 - G)u_{i,1} + v_2 u_{i,2}, \quad i = 1, 2 \tag{2.1}$$

Применив к (2.1) операцию разрывов и разрешив полученное соотношение относительно $[v_1]$ и $[v_2]$, найдем

$$[v_1] = v_1^+ - v_1^- = (v_1^- - G)\omega^{-1} (p_2\tau_1 + u_{1,2}\tau_2), \quad [v_2] = (v_1^- - G)\omega^{-1} (p_1\tau_2 + u_{2,1}\tau_1) \tag{2.2}$$

$$p_1 = 1 - u_{1,1}, \quad p_2 = 1 - u_{2,2}, \quad [u_{i,j}] = \tau_i \delta_{j1} [\delta \dot{u}_i / \delta t] = 0$$
$$\omega = p_1 p_2 - u_{1,2} u_{2,1}$$

В (2.2) индексами плюс и минус обозначены величины, вычисленные перед ударной волной и сразу за ней соответственно. Индексы плюс у компонент тензора $u_{i,j}$ опущены, так как всюду в дальнейшем будут встречаться компоненты этого тензора, вычисленные перед поверхностью разрывов. Подстановка (2.2), (1.1) и (1.2), записанных в разрывах, в динамические условия совместности разрывов приводит к системе двух уравнений относительно трех неизвестных τ_1, τ_2, V

$$(V - s_1)\tau_1 + R_1\tau_2 + (\gamma - \mu)\tau_2^2 = 0 \tag{2.3}$$
$$(V - s_2)\tau_2 + R_2\tau_1 = 0$$
$$V = \rho^- (v_1^- - G)^2, \quad s_1 = p_1(\lambda + 2\mu) + 2\alpha u_{1,1} + \beta u_{2,2} - \alpha\tau_1$$
$$s_2 = p_2\mu + 2\gamma(u_{1,1} + u_{2,2}) - 2\gamma\tau_1, \quad \beta = 6m + 2l - 4\lambda - 2\mu$$
$$R_1 = b_1 V - k_1, \quad R_2 = b_2 V - k_2, \quad k_1 = (2\gamma + \lambda)u_{1,2} + 2(\gamma - \mu)u_{2,1}$$
$$k_2 = (2\gamma - \mu)u_{1,2} + 2\gamma u_{2,1}, \quad b_1 = u_{1,2}, \quad b_2 = u_{2,1}$$

Деформированное состояние перед поверхностью разрывов считается в (2.3) заданным, параметр V характеризует скорость распространения ударной волны. Считая τ_1 известным, приходим, согласно (2.3), к кубическому уравнению относительно V

$$(V - s_1)(V - s_2)^2 + R_1R_2(V - s_2) + (\gamma - \mu)R_2^2\tau_1 = 0 \tag{2.4}$$

Решение (2.4) наиболее простое в случае, когда $u_{1,2} = u_{2,1} = 0$, $V_1 = s_1$, $V_2 = V_3 = s_2$. Подстановка первого корня в (2.3) приводит к тому, что $\tau_2 = 0$, т. е. ударная волна продольная. Так как $s_1 > s_2$, то в случае, когда среда недеформирована или подвержена гидростатическому сжатию, передний фронт возмущения, распространяющегося в среду, если он ударный, может быть только продольной ударной волной. Скорость продольной ударной волны при уменьшении влияния нелинейностей стремится к значению G_0 для скорости безвихревой ударной волны в линейной теории упругости. Значение совпавших корней соответствует ударной волне, на которой $\tau_2 \neq 0$ и $\tau_1 \neq 0$. При уменьшении влияния нелинейностей скорость этой волны стремится к значению $\{\mu / \rho_0\}^{1/2}$ для скорости эквиволюминальной ударной волны в линейной теории упругости. В дальнейшем эту ударную волну будем называть квазипоперечной. Если величина $u_{1,2}$ или $u_{2,1}$ отлична от нуля, то первая ударная волна также не является строго продольной, т. е. на ней $\tau_2 \neq 0$. В этом случае она будет называться квазипродольной.

Когда перед поверхностью разрывов присутствуют сдвиговые деформации, скорости квазипродольных и квазипоперечных волн выражаются соответственно равенствами

$$V_1 = s_1 + R_{11}R_{21} / (s_1 - s_2) + [(\gamma - \mu)R_{21} / (s_1 - s_2)]^2 \tag{2.5}$$
$$V_{2,3} = s_2 \pm \{R_{1,2}R_{2,2} - (\gamma - \mu)R_{22}^2 / (s_1 - s_2)\}^{1/2}$$
$$(R_{ij} = b_i s_j - k_j, \quad i, j = 1, 2)$$

При подстановке второго соотношения из (2.5) в (2.3) получим, что квазипоперечные ударные волны возможны лишь при условии

$$(s_1 - s_2)\tau_1 / (\gamma - \mu) \geqslant 0 \tag{2.6}$$

Для реальных материалов $\gamma < 0$, следовательно, $\tau_1 \leqslant 0$, т. е. квазипоперечная ударная волна является в то же время волной расширения. Компоненты тензора градиента перемещений $u_{i,j}$ считаются малыми (квадратичная теория упругости), поэтому следует считать, что τ_1 на квазипоперечной ударной волне имеет второй порядок малости по сравнению с τ_2.

Опуская громоздкие преобразования, связанные с вычислением разрывов согласно равенствам (1.1), (1.2) и (2.2), для термодинамического условия совместности разрывов [7]

$$-{}^1/_2 c\, [v_j][v_j] + \sigma_{j1}\, [v_j] - [W]c / \rho_0 \geqslant 0, \quad c = V / (v_1^- - G) \tag{2.7}$$

приведем окончательный результат в случае квазипродольной волны, когда параметр V определен первым равенством из (2.5)

$$(l + m + n - {}^3/_2\lambda - 3\mu)\tau_1^3 \leqslant 0 \tag{2.8}$$

Заметим, что деформированное состояние перед поверхностью разрывов не влияет на величину разрыва энтропии на квазипродольной ударной волне. Если l, m, n отрицательны [5] или порядок их меньше порядка λ и μ, то из (2.8) получаем аналог теоремы Цемплена для идеального газа, т. е. в упругой среде возможны только квазипродольные ударные волны малой интенсивности, приводящие к сжатию среды. Если граничные условия таковы, что приводят к расширению, то ударная волна, являющаяся решением соответствующей линейной задачи, должна быть заменена в нелинейном случае центрированной волной расширения Римана. К этому же результату приходим, если принять за основу одномерный случай, рассмотренный ранее, где без использования термодинамических ограничений получено решение, полностью с ними согласующееся.

В случае квазипоперечной ударной волны, когда V определяется вторым равенством из (2.5), неравенство (2.7) с точностью до кубов $u_{i,j}$ обращается в тождество, следовательно, в (1.2) необходимо учитывать члены четвертого порядка по $u_{i,j}$. Если в (1.2) ограничиться лишь выписанными членами, то из (2.7) следует, что квазипоперечные ударные волны малой интенсивности в упругой среде невозможны. Численные расчеты показывают, что сдвиговая центрированная волна, являющаяся нетривиальным решением системы (1.4), приводит, как и ударная квазипоперечная волна (2.6), к расширению среды. Согласно принципу наименьшего производства энтропии, квазипоперечные ударные волны термодинамически нереальны. Этим, в частности, объясняются экспериментальные данные о невозможности регистрирования поперечных ударных волн на значительных расстояниях от источника.

3. Пусть $v_{10} \geqslant 0$, т. е. граничные условия задачи приводят к сжатию среды. На основании изложенного заключаем, что возмущение распространяется в среду в виде продольной ($\tau = 0$, так как $u_{1,2} = u_{2,1} = 0$ перед поверхностью разрывов), ударной и сдвиговой центрированной волны. Обозначим через $\xi^* = G / G_0 = 1 + \delta$ положение (фиг. 1) ударной волны, через ξ_0 и ξ_1 — передний и задний фронт центрированной волны, тогда в зоне между ξ^* и ξ_0 $\Theta = 0$, $T' = \text{const}$; следовательно, постоянными и отличными от нуля будут лишь σ_{11}, e_{11}, v_1. Используя динамические и

кинематические условия совместности разрывов на продольной ударной волне

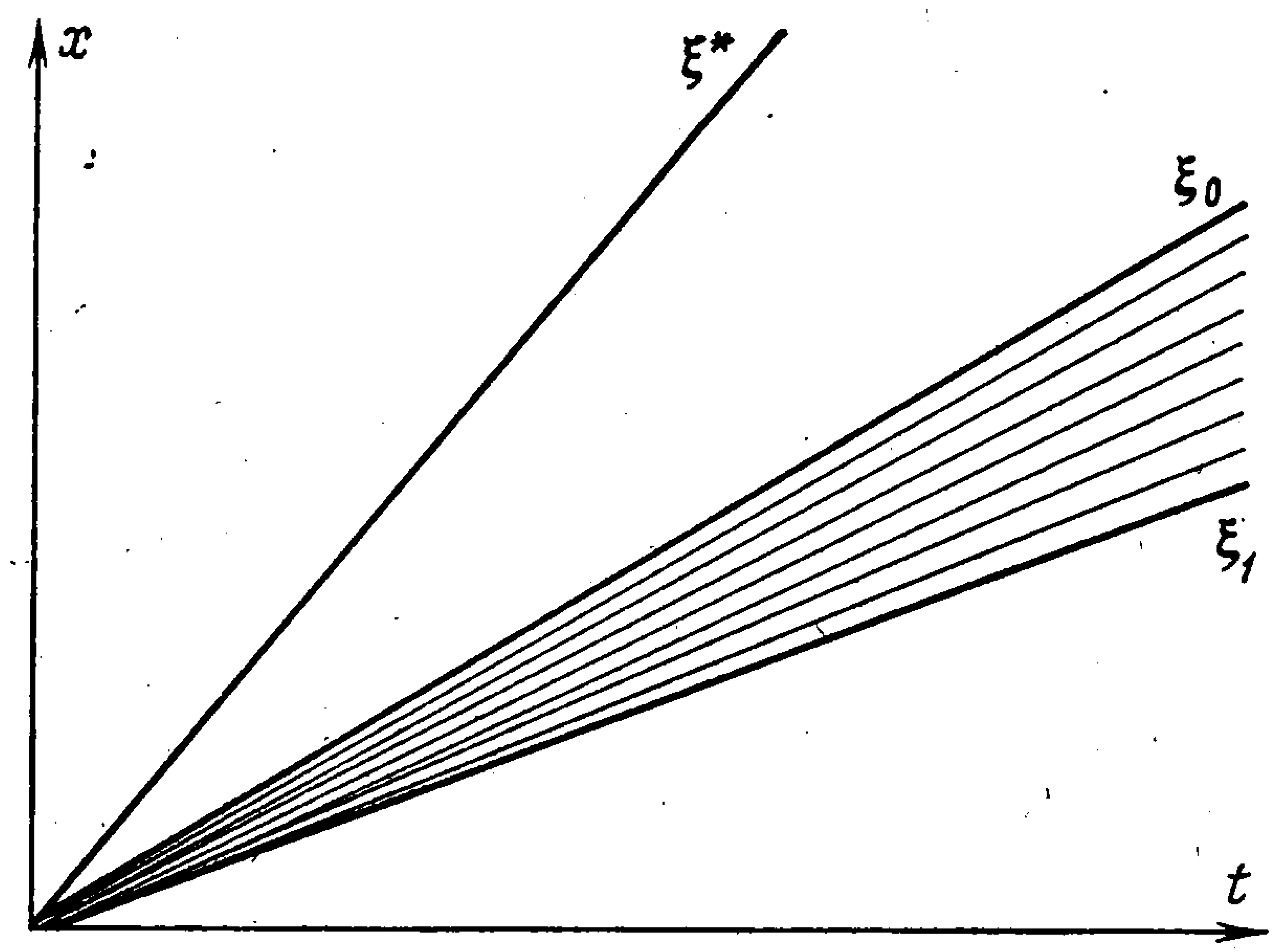
$$[\sigma_{11}] = -\rho_0 G [v_1], \quad [\partial u_1 / \partial t] = -G\tau_1$$

и соотношения (1.1), (1.2), (2.2), найдем

$$v_1 = -GT_0' / (1 - T_0'), \quad \sigma_{11} = (\lambda + 2\mu + \alpha T_0')T_0' \tag{3.1}$$

$$(1 + a_1 T_0')(1 - T_0') = (1 + \delta)^2$$

Согласно (3.1), в зоне между ξ^* и ξ_0 все параметры, определяющие деформированное и напряженное состояния, могут быть выражены через



Фиг. 1

один параметр, например δ. В зоне между ξ_0 и ξ_1 решение задачи находится из следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений, являющихся следствием (1.4) и (1.6):

$$\Theta' = \left\{\frac{AB}{a_2 f}\right\}^{1/2} \tag{3.2}$$

$$T'' = 2\,\frac{AB\xi - Bf(\xi + T - \xi T') - Af(\xi - T)}{2Af^2 - Bf(a_1 - 2) - Af(f - 2\varkappa)}, \quad f = a_3 - \xi^2$$

При численном решении задачи необходимо учитывать, что $\Theta''(\xi_0) = \infty$, а на переднем фронте центрированной волны расширения $T'' = \infty$. Граничными условиями для уравнений (3.2) будут соотношения

$$\Theta(\xi_0) = 0, \quad T'(\xi_0) = T_0', \quad T(\xi_0) = T_0'(\xi_0 - \xi^*) + T(\xi^*), \quad T(\xi^*) = 0$$

$$R = v_{10}p, \quad p = 1 - T'(\xi_1), \quad R = T(\xi_1) - \xi_1 T'(\xi_1),$$

$$\Theta(\xi_1) - \xi_1\Theta'(\xi_1) + Rp^{-1}\Theta'(\xi_1) = v_{20}$$

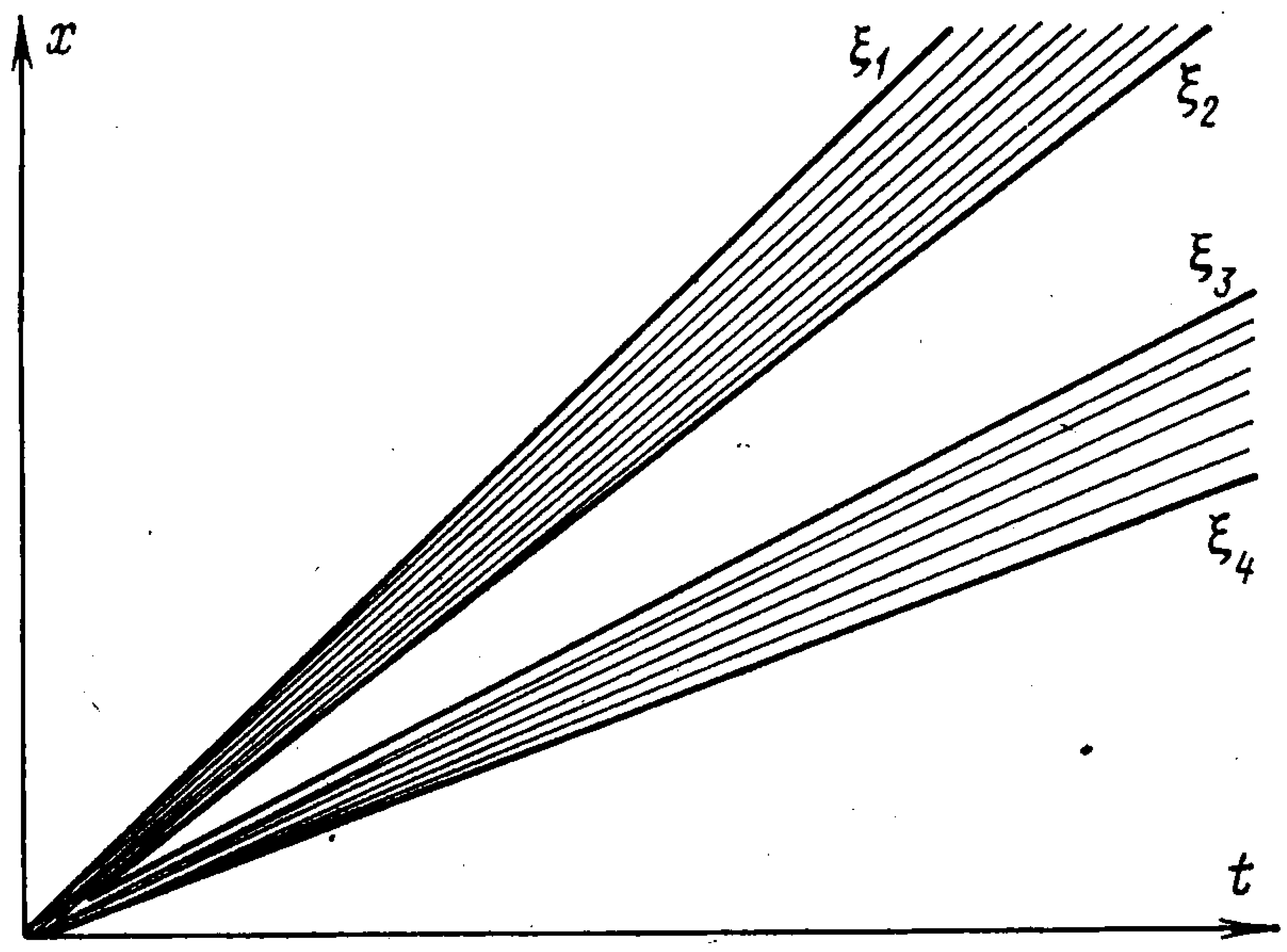
Величина ξ_0 выражается через δ из уравнения $B(\xi_0) = 0$. Таким образом, в зоне между ξ_0 и ξ_1 необходимо решить краевую задачу для системы уравнений (3.2) с граничными условиями (3.3). То обстоятельство, что граничных условий (3.3) не три, согласно порядку системы уравнений (3.2), а пять, объясняется тем, что ξ_1 и δ остаются в (3.3) неизвестными и требуют своего определения в процессе решения задачи.

Задача решалась численно. Численная реализация подтвердила правильность выбора конфигурации волновых фронтов.

Некоторые результаты решения задачи о чистом сдвиге, когда на границе полупространства $v_{20} \neq 0$, а $\sigma_{11} = 0$, приведены в выводах

$\frac{v_{20}}{G} \cdot 10^5$	152	401	569	681	1190	1631	2249
$(\eta_0 - 1) \cdot 10^5$	1	7	14	21	63	115	662
$(1 - \eta_1) \cdot 10^5$	1	7	15	21	68	134	289
$\left(\frac{G}{G_0} - 1\right) \cdot 10^5$	1	7	14	20	60	110	200
$h \cdot 10^5$	50	357	703	1013	3243	6533	9647
$-\frac{\sigma_{11}^0}{\lambda + 2\mu} \cdot 10^5$	1	7	15	21	63	117	684
$-\frac{\sigma_{12}^1}{\lambda + 2\mu} \cdot 10^5$	82	218	308	369	639	864	3247

где индекс нуль относится к зоне между ξ^* и ξ_0, а единица—к зоне между ξ_1 и границей полупространства $\eta = \rho / \rho_0$, $h = \xi_0 - \xi_1$. Видно, что деформирование происходит следующим образом: передний фронт возмущения является ударной волной сжатия (эффект Пойтинга — чистый сдвиг приводит к сжатию среды), так что в зоне нуль среда сжата, центрированная волна сдвига приводит в то же время к расширению среды, наконец, в зоне единица наблюдается эффект Вейссенберга (чистый сдвиг при-



Фиг. 2

водит к расширению материала). Ширина h центрированной волны, абсолютные значения эффектов Пойтинга и Вейссенберга и интенсивность ударной волны растут с ростом воздействия (v_{20} / G_0) на среду. Напряжение σ_{11} убывает по величине с уменьшением ξ в зоне нетривиального решения (между ξ_0 и ξ_1), что справедливо и в случае $v_{10} > 0$; величина же σ_{12} увеличивается.

Все функции в зоне нетривиального решения монотонные. Положение переднего фронта центрированной волны при $a_1 = -36.42$, $a_2 = -5.39$, $a_3 = -5.69$, $\varkappa = 0.29$ (что соответствует [5] стали и было принято при получении табличных данных) изменяется в пределах $0.5439 \leqslant \xi_0 \leqslant 0.5566$, когда v_{20} / G меняется в пределах таблицы; при этом ξ_0 растет с увеличением воздействия. Примерно в тех же пределах изменяется ξ_0 и ширина центрированной волны в случае косого удара ($v_{10} > 0$).

Если $v_{10} < 0$, то ударная волна сжатия должна быть заменена центрированной волной расширения (зона между $\xi_1 = 1$ и ξ_2, фиг. 2). Равенство $\xi_1 = 1$ следует непосредственно из (1.6), если положить $T' = 0$ и $\Theta' = 0$. В области центрированной волны расширения $\Theta \equiv 0$, что непосредственно следует из (1.4) и (1.6), т. е. центрированная волна расширения является строго продольной волной (сдвиговые деформации распространяются медленнее объемных). Функция T определяется из дифференциального уравнения первого порядка $A = 0$, при граничном условии $T(1) = 0$. В зоне между ξ_3 и ξ_4 (сдвиговая центрированная волна) решение определяется из системы уравнений

(3.2) с граничными условиями вида (3.3), где необходимо заменить ξ^* на ξ_2, ξ_0 на ξ_3 и ξ_1 на ξ_4. Пять граничных условий (3.3) служат для определения трех постоянных интегрирования системы (3.2) и значений ξ_2 и ξ_4. Величина ξ_3 определяется из условия $B(\xi_3) = 0$. При численном решении оказалось, что T'' при $\xi = 1$ обращается в бесконечность. Поведение всех функций в зонах центрированных волн монотонно; при этом свойства уравнений таковы, что σ_{11}, v_2 возрастают, а σ_{12}, ρ, v_1 убывают с уменьшением ξ, как и в ранее рассмотренном случае.

Поступила 29 V 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Буренин А. А., Лапыгин В. В., Чернышов А. Д.* К решению плоских автомодельных задач нелинейной динамической теории упругости. Материалы симпозиума «Нелинейные волны деформаций», ч. 2. Таллин, 1978.
2. *Wright T. W.* Reflection of oblique shock waves in elastic solids. Internat. J. Solids and Structure, 1971, vol. 7, No. 2.
3. *Черных Е. М.* Автомодельная задача об ударном нагружении нелинейно-упругого материала. ПММ, 1967, т. 31, вып. 5.
4. *Седов Л. И.* Введение в механику сплошной среды. М., Физматгиз, 1962.
5. *Зарембо Б. К., Красильников В. А.* Введение в нелинейную акустику. М., «Наука», 1966.
6. *Томас Т.* Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М., «Мир», 1964.
7. *Чернышов А. Д.* Об условиях распространения ударных волн в средах с упругими и пластическими свойствами. В сб.: Проблемные вопросы механики горных пород. Алма-Ата, «Наука», 1972.