Прикладная математика и механика. Том 43, 1979

УДК 624.07 : 534.1

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕОДНОРОДНО-СТАРЕЮЩИХ ВЯЗКОУПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ

Н. Х. Арутюнян, В. Б. Колмановский

(Москва)

Исследуется устойчивость неоднородно-стареющего вязкоупругого стержня. Для задачи на бесконечном интервале времени получено выражение критической силы в зависимости от параметров стержня. Для задачи на конечном интервале даны оценки критического времени.

Исследованию устойчивости вязкоупругих стержней посвящен ряд работ, большинство из которых касается вопросов устойчивости продольно-сжатого стержня (обзор и библиографию этих работ см., например, в [1–5]). Имеется несколько принципиально различных постановок задачи об устойчивости вязкоупругих стержней. В частности, для стержней из материала, обладающего свойством ограниченной ползучести, обычная постановка задачи состоит в определении длительной критической нагрузки на бесконечном интервале времени. При этом деформирование вязкоупругого стержня называется устойчивым, если прогиб ограничен при всех временах. Если же прогиб в некоторой точке как функция времени неограничен, то стержень называется неустойчивым. Одна из постановок задачи устойчивости на конечном заданном интервале времени состоит в определении ограничений на начальную погибь, при выполнении которых определяемый ею прогиб не превосходит некоторого значения. Другая постановка состоит в определении критического времени, когда величина прогиба достигает заданного значения. Сформулированные постановки задач устойчивости на конечном интервале времени исходят из определений устойчивости движения динамических систем, берущих свое начало с работы Н. Г. Четаева [6]. Обзор и библиография работ, посвященных технической устойчивости движения, приведены в [7, 8].

Ниже исследуется устойчивость стержней, свойства которых описываются уравнениями теории вязкоупругости неоднородно-стареющих тел [9–12].

О модели неоднородно-стареющего вязкоупругого тела. Модель неоднородно-стареющего вязкоупругого тела с изменяющимися во времени упругими и реологическими свойствами характерна своей специфической неоднородностью. Эта неоднородность обусловлена тем, что процесс старения в таком теле протекает неодинаково во всех его элементах, поэтому возраст материала зависит, вообще говоря, от пространственных координат. Переменность возраста материала, в свою очередь, определяет вид функции, характеризующей свойства вязкоупругого тела в зависимости от времени и пространственных координат.

Уравнения состояния для такой модели вязкоупругого тела, отражающие зависимость возраста материала от пространственных координат, можно получить на основе работы [9]. Обозначим момент приложения напряжений к элементу вязкоупругого тела в окрестности точки $r = (x_1, x_2, x_3)$ через τ_0, а через $\tau_1^* = \tau_1^*(r)$ — момент изготовления (зарождения) этого же элемента. Момент наблюдения обозначим через t (абсолютное время), причем начало отсчета времени может быть выбрано произвольно. Пусть далее $\tau_1 = \tau_1(r)$ — возраст материала элемента в окрестности точки $r = (x_1, x_2, x_3)$ данного тела в момент τ_0 приложения напряжения. Очевидно,

имеем

(0.1) $$\tau_1(r) = \tau_0 - \tau_1^*(r)$$

Тогда уравнение состояния, связывающее деформацию $\varepsilon_x(t)$ с напряжением $\sigma_x(t)$, для неоднородно-стареющего вязкоупругого тела при одноосном напряженном состоянии будет иметь следующий вид:

(0.2) $$\varepsilon_x(t) = \frac{\sigma_x(t)}{E(t-\tau_1^*)} - \int_{\tau_0}^{t} \sigma_x(\tau) K(t-\tau_1^*, \tau-\tau_1^*)\, d\tau$$

(0.3) $$K(t,\tau) = \frac{\partial}{\partial\tau}\Delta(t,\tau) = \frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{E(\tau)} + N(t,\tau)\right]$$

Здесь $K(t, \tau)$ — ядро ползучести для однородно-стареющего тела, т. е. когда $\tau_1^*(x) \equiv 0$, $E(t)$ — переменный модуль упругомгновенной деформации, $N(t, \tau)$ — мера ползучести материала.

Введем в уравнение (0.2) вместо момента $\tau_1^*(r)$ изготовления (зарождения) элемента вязкоупругого тела возраст материала этого же элемента $\tau_1(r)$ в момент τ_0 приложения напряжения. Положим для простоты, что при одноосном напряженном состоянии возраст материала τ_1 зависит лишь от одной координаты x. Для определенности выберем в качестве начала отсчета времени момент изготовления (зарождения) элемента вязкоупругого тела с координатой $x = 0$ и введем возраст $\rho(x)$ относительно этого элемента. (Функция неоднородного старения $\rho(x)$ характеризует закон изменения возраста материала в стареющем вязкоупругом теле в зависимости от координат.)

С учетом сказанного уравнение состояния в силу (0.1) представим в виде

(0.4) $$\varepsilon_x(t) = \frac{\sigma_x(t)}{E[t+\rho(x)]} - \int_{\tau_0}^{t} \sigma_x(\tau) K[t+\rho(x), \tau+\rho(x)]\, d\tau$$

Если момент приложения напряжения для разных элементов вязкоупругого тела различный, т. е. $\tau_0 = \tau_0(x)$, то уравнение состояния будет иметь другую форму

(0.5) $$\varepsilon_x(t) = \frac{\sigma_x'(t)}{E[t-\tau_1^*(x)]} - \int_{\tau_0(x)}^{t} \sigma_x(\tau) K[t-\tau_1^*(x), \tau-\tau_1^*(x)]\, d\tau$$

Функция $\tau_1^* = \tau_1^*(x)$ представляет момент зарождения элемента с координатой x, а функция $\tau_0 = \tau_0(x)$ — момент приложения напряжений к этому элементу. Ясно, что $\tau_1^*(x) \leqslant \tau_0(x)$.

Уравнения состояния (0.4) и (0.5) являются определяющими соотношениями теории ползучести неоднородно-стареющих тел при одноосном напряженном состоянии в случае малых деформаций, не превосходящих предела пропорциональности. В общем случае при объемном напряженном состоянии и малых деформациях, превосходящих, однако, предел пропорциональности, соответствующие уравнения состояния даны в работах [9–11].

При постоянном модуле упругомгновенной деформации ядро имеет вид $K(t, \tau) = \partial N(t, \tau) / \partial\tau$. Мера ползучести $N(t, \tau)$ может быть, согласно [12], записана в виде

(0.6) $$N(t, \tau) = \varphi(\tau)\, f(t-\tau)$$

Функция $\varphi(\tau)$ определяет процесс старения материала стержня. Разлагая функцию $f(t-\tau)$ в экспоненциальный ряд и ограничиваясь первыми двумя членами разложения, получим

(0.7) $$N(t, \tau) = \varphi(\tau)[1 - e^{-\gamma(t-\tau)}]$$

Уравнение (0.4) при условиях (0.6), (0.7) положено в основу дальнейшего исследования.

При каждом фиксированном x и заданной деформации соотношение (0.5) представляет собой интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно напря-

жений (обзор работ, посвященных этим уравнениям, имеется в [13]). В частности, если при фиксированном x функции $K(t-\tau_1^*(x),\ \tau-\tau_1^*(x))E(t-\tau_1^*(x))$ и $\varepsilon_x(t)\,E(t-\tau_1^*(x))$ интегрируемы с квадратом при $\tau_0(x)\leqslant t,\ \tau\leqslant T$, то уравнение (0.5) имеет единственное решение $\sigma_x(t)$, $\tau_0(x)\leqslant t\leqslant T$, интегрируемое с квадратом.

1. Устойчивость на бесконечном интервале времени. Рассмотрим неоднородно-стареющий вязкоупругий стержень, длину которого без ограничения общности можно считать равной единице. В недеформированном состоянии стержень расположен вдоль оси Ox. На стержень действует продольная сила P, приложенная в момент t_0. Прогиб стержня в точке x в момент времени $t\geqslant t_0$, отсчитываемый от линии действия сжимающей силы, обозначим через $y(t,x)$. Предполагается, что в момент времени t_0-0 непосредственно перед приложением силы стержень имел начальную погибь $y_0(x)$, т. е.

$$y(t_0-0,x)=y_0(x) \tag{1.1}$$

В равенстве (1.1) функция $y_0(x)$ задана и имеет две непрерывные производные при $x\in[0,1]$.

Назовем стержень устойчивым, если прогиб как функция t, x ограничен, т. е.

$$\sup_{t\geqslant t_0,\ x\in[0,1]}|y(t,x)|<\infty \tag{1.2}$$

Предположим далее, что распределение продольных деформаций по сечению стержня подчиняется закону плоских сечений. Тогда уравнение для прогиба $y(t,x)$ вязкоупругого стержня из неоднородно-стареющего материала имеет в силу (0.4) вид

$$\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2}+\frac{P}{I}\left\{\frac{y(t,x)}{E}-\right.$$
$$\left.-\int_{t_0}^{t}y(\tau,x)\frac{\partial}{\partial\tau}[\varphi(\tau+\rho(x))(1-e^{-\gamma(t-\tau)})]\,d\tau\right\}=\frac{d^2y_0(x)}{dx^2} \tag{1.3}$$

Здесь положительная ограниченная непрерывная функция $\varphi(\tau)$ при $\tau\to\infty$ стремится к некоторой постоянной $C_0>0$, представляющей собой предельную меру ползучести материала в его старом возрасте. Функция $\rho(x)$ кусочно-непрерывна и ограничена, заданная постоянная $\gamma>0$, через E обозначен модуль упругомгновенной деформации, через I — момент инерции стержня относительно продольной оси.

Граничные условия для уравнения (1.3) даются соотношениями

$$y(t,0)\cos\alpha+\frac{\partial y(t,0)}{\partial x}\sin\alpha=0 \tag{1.4}$$
$$y(t,1)\cos\beta+\frac{\partial y(t,1)}{\partial x}\sin\beta=0$$

Числа α и β задаются таким образом, что дифференциальное уравнение для прогибов в упругой задаче (т. е. уравнение (1.3) при $t=t_0$), отсчитываемых от линии действия сжимающей силы, имело второй порядок. Выбирая значения параметров α и β, получаем граничные условия, соответ-

ствующие конкретным способам закрепления стержня (например случай $\alpha = \beta = 0$ соответствует шарнирному закреплению концов стержня, при $\alpha = 0$, $\beta = \pi / 2$ имеем стержень одним концом заделанный, а другим свободный; другие возможные виды граничных условий, удовлетворяющие сформулированному ограничению, приведены в гл. 6 книги [14]).

Преобразуем уравнение (1.3). Будем считать, что существует и непрерывна функция $\partial^4 y(t, x) / \partial x^2 \partial t^2$. Дифференцируя (1.3) два раза по t, получим

$$\frac{\partial^4 y(t,x)}{\partial x^2 \partial t^2} + \gamma \frac{\partial^3 y(t,x)}{\partial x^2 \partial t} + \frac{P}{IE} \frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial t^2} + \frac{P\gamma}{IE} \frac{\partial y(t,x)}{\partial t} [1 + E\varphi(t + \rho(x))] = 0 \tag{1.5}$$

$$(t \geqslant t_0,\ 0 \leqslant x \leqslant 1)$$

Граничные условия для уравнения (1.5) имеют вид (1.4).

Запишем начальные условия при $t = t_0$ для этого уравнения. Одно из них получим, полагая $t = t_0$ (в (1.3). Имеем

$$\frac{\partial^2 y(t_0, x)}{\partial x^2} = -\frac{P}{IE} y(t_0, x) + \frac{d^2 y_0(x)}{dx^2} \tag{1.6}$$

Второе начальное условие получается, если продифференцировать по t обе части (1.3) и устремить t к t_0. Это условие имеет вид

$$\frac{\partial^3 y(t_0, x)}{\partial x^2 \partial t} + \frac{P}{IE} \frac{\partial y(t_0, x)}{\partial t} = -\frac{P\gamma}{I} y(t_0, x) \varphi(t_0 + \rho(x)) \tag{1.7}$$

Для получения условий устойчивости будем искать решение задачи (1.4) — (1.7), (1.1) в виде разложения в ряд по собственным функциям упругой задачи. Обозначим через λ_n последовательность собственных значений упругой задачи, а через $\psi_n(x)$ — соответствующую последовательность собственных функций. Функции $\psi_n(x)$ удовлетворяют граничным условиям (1.4), в которых всюду y заменено на ψ_n, и уравнениям

$$\frac{d^2 \psi_n(x)}{dx^2} + \lambda_n \psi_n(x) = 0 \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1) \tag{1.8}$$

Напомним (см. [15], стр. 23, 31), что существует неограниченно возрастающая последовательность действительных собственных значений λ_n и соответствующая им ортонормированная последовательность собственных функций ψ_n. При этом прогиб $y(t, x)$ при каждом $t \geqslant t_0$ разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся по $x \in [0, 1]$ ряд Фурье вида

$$y(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) \psi_n(x), \quad A_n(t) = \int_0^1 y(t, x) \psi_n(x)\, dx \tag{1.9}$$

Ряд (1.9) можно при сделанном выше предположении о непрерывности производной $\partial^4 y(t, x) / \partial x^2 \partial t^2$ продифференцировать два раза по t и по x под знаком суммы.

Чтобы показать это, заметим вначале, что если

$$\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(t) \psi_n(x), \quad B_n(t) = \int_0^1 \frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial t^2} \psi_n(x)\, dx$$

то ввиду (1.9) коэффициенты $B_n(t) = A_n^{\cdot\cdot}$ (точка означает производную по t). Пусть далее

$$\frac{\partial^4 y(t, x)}{\partial t^2 \partial x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(t)\, \psi_n(x)$$

Тогда, интегрируя два раза по частям, имеем

$$Q_n(t) = \int_0^1 \frac{\partial^4 y(t, y)}{\partial t^2 \partial x^2}\, \psi_n(x)\, dx = \psi_n(1) \frac{\partial y(t, 1)}{\partial x} - \psi_n(0) \frac{\partial y(t, 0)}{\partial x} +$$

$$+ \frac{d\psi_n(0)}{dx} y(t, 0) - \frac{d\psi_n(1)}{dx} y(t, 1) + I_1(t), \quad I_1(t) = \int_0^1 \frac{d^2\psi_n(x)}{dx^2} \frac{\partial^2 y(t, x)}{\partial t^2}\, dx$$

Однако на основании (1.8)

$$I_1(t) = \lambda_n \int_0^1 \psi_n(x) \frac{\partial^2 y(t, x)}{\partial t^2}\, dx = -\lambda_n B_n(t) = -\lambda_n A_n^{\cdot\cdot}(t)$$

Кроме того, из первого граничного условия (1.4) для y и ψ_n вытекает система уравнений относительно величин $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$. Эта система при любом α имеет нетривиальное решение. Значит, ее определитель равен нулю, т. е.

$$y(t, 0) \frac{d\psi_n(0)}{dx} - \psi_n(0) \frac{\partial y(t, 0)}{dx} = 0$$

Аналогично имеем

$$\psi_n(1) \frac{\partial y(t, 1)}{\partial x} - \frac{d\psi_n(1)}{\partial x} y(t, 1) = 0$$

Таким образом, окончательно заключаем, что

$$\frac{\partial^4 y(t, x)}{\partial t^2 \partial x^2} = -\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n B_n(t)\, \psi_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{\cdot\cdot}(t) \frac{d^2\psi_n(x)}{dx^2}$$

Возможность дифференцирования под знаком суммы установлена.

Выпишем уравнения, определяющие коэффициенты $A_n(t)$ в разложении (1.9). С этой целью подставим ряд (1.9) в (1.5). С учетом (1.8) и ортонормированности функций $\psi_n(x)$ получим

$$(1.10) \qquad [A_n^{\cdot\cdot}(t) + \gamma A_n^{\cdot}(t)]\, \mu_n^{-1} + \gamma E \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{\cdot}(t)\, \beta_{mn}(t) = 0$$

$$\mu_n = \left[1 - \frac{IE}{P} \lambda_n\right]^{-1}, \quad t \geqslant t_0$$

$$\beta_{mn}(t) = \int_0^1 \psi_n(x)\, \psi_m(x)\, \varphi(t + \rho(x))\, dx$$

Начальные условия для уравнения (1.10) получим, подставляя (1.9) в (1.6), (1.7). В результате имеем ($\overset{\circ}{A}_n$ — коэффициент Фурье функции $y_0(x)$)

$$(1.11) \qquad A_n(t_0) = -\overset{\circ}{A}_n \lambda_n \mu_n IEP^{-1}$$

$$A_n^{\cdot}(t_0) = -\gamma \mu_n E \sum_{m=0}^{\infty} A_m(t_0)\, \beta_{mn}(t_0)$$

$$A_n^\circ = \int_0^1 y_0(x)\,\psi_n(x)\,dx$$

При исследовании устойчивости естественно считать, что сила P меньше эйлеровой критической силы, т. е.

(1.12) $\qquad P < IE\lambda_0$

Здесь λ_0 — минимальное собственное значение упругой задачи. Условие (1.12) далее считается выполненным.

В силу равенства Парсеваля (см. [16], стр. 152) справедлива формула

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^2(t) = \int_0^1 y^2(t, x)\,dx \tag{1.13}$$

Соотношение (1.13) означает, в частности, что решение $A_n(t)$ задачи Коши (1.10), (1.11) можно при каждом t интерпретировать как элемент координатного гильбертова пространства l_2. Отметим, что решение задачи Коши (1.10), (1.11) существует и единственно в силу [11].

Покажем теперь с помощью второго метода Ляпунова, что ряд $u(t)$ ограничен при всех $t \geqslant t_0$. Введем в рассмотрение скалярную функцию $V(t)$:

$$V(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^2(t)$$

Вычислим производную функции $V(t)$ вдоль траекторий системы (1.10)

$$V^\cdot(t) = -2\gamma V(t) - \tag{1.14}$$
$$-2\gamma E \sum_{n=0}^{\infty} A_n^\cdot(t)\,\mu_n \sum_{m=0}^{\infty} A_m^\cdot(t)\,\beta_{mn}(t)$$

Преобразуем правую часть формулы (1.14). Представим $\beta_{mn}(t)$ в виде (δ_{mn} — символ Кронекера)

$$\beta_{mn}(t) = C_0\delta_{mn} + \bar\beta_{mn} \tag{1.15}$$
$$\bar\beta_{mn}(t) = \int_0^1 \psi_n(x)\,\psi_m(x)\,(\varphi(t + \rho(x)) - C_0)\,dx$$

В силу сделанных предположений о функциях φ и ρ равномерно по n и m будет справедливо равенство

$$\lim_{t\to\infty} \bar\beta_{mn}(t) = 0 \tag{1.16}$$

С учетом (1.15) имеем

$$2\gamma E \sum_{n=0}^{\infty} A_n^\cdot \mu_n \sum_{m=0}^{\infty} A_m^\cdot(t)\,\beta_{mn}(t) = \tag{1.17}$$
$$= 2\gamma E C_0 \sum_{n=0}^{\infty} A_n^2(t)\,\mu_n + 2\gamma E \Sigma_{nm}$$
$$\Sigma_{nm} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_n^\cdot(t)\,A_m^\cdot(t)\,\mu_n\beta_{mn}(t)$$

Далее, на основании (1.12) можно записать неравенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{\cdot 2}(t)\,\mu_n > \mu_0 V(t) \tag{1.18}$$

Кроме того, в силу неравенства Коши — Буняковского будет

$$\Sigma_{nm} \leqslant [V(t)]^{1/2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty} A_m^{\cdot}(t)\,\mu_n\bar{\beta}_{mn}(t)\right)^2\right]^{1/2} \leqslant \tag{1.19}$$

$$\leqslant V(t)\left[\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\mu_n^2\bar{\beta}_{mn}^2(t)\right]^{1/2} =$$

$$= V(t)\left[\sum_{n=0}^{\infty}\mu_n^2\int_0^1\psi_n^2(x)\,(\varphi(t+\rho(x))-C_0)^2\,dx\right]^{1/2}$$

В последнем переходе при выводе формулы (1.19) было использовано равенство Парсеваля в следующей форме:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\bar{\beta}_{mn}^2(t) = \int_0^1\psi_n^2(x)\,(\varphi(t+\rho(x)) - C_0)^2\,dx$$

Однако при больших n имеет место асимптотическая формула (см. [15], стр. 14)

$$\lambda_n = n + O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{1.20}$$

Кроме того, с учетом (1.12) все величины μ_n^2 положительны. Отсюда, из (1.20) и (1.12) вытекает сходимость ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mu_n^2 = C_1 < \infty \tag{1.21}$$

Буквами C_i ($i = 1, 2, \ldots$) обозначаются некоторые положительные постоянные. Из оценки (1.21) и нормированности собственных функций ψ_n следует неравенство (C_1 дается формулой (1.21))

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mu_n^2\left[\int_0^1\psi_n^2(x)\,[\varphi(t+\rho(x)) - C_0]^2\,dx\right]^{1/2} \leqslant C_1\varphi_1(t) \tag{1.22}$$

$$\varphi_1(t) = \max_{0\leqslant x\leqslant 1}\,(\varphi(t+\rho(x)) - C_0)$$

Подставим выражения (1.17), (1.19), (1.22) в правую часть (1.14). Получим

$$V^{\cdot}(t) \leqslant \{-2\gamma\,[1 + EC_0\mu_0] + 2\gamma\,EC_1\}\,\varphi_1(t)\,V(t) \tag{1.23}$$

Потребуем теперь, чтобы выражение в квадратных скобках в правой части (1.23) было положительным. Это будет выполнено при сжимающих силах P, удовлетворяющих условию [1]

$$P < EI\lambda_0\,(1 + EC_0)^{-1} \tag{1.24}$$

[1] Для одного частного случая этот результат был отмечен А. С. Лозовским.

Назовем сжимающую силу, равную правой части (1.24), критической силой при длительном действии нагрузки.

Установим теперь ограниченность функции $V(t)$, $t \geqslant t_0$ при выполнении условия (1.24). Заметим, что в силу предположений о функциях φ и ρ будет $\lim_{t\to\infty} \varphi_1(t) = 0$. Значит, существует такое t_1, что при всех $t \geqslant t_1$ и при некотором $\varepsilon > 0$ будет справедливо неравенство

$$-[1 + EC_0\mu_0] + E\varphi_1(t) \leqslant -\varepsilon$$

Можно далее показать, что

$$u(t_0) < \infty, \quad V(t_0) < \infty \tag{1.25}$$

Действительно, в силу (1.11) и равенства Парсеваля будет

$$u(t_0) \leqslant C \sum_{n=0}^{\infty} (A_n^\circ)^2 = C \int_0^1 y_0^2(x)\,dx < \infty$$

Аналогично, с помощью неравенства Коши — Буняковского, равенства Парсеваля и соотношений (1.11), (1.20) устанавливается, что

$$V(t_0) \leqslant \gamma^2 E^2 \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n^2 \sum_{m=0}^{\infty} \left(A_m^\circ\right)^2 \sum_{m=0}^{\infty} \beta_{mn}^2(t_0) = \tag{1.26}$$

$$= \gamma^2 E^2 \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n^2 \int_0^1 y_0^2(x)\,dx \int_0^1 \psi_n^2(z)\,\varphi^2(t_0 + \rho(z))\,dz \leqslant$$

$$\leqslant C_2 \int_0^1 y_0^2(x)\,dx < \infty$$

$$C_2 = \gamma^2 E^2 \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n^2 \max_x \varphi^2(t_0 + \rho(x))$$

Из неравенств (1.23), (1.25) вытекает ограниченность функции $V(t)$ на интервале $[t_0, t_1]$. Отсюда, из (1.23), (1.24) заключаем, что найдется такая постоянная $\varkappa > 0$, для которой

$$V(t) \leqslant \varkappa e^{-\varkappa(t-t_0)}, \quad t \geqslant t_0 \tag{1.27}$$

Из неравенства (1.27) и определения функции $V(t)$ ввиду (1.25) следует, что

$$\sup_{t\geqslant t_0} u(t) < \infty$$

Тем самым, в силу равенства Парсеваля (1.13) установлено, что

$$\sup_{t\geqslant t_0} \int_0^1 y^2(t, x)\,dx < \infty \tag{1.28}$$

Покажем теперь, что из (1.28) следует (1.2), т. е. устойчивость вязкоупругого стержня на бесконечном интервале времени. Обозначим через $G(x, \xi)$ функцию Грина упругой задачи, т. е. функцию Грина уравнения (1.3) при $\varphi = y_0 = 0$ с краевыми условиями (1.4). Тогда в силу (1.3) спра-

ведливо представление

$$(1.29)\qquad y(t,x)=\int_0^1 G(x,\xi)\left\{\frac{d^2y_0(\xi)}{d\xi^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{P}{I}\int_{t_0}^{t} y(\tau,\xi)\frac{\partial}{\partial\tau}[\varphi(\tau+\rho(\xi))(1-e^{-\gamma(t-\tau)})]\,d\tau\right\}d\xi$$

Интегрируя по частям, преобразуем это равенство к виду

$$(1.30)\qquad y(t,x)=\int_0^1 G(x,\xi)\left[\frac{d^2y_0(\xi)}{d\xi^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{P}{I}y(t_0,\xi)\,\varphi(t_0+\rho(\xi))(1-e^{-\gamma(t-t_0)})\right]d\xi-$$
$$-\frac{P}{I}\int_0^1 G(x,\xi)\int_{t_0}^{t}\frac{\partial y(\tau,\xi)}{\partial\tau}[\varphi(\tau+\rho(\xi))(1-e^{-\gamma(t-\tau)})]\,d\tau\,d\xi$$

Очевидно, что первое слагаемое в правой части (1.29) ограничено при всех $t\geqslant t_0$. Оценим второе. Имеем с учетом неравенства Коши — Буняковского, равенства Парсеваля и соотношения (1.27)

$$(1.31)\qquad \left|\frac{P}{I}\int_0^1 G(x,\xi)\,d\xi\int_{t_0}^{t}\frac{\partial y(\tau,\xi)}{\partial\tau}[\varphi(\tau+\rho(\xi))\times\right.$$
$$\left.\times(1-e^{-\gamma(t-\tau)})\right]d\tau\Big|\leqslant\int_{t_0}^{t}C_3(\tau)\int_0^1\left|\frac{\partial y(\tau,\xi)}{\partial\tau}\right|d\xi\,d\tau\leqslant$$
$$\leqslant\int_{t_0}^{t}C_3(\tau)\,d\tau\left(\int_0^1\left(\frac{\partial y(\tau,\xi)}{\partial\tau}\right)^2d\xi\right)^{1/2}=\int_{t_0}^{t}C_3(\tau)\,V(\tau)\,d\tau$$
$$C_3(t)=\frac{P}{I}\max\nolimits_{x,\,\xi}|G(x,\xi)\,\varphi(t+\rho(\xi))|$$

Отсюда и из (1.30) вытекает (1.2).

Таким образом, для рассмотренного здесь случая критическое значение сжимающей силы P дается правой частью формулы (1.24). Оно оказывается не зависящим от функции $\rho(x)$, характеризующей неоднородность старения материала в вязкоупругом стержне. Отметим, что для однородного стареющего вязкоупругого шарнирно-опертого стержня критическое значение сжимающей силы было получено в [18].

Замечание 1. Неравенство (1.24) представляет собой лишь достаточное условие устойчивости, но отнюдь не необходимое. Именно, критическая сила, удовлетворяющая (1.12), может быть больше правой части (1.24) на любом конечном интервале времени. Тем не менее стержень будет устойчив. Для доказательства этого достаточно заметить, что на любом конечном интервале времени $[t_0, t_1]$ прогиб ограничен ввиду (1.23), (1.25).

Значит, если при $t\geqslant t_1$ оценка (1.24) справедлива, то будет выполнено и неравенство (1.27), из которого выше и было выведено (1.2).

Замечание 2. Покажем, что если

$$(1.32)\qquad IE\lambda_0(1+EC_0)^{-1}<P<E\lambda_0 I$$

то стержень неустойчив, т. е. неравенство (1.2) нарушается. Для этого запишем

уравнение (1.10) при $n = 0$. Из соотношения (1.15) следует, что

$$(A_0^{\cdot\cdot} + \gamma A_0^{\cdot})(1 - IE\lambda_0 P^{-1}) + \gamma E C_0 A_0^{\cdot} + \gamma E \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{\cdot}(t)\,\bar{\beta}_{m0}(t) = 0 \tag{1.33}$$

Предположим противное, т. е. что (1.2) имеет место. Тогда из (1.29), (1.2) и равенства Парсеваля можно вывести, что

$$\sup_{t \geqslant t_0} V(t) < \infty$$

Отсюда и из (1.33), (1.32), (1.16) вытекает существование такой начальной погиби $y_0(x)$, что соответствующий коэффициент $A_0(t)$ неограниченно возрастает. Это, однако, в силу определения функции $A_0(t)$ противоречит (1.2). Тем самым неустойчивость стержня при выполнении условий (1.32) установлена.

2. Устойчивость на конечном интервале времени. 1°. Изучим вначале устойчивость стержня на конечном интервале времени в следующей постановке. Дан конечный интервал времени $[t_0, T]$ и число $y^* > 0$. Требуется определить ограничения на начальную погибь $y_0(x)$, при выполнении которых будет

$$\sup_t \sup_x |y(t, x)| \leqslant y^*, \quad t_0 \leqslant t \leqslant T, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \tag{2.1}$$

Относительно сжимающей силы P предполагается справедливым неравенство (1.12).

Для получения ограничений на начальную погибь используем представление (1.30). Оценим отдельные слагаемые в (1.30). В силу (1.29)

$$y(t_0, x) = \int_0^1 G(x, \xi) \frac{d^2 y_0(\xi)}{d\xi^2}\, d\xi$$

Подставляя это равенство в (1.30), получим, что первый интеграл в правой части (1.30) не превосходит величины $\psi_1(t)$, равной

$$\psi_1(t) = C_4(t) \int_0^1 \left| \frac{d^2 y_0(\xi)}{d\xi^2} \right| d\xi \tag{2.2}$$

$$C_4(t) = \max_{x,\,\xi,\,\xi_1} \Big[|G(x, \xi)| + \frac{P}{I} \big| G(x, \xi)\, G(\xi, \xi_1)\, \varphi(t_0 + \rho(\xi))\,(1 - e^{-\gamma(t - t_0)}) \big| \Big]$$

$$0 \leqslant x, \xi, \xi_1 \leqslant 1$$

Для оценки второго интеграла в (1.30) используем формулу (1.31), в которой уточним верхнюю грань функции $V(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant T$. С учетом (1.23), (1.26) заключаем, что

$$V(t) \leqslant C_2 \int_0^1 y_0^2(x)\, dx\, C_6(t) \tag{2.3}$$

$$C_6(t) = \exp \int_{t_0}^{t} C_5(s)\, ds$$

Здесь $C_5(t)$ равняется выражению в фигурных скобках в (1.23). Из (2.4) и (1.31) вытекает оценка второго интеграла в (1.30). Эта оценка и (2.2) дают окончательно, что максимальный прогиб при $t_0 \leqslant t \leqslant T$ и $0 \leqslant x \leqslant 1$

(т. е. левая часть (2.1)) не превосходит величины I_2, равной

$$I_2 = C_4(T)\int_0^1 \left|\frac{d^2y_0(x)}{dx^2}\right| dx + \int_{t_0}^{T} C_3(\tau)\left[C_2\int_0^1 y_0^2(x)\,dx\,C_6(\tau)\right]^{1/2} d\tau \tag{2.4}$$

Значит, для любой погиби $y_0(x)$, удовлетворяющей требованию $I_2 \leqslant y^*$, будет выполнено условие (2.1), т. е. стержень будет устойчив. Отметим, что полученное условие устойчивости зависит от начальной погиби $y_0(x)$ и ее второй производной лишь интегральным образом.

2°. Рассмотрим устойчивость стержня при следующей постановке. Дана начальная погибь $y_0(x)$ и число $y^* > 0$. Требуется определить первый момент времени $t = t_1$, в который выполняется равенство максимального значения прогиба его критическому значению y^*, т. е.

$$\max_x |y(t, x)| = y^*, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \tag{2.5}$$

Точное определение момента t_1 из условия (2.5) возможно лишь в исключительных случаях. Поэтому представляют интерес различные оценки момента t_1.

Приведем оценку снизу t_1^- момента t_1. Тем самым оценивается интервал времени $[t_0, t_1^-]$, на котором прогиб не превосходит y^*.

Предполагается, что при $t = t_0$ левая часть (2.5) не превосходит y^*. Для получения интересующей оценки используем равенство (1.30). Оценка первого интеграла в (1.30) дается выражением (2.2).

С учетом (2.3) и (1.31) второй интеграл в (1.30) мажорируется функцией $\psi_2(t)$, равной

$$\psi_2(t) = C_2\int_0^1 y_0^2(x)\,dx\int_{t_0}^{t} C_3(s)\,C_6(s)\,ds \geqslant \int_{t_0}^{t} C_3(s)\,V(s)\,ds$$

Таким образом, окончательно имеем

$$\sup_x |y(t, x)| \leqslant \psi_1(t) + \psi_2(t) \tag{2.6}$$

При этом правая часть (2.6)— монотонно возрастающая функция t. Обозначим через t_1^- корень уравнения $\psi_1(t) + \psi_2(t) = y^*$. В силу (2.6) имеем $t_1 \geqslant t_1^-$.

Отметим, что для конкретных способов закрепления концов стержня момент t_1 может быть оценен с помощью изложенного здесь способа и для более общих функций, характеризующих меру ползучести.

Проиллюстрируем сказанное на примере задачи об устойчивости неоднородно-стареющего вязкоупругого стержня, один конец которого заделан, а второй — свободен.

Уравнение для прогиба $y(t, x)$ имеет вид

$$\frac{d^2y_0(x)}{dx^2} = \frac{\partial^2 y(t, x)}{\partial x^2} + \frac{P}{I}\left\{y(t, x) - \int_{t_0}^{t} y(\tau, x)\,\frac{\partial}{\partial\tau}N(t + \rho(x), \tau + \rho(x))\,d\tau\right\} \tag{2.7}$$

$$y(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial y(t, 1)}{\partial x} = 0$$

В уравнении (2.7) мера ползучести $N(t, \tau)$ ограничена, монотонно возрастает по t при каждом фиксированном τ, монотонно убывает по τ при фиксированном t и $N(t, t) = 0$.

Будем считать, что вторая производная начальной погиби $y_0(x)$ неположительна. Отсюда и из (2.7) следует выпуклость по x прогиба $y(t, x)$ при каждом фиксированном t. Значит, наибольшее значение прогиба $y(t, x)$ ввиду граничных условий (2.7) будет при $x = 1$.

Используя функцию Грина упругой задачи, запишем с учетом (2.7) следующее выражение для $y(t, 1)$:

$$y(t, 1) = \int_0^1 K(s) f(t, s)\, ds \tag{2.8}$$

$$K(s) = -\frac{1}{\omega} \operatorname{tg} \omega \cos \omega (1 - s) + \frac{1}{\omega} \sin \omega (1 - s)$$

$$\omega^2 = P/I$$

$$f(t, s) = \int_{t_0}^{t} y(\tau, s) \frac{\partial}{\partial t} N(t + \rho(s), \tau + \rho(s))\, d\tau + \frac{d^2 y_0(s)}{ds^2}$$

На основании (2.8) справедливо неравенство

$$y(t, 1) \leqslant \int_{t_0}^{t} y(\tau, 1) K_1(t, \tau)\, d\tau + K_2 \tag{2.9}$$

$$K_1(t, \tau) = \int_0^1 \left| \frac{\partial}{\partial \tau} N(t + \rho(s), \tau + \rho(s)) K(s) \right| ds \tag{2.10}$$

$$K_2 = \int_0^1 \left| \frac{d^2 y_0(s)}{ds^2} K(s) \right| ds$$

Образуем теперь функцию $\psi_3(t)$, равную сумме ряда

$$\psi_3(t) = K_2 \left(1 + \int_{t_0}^{t} K_1(t, \tau)\, d\tau + \int_{t_0}^{t} K_1(t, \tau) \int_{\tau_0}^{\tau} K_1(\tau, \tau_1)\, d\tau_1 + \ldots\right) \tag{2.11}$$

Отметим, что в силу (2.10) ряд (2.11) абсолютно и равномерно сходится. Итерируя правую часть (2.9), имеем $y(t, 1) \leqslant \psi_3(t)$. Значит, корень t_1 уравнения $\psi_3(t) = y^*$ и доставляет оценку снизу критического времени $t_1^- \leqslant t_1$.

Поступила 10 I 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Работнов Ю. Н.* Теория ползучести. В сб.: Механика в СССР за 50 лет, т. 3. М., «Наука», 1972.
2. *Шестериков С. А.* О критерии устойчивости при ползучести. ПММ, 1961, т. 25, вып 4.
3. *Куршин Л. М.* Устойчивость при ползучести. Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 3.
4. *Ржаницын А. Р.* Теория ползучести. М., Стройиздат, 1968. 418 с.
5. *Феодосьев В. И.* Десять лекций-бесед по сопротивлению материалов. М., «Наука», 1977.
6. *Четаев Н. Г.* Об одной мысли Пуанкаре. Сб. научн. тр. Казанск. авиац. ин-та, 1935, № 3.
7. *Румянцев В. В.* Метод функции Ляпунова в теории устойчивости движения. В сб.: Механика в СССР за 50 лет. М., «Наука», 1969.
8. *Абгарян К. А.* Устойчивость движения на конечном интервале. Итоги науки и техники. Общая механика. М., «Наука», 1976.
9. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые задачи теории ползучести для неоднородно-стареющих тел. Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 2.

10. *Арутюнян Н. Х.* О теории ползучести для неоднородно наследственно-стареющих сред. Докл. АН СССР, т. 229.
11. *Арутюнян Н. Х.* Краевая задача теории ползучести для наращиваемого тела. ПММ, 1977, т. 41, вып. 5.
12. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М., Гостехиздат, 1952.
13. *Цалюк З. Б.* Интегральные уравнения Вольтерра. Итоги науки и техники. Математический анализ. М., «Наука», 1977.
14. *Ржаницын А. Р.* Устойчивость равновесия упругих систем. М., Гостехиздат, 1955. 475с
15. *Левитан Б. М.* Разложение по собственным функциям. М.— Л., Гостехиздат, 1950.
16. *Коллатц А.* Задачи на собственные значения. М., «Наука», 1968.
17. *Крейн М. Г.* Лекции по теории устойчивости решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Киев, Ин-т математики АН УССР, 1964.
18. *Бунятян Л. Б.* Устойчивость тонкостенных стержней с учетом ползучести материала. Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-матем., естеств. и техн. наук, 1953, т. 6, № 2.