Прикладная математика и механика. Том 43, 1979

УДК 539.3

БИОРТОГОНАЛЬНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ В ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ

Г. Я. Попов

(Одесса)

В работе [1] показано, что с помощью биортогональных систем функций удается получить явное решение некоторых задач механики (в виде рядов, по названным системам), которое другими методами построить не удавалось. Ниже показывается, что такие решения можно построить для задач, которые формулируются в виде уравнения

$$Lg = f \quad (f \in H,\ g \in H') \tag{0.1}$$

где L — линейный оператор, действующий из гильбертова пространства H' в гильбертово пространство H. Предлагаемый метод иллюстрируется на примере плоской контактной задачи теории упругости.

1. Системы элементов из H
$\{\xi_n\} = \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots;\quad \{\eta_n\} = \eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n, \ldots$ называют биортонормированными или B-системами [2], если

$$(\xi_n, \eta_m) = \delta_{nm};\ \delta_{nm} = 0,\ n \neq m;\ \delta_{nn} = 1.$$

B-системы важны тем, что для любого элемента $f \in H$ можно получить следующие формальные разложения:

$$f = \sum_{m=0}^{\infty} (f, \xi_m)\, \eta_m, \quad f = \sum_{m=0}^{\infty} (f, \eta_m)\, \xi_m \tag{1.1}$$

Для построения B-систем введем две системы элементов $\{\varphi_n\}$ и $\{\psi_n\}$ и составим определители вида

$$B_n = \begin{vmatrix} b_{00} & b_{01} & \ldots & b_{0n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n-1,0} & b_{n-1,1} & \ldots & b_{n-1,n} \\ b_{n0} & b_{n1} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix} \quad \begin{pmatrix} n = 0, 1, 2, \ldots \\ B_0 = b_{00} \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

$$b_{nm} = (\varphi_n, \psi_m) \tag{1.3}$$

Системы $\{\varphi_n\}$ и $\{\psi_n\}$ назовем B-линейно-независимыми, если $B_n \neq 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Следующая теорема дает способ построения B-систем в явном виде.

Теорема 1. Системы $\{\xi_n\}$ и $\{\eta_n\}$, составленные из любых B-линейно-неза-

висимых систем $\{\varphi_n\}$ и $\{\psi_n\}$ по формулам

$$(1.4)\qquad \xi_n = \frac{\xi_n^*}{\sqrt{B_n B_{n-1}}}, \quad \xi_n^* = \begin{vmatrix} b_{00} & b_{10} & \dots & b_{n0} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{0,n-1} & b_{1,n-1} & \dots & b_{n,n-1} \\ \varphi_0 & \varphi_1 & \dots & \varphi_n \end{vmatrix}$$

$$\eta_n = \frac{\eta_n^*}{\sqrt{B_n B_{n-1}}}, \quad \eta_n^* = \begin{vmatrix} b_{00} & b_{01} & \dots & b_{0n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n-1,0} & b_{n-1,1} & \dots & b_{n-1,n} \\ \psi_0 & \psi_1 & \dots & \psi_n \end{vmatrix}$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots; B_{-1} = 1; \xi_0^* = \varphi_0; \eta_0^* = \psi_0)$$

являются B-системами.

Доказательство просто и проводится по аналогии с известными построениями (см. [3], стр. 158).

Полученные явные формулы для B-систем можно преобразовать в рекуррентные

$$(1.5)\qquad \begin{matrix}\xi_n \\ \eta_n\end{matrix} = A_n \begin{bmatrix}\varphi_n \\ \psi_n\end{bmatrix} - \sum_{j=0}^{n-1} \begin{matrix}(\varphi_n, \eta_j)\,\xi_j \\ (\psi_n, \xi_j)\,\eta_j\end{matrix}$$

$$A_n^{-2} = b_{nn} - \sum_{j=0}^{n-1} (\psi_n, \xi_j)(\varphi_n, \eta_j)$$

Для некоторых важных частных случаев формулы (1.2), (1.4) существенно упрощаются. Пусть, например

$$(1.6)\qquad (\varphi_n, \psi_m) = b_{nm} = 0, \quad n < m$$

Тогда, очевидно

$$B_n = \prod_{j=0}^{n} b_{jj}, \quad \eta_n^* = B_{n-1}\psi_n$$

Раскрывая первый определитель из (1.4) по первому столбцу с учетом (1.6), получим

$$\xi_n^* = \sum_{m=0}^{n} c_{nm}\varphi_m, \quad c_{nm} = (-1)^{n-m}\,\Delta_{nm} B_{m-1}$$

Здесь через Δ_{nm} обозначены определители $(n - m)$-го порядка и почти треугольного вида

$$\Delta_{nm} = \begin{vmatrix} b_{m+1,m} & b_{m+2,m} & \dots & b_{n-1,m} & b_{n,m} \\ b_{m+1,m+1} & b_{m+2,m+1} & \dots & b_{n-1,m+1} & b_{n,m+1} \\ 0 & b_{m+2,m+2} & \dots & b_{n-1,m+2} & b_{n,m+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & b_{n-1,n-1} & b_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

$$\Delta_{nn} = 1, \quad \Delta_{n,n-1} = b_{n,n-1}$$

$$\Delta_{n,n-2} = b_{n,n-1}b_{n-1,n-2} - b_{n-1,n-1}b_{n,n-2}$$

С помощью элементарных операций (начиная с нижней строки) этот определитель можно привести к треугольному виду. В результате имеем

$$\Delta_{nm} = b_{n,\,n-1} b^*_{n-1,\,n-2} b^*_{n-2,\,n-3} \ldots b^*_{m+2,\,m+1} b^*_{m+1,\,m} \tag{1.7}$$

$$m = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

$$b^*_{k,\,j} = b_{k,\,j} - \frac{b_{kk}}{b^*_{k+1,\,k}} b^*_{k+1,\,j} \quad \begin{pmatrix} k = n-1,\ n-2,\ n-3, \ldots \\ j = 0, 1, 2, \ldots \qquad b^*_{n,\,j} = b_{n,\,j} \end{pmatrix}$$

2. Для решения уравнения (0.1) потребуется система элементов $\{\zeta_n\}$, определяемая явными

$$\zeta_n = \frac{\zeta_n^*}{\sqrt{B_n B_{n-1}}}, \quad \zeta_n^* = \begin{vmatrix} b_{00} & b_{01} & \ldots & b_{0n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n-1,\,0} & b_{n-1,\,1} & \ldots & b_{n-1,\,n} \\ \chi_0 & \chi_1 & \ldots & \chi_n \end{vmatrix} \quad (\zeta_0^* = \chi_0) \tag{2.1}$$

или рекуррентными

$$\zeta_n = A_n \left[\chi_n - \sum_{j=0}^{n-1} (\psi_n, \xi_j)\, \zeta_j\right] \tag{2.2}$$

формулами, причем $\{\chi_n\} \in H'$.

Введем линейные операторы A и B, действующие соответственно в H_A и H_B с областями значений в H и H' соответственно. Возьмем две какие-либо системы $\{\sigma_n\} \in H_A$ и $\{\tau_n\} \in H_B$ и построим системы $\{\varphi_n\} \in H$ и $\{\psi_n\} \in H'$, пользуясь формулами

$$\varphi_n = A\sigma_n, \ \psi_n = LB\tau_n, \ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.3}$$

Полагая эти системы B-линейно-независимыми, берем их в качестве исходных для построения B-систем (1.4). Затем строим систему $\{\zeta_n\} \in H'$ по формуле (2.1) с учетом (2.3), определив там систему $\{\chi_n\} \in H'$ формулой

$$\chi_n = B\tau_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.4}$$

Покажем теперь, что формальное решение уравнения (0.1) в явном виде дается формулой

$$g = \sum_{m=0}^{\infty} (f, \xi_m)\, \zeta_m = \sum_{m=0}^{\infty} (f, \xi_m^*) \frac{\zeta_m^*}{B_m B_{m-1}} \tag{2.5}$$

Действительно, на основании (2.3) и (2.4) имеем $L\chi_n = \psi_n$. Учитывая это и сопоставляя вторую формулу из (1.4) с формулой (2.1), обнаружим, что

$$L\zeta_n = \eta_n \tag{2.6}$$

Приняв это во внимание, подействуем на ряд (2.5) оператором L. В результате придем к первому ряду из (1.1).

Отметим некоторые частные реализации полученного решения (2.5). Полагая, например, в (2.3) и (2.4) $B = I$, $A = (L^*)^{-1}$ (т. е. A — обратный к сопряженному оператору L^*), $\sigma_n = \tau_n = \chi_n$ $(H_A = H_B = H' = H)$,

причем система $\{\chi_n\}$ полна в H и ортонормирована, обнаружим, что

$$(A\sigma_n,\ LB\tau_m) = (L^{*-1}\chi_n,\ L\chi_m) = (\chi_n,\ \chi_m) = \delta_{nm}$$

и, значит

$$\varphi_n = \xi_n = L^{*-1}\chi_n, \qquad \psi_n = \eta_n = L\chi_n$$

Принимая это во внимание, обнаружим, что формула (2.5) переходит в известную (см. [4], стр. 373)

$$g = \sum_{m=0}^{\infty} (f, L^{*-1}\chi_m)\,\chi_m \tag{2.7}$$

Если же принять

$$A = L,\ B = I,\ \sigma_n = \tau_n = \chi_n,\ H_A = H_B = H' \tag{2.8}$$

то на основании (2.3) будет иметь $\varphi_n = \psi_n = L\chi_n$, а сопоставление формул (1.4) и (2.1) приведет к равенствам $L\zeta_n = \xi_n = \eta_n$. При этом формула (2.5) для решения уравнения (0.1) примет вид

$$g = \sum_{m=0}^{\infty} (f, L\zeta_m)\,\zeta_m \tag{2.9}$$

Эта формула из других соображений указана И. В. Козиным [5].

Еще один важный частный случай получим, положив в (1.2) — (1.4) и (2.1) — (2.4)

$$A = B = I,\ \ \sigma_n = \tau_n = \chi_n = \varphi_n,\ \ H_A = H_B = H' = H \tag{2.10}$$

и приняв оператор L симметрическим [6], что приведет к равенствам

$$\zeta_n = \xi_n,\ \ L\xi_n = \eta_n \tag{2.11}$$

Следовательно, решение уравнения (0.1) в этом случае принимает вид

$$g = \sum_{m=0}^{\infty} (f, \xi_m)\,\xi_m \tag{2.12}$$

и совпадает с формулой С. Г. Михлина (см. [7], стр. 90), полученной им другим путем.

Наконец, полагая в (2.1) — (2.4) и (1.2) — (1.4)

$$A = I,\ B = L^*,\ \tau_n = \sigma_n = \varphi_n,\ H_A = H_B = H' = H \tag{2.13}$$

приходим к равенствам

$$\chi_n = L^*\varphi_n,\ \eta_n = LL^*\xi_n,\ L\zeta_n = \eta_n \tag{2.14}$$

причем можно показать, что в этом случае формула (2.5) для решения уравнения (0.1) представляет собой явную запись схемы Энскога [8], предложенной им для решения интегральных уравнений Фредгольма.

Заметим еще, что если

$$(f, \xi_m) = 0, \quad m > N$$

то вместо ряда (2.3) имеем

$$g = \sum_{m=0}^{N} (f, \xi_m)\,\zeta_m$$

Это будет иметь место, например, в случае, когда

$$f = \sum_{j=0}^{N} a_j \psi_j \quad (\psi_j = LB\tau_j) \tag{2.15}$$

где a_j — произвольные постоянные, так как из построения первой системы из (1.4) следует, что $(\psi_j, \xi_m) = 0$ при $j < m$.

3. В качестве примера на применение изложенных построений рассмотрим плоскую контактную задачу о вдавливании штампа с симметричным профилем $b(x)$ без угловых точек в упругую полуплоскость. Она, как известно [9], сводится к решению интегрального уравнения (3.1) с удовлетворением условий (3.2)

$$\int_{-a}^{a} \ln \frac{1}{|x-\xi|} p(\xi)\, d\xi = c - b(x), \quad |x| \leqslant a \tag{3.1}$$

$$\int_{-a}^{a} p(x)\, dx = P, \quad p(\pm a) = 0 \tag{3.2}$$

Здесь $p(x)$ — искомое контактное напряжение, P — заданная величина прижимающей силы, $2a$ — искомая длина области контакта, c — произвольная постоянная (от нее можно избавиться, если в (3.1) положить $x = 0$ и полученный результат вычесть из (3.1)). В результате замен

$$x = as, \ \xi = a\sigma, \ f(s) = -b(as), \ q(\sigma) = ap(a\sigma) \tag{3.3}$$

вместо (3.1) можем записать

$$Lg = \int_{-1}^{1} \ln \left| \frac{\sigma}{\sigma - s} \right| \sqrt{1-\sigma^2}\, g(\sigma)\, d\sigma = f(s), \quad |s| \leqslant 1 \tag{3.4}$$

Здесь вместо неизвестной функции $q(s)$ введена непрерывная при $-1 \leqslant s \leqslant 1$ функция $g(s)$, связанная с ней формулой

$$q(s) = \sqrt{1-s^2}\, g(s) \tag{3.5}$$

что позволяет удовлетворить заранее второму условию из (3.2), первое же приобретает вид

$$\int_{-1}^{1} q(s)\, ds = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-s^2}\, g(s)\, ds = P \tag{3.6}$$

Для полученной частной реализации уравнения (0.1) в качестве пространства H' возьмем $L^2(-1,1)$, а в качестве H — пространство $L_w^2(-1,1)$ со скалярным произведением вида

$$(g, f) = \int_{-1}^{1} (1-s^2)^{-1/2} g(s) f(s)\, ds$$

Чтобы воспользоваться формулой (2.5) для решения интегрального уравнения (3.4), необходимо зафиксировать элементы в (2.3) и (2.4). Будем

там полагать

$$(3.7)\qquad A = I,\quad H_A = H = L^2_w(-1,1),\quad B = I,\quad H_B = H' = L^2(-1,1)$$

$$\tau_n = \chi_n = U_n(s),\quad \varphi_n = \sigma_n = t_n(s) = \begin{cases} -4T_0(s)\pi^{-2}, & n = 0 \\ 4n\pi^{-2}T_n(s), & n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

где $T_n(s)$ и $U_n(s)$ — многочлены Чебышева первого и второго рода. При этом

$$\psi_m = LU_m = \int_{-1}^{1} \ln\left|\frac{\sigma}{\sigma - s}\right| \sqrt{1-\sigma^2}\, U_m(\sigma)\, d\sigma$$

Вычисляя последний интеграл с помощью формулы

$$\int_{-1}^{1} \ln\frac{1}{|\sigma - s|}\frac{U_m(\sigma)\,d\sigma}{(1-\sigma^2)^{-1/2}} =$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{(m-1)!\,\pi}{2^{-m-2}(2m+1)!!} P_{m+2}^{-3/2,\,-3/2}(s), & m \geqslant 1 \\ {}^1/_4\pi\,[2\ln 2 - T_2(s)], & m = 0 \end{cases}$$

вытекающей из результатов работы [10], будем иметь

$$(3.8)\qquad \psi_0 = LU_0 = \frac{\pi}{4}[T_2(0) - T_2(s)] = -\frac{\pi s^2}{2}$$

$$\psi_m = LU_m =$$

$$= \frac{(m-1)!\,\pi}{2^{-m-2}(2m+1)!!}\,[P_{m+2}^{-3/2,\,-3/2}(0) - P_{m+2}^{-3/2,\,-3/2}(s)],\quad m \geqslant 1$$

Содержащийся здесь многочлен Якоби можно выразить через многочлены Чебышева по формуле

$$4P_{m+2}^{-3/2,\,-3/2}(s) = \frac{\Gamma({}^3/_2 + m)}{\sqrt{\pi}\,(m+1)!}\left(\frac{m}{m+2}T_{m+2}(s) - T_m(s)\right),$$

$$m = 0, 1, 2, \ldots$$

если воспользоваться известными рекуррентными формулами (см. [11], стр. 1050).

Займемся теперь построением B-систем (1.4). С этой целью вычислим скалярное произведение

$$(\varphi_n, \psi_m) = \int_{-1}^{1} \frac{t_n(s)}{\sqrt{1-s^2}}\,ds \int_{-1}^{1} \ln\left|\frac{\sigma}{\sigma - s}\right| \sqrt{1-\sigma^2}\, U_m(\sigma)\,d\sigma$$

путем изменения порядка интегрирования и использования соотношения [10]

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \ln\frac{1}{|s-\sigma|}\frac{T_n(s)}{\sqrt{1-s^2}}\,ds = \begin{cases} \ln 2 \cdot T_0(\sigma), & n = 0 \\ n^{-1}T_n(\sigma), & n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Последующий учет формулы

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-\sigma^2}\, U_m(\sigma)\, T_n(\sigma)\,d\sigma = \frac{\pi}{4}\delta_{n,m} - \frac{\pi}{4}\delta_{n-1,m+1},\quad n \geqslant 1$$

приводит к результату

$$(3.9)\qquad \begin{aligned}&(\varphi_n, \psi_m) = (t_n, \psi_m) = \delta_{m,n} - \delta_{m+1,n-1}, \quad n \geqslant 1\\ &(\varphi_0, \psi_m) = (t_0, \psi_m) = \lambda_m, \quad m = 0, 1, 2, \ldots\\ &\lambda_0 = 1, \quad \lambda_m = -\frac{(m-1)!\,2^{m+4}}{(2m+1)!!} P_{m+2}^{-3/2,\,-3/2}(0)\end{aligned}$$

Последнюю формулу можно записать еще и так:

$$(3.10)\qquad \lambda_{2m-1} = 0, \quad \lambda_{2m} = (-1)^m \frac{(2m-1)!\,2^{2m+1}\,(3/4)_m (5/4)_m}{(4m+1)!!(m+1)!(1/2)_m}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

если воспользоваться формулой

$$(-1)^m P_{2m}^{\alpha,\alpha}(0) = \frac{(1/2+\alpha/2)_m (1+\alpha/2)_m}{(1+\alpha)_m\, m!}$$

Для ее получения следует воспользоваться производящей функцией для многочленов Якоби $P_n^{\alpha,\beta}(x)$ при $\alpha = \beta$ [11].

Займемся вычислением определителей (1.2), (1.4) и (2.1). Хотя в разбираемом случае не выполняется полностью условие (1.6), тем не менее с помощью приводимых ниже операций удается до конца вычислить указанные определители.

Расписав определитель (1.2) с учетом (3.9) и раскрыв его по элементам нижней строки, обнаружим, что

$$B_{2m+1} = B_{2m}, \quad B_{2m} = \lambda_{2m} + B_{2m-2}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots; \quad B_{-2} = 0$$

и, следовательно, с учетом (3.10)

$$(3.11)\qquad B_{2m+1} = B_{2m} = \sum_{j=0}^{m} \lambda_{2j} =$$

$$= 1 + \sum_{j=1}^{m} \frac{(-1)^j (2j-1)!\,2^{2j+1}\,(3/4)_j (5/4)_j}{(4j+1)!!(j+1)!(1/2)_j}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

Раскрывая первый определитель из (1.4) при $n = 2m$ ($m = 0, 1, 2, \ldots$) по элементам крайнего столбца, обнаружим на основании (3.9), что

$$(3.12)\qquad \xi_{2m}^*(s) = B_{2m-2} t_{2m} + \xi_{2m-2}^* = \sum_{j=1}^{m} B_{2j-2} t_{2j}(s) + \xi_0^*, \quad m = 1, 2, \ldots$$

$$\xi_0^* = \varphi_0 = t_0(s)$$

При нечетных $n = 2m + 1$ рассматриваемые определители в силу (3.9) приводятся к треугольному виду (путем очевидных линейных комбинаций столбцов). Соответствующие вычисления дают

$$(3.13)\qquad \xi_{2m+1}^*(s) = B_{2m} \sum_{j=0}^{m} t_{2j+1}(s), \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

Вторые определители из (1.4) при условии (3.9) и для нечетных $n = 2m + 1$ легко вычисляются

$$(3.14)\qquad \eta_{2m+1}^*(s) = B_{2m} \psi_{2m+1}(s), \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

В случае же $n = 2m$ следует сперва путем линейной комбинации верхней и нижней строк сделать последний член верхней строки нулевым, после чего алгебраическое дополнение последнего члена нижней строки привести к треугольному виду. В результате, учитывая (3.11), придем к формуле

$$\eta_{2m}^*(s) = B_{2m-2}\psi_{2m} - \lambda_{2m}\sum_{j=0}^{m-1}\psi_{2j}, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{3.15}$$

$$\eta_0^* = \psi_0(s)$$

Очевидно, что определители (2.1) получаются из рассмотренных определителей заменой ψ_m на $\chi_m = U_m(s)$, т. е.

$$\zeta_{2m}^*(s) = B_{2m-2}U_{2m}(s) - \lambda_{2m}\sum_{j=0}^{m-1}U_{2j}(s) = B_{2m-2}U_{2m}(s) - \tag{3.16}$$

$$-\frac{\lambda_{2m}}{2}(1-s^2)^{-1}[1 - T_{2m}(s)], \quad m = 1, 2, \ldots$$

$$\zeta_0^* = \chi_0 = U_0(s); \quad \zeta_{2m+1}^*(s) = B_{2m}U_{2m+1}(s), \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

Подстановка полученных здесь формул (3.11) — (3.16) в формулу (2.5) позволяет выписать с учетом (3.5) решение интегрального уравнения (3.4) в явном виде

$$q(s) = \sqrt{1-s^2}\sum_{m=0}^{\infty}\int_{-1}^{1}\frac{\xi_m^*(\sigma)f(\sigma)}{\sqrt{1-\sigma^2}}d\sigma\,\frac{\zeta_m^*(s)}{B_mB_{m-1}} \tag{3.17}$$

Отметим важный (для контактных задач [9]) частный случай решенного уравнения (3.4), когда правая часть имеет вид

$$f(s) = \sum_{j=1}^{N} b_j s^{2j}$$

В этом случае на основании (3.8) ее можно выразить через линейную комбинацию функций $\psi_{2j}(s)$, т. е. приходим к случаю (2.15), и ряд (3.17), дающий решение интегрального уравнения (3.4), переходит в конечную сумму.

В частности, при действии на упругую полуплоскость параболического штампа, когда [9]

$$f(s) = -\gamma a^2 s^2 \quad (\gamma = \text{const})$$

в ряде (3.17) следует оставить только первый член, и на основании (3.11) — (3.16) и (3.7) будем иметь

$$q(s) = \frac{2\gamma a^2}{\pi}\sqrt{1-s^2}$$

Подстановка этого выражения под знак интеграла в (3.6) приводит к формуле для определения размеров площадки контакта: $\gamma a^2 = P$, совпадающей с известной.

4. Коснемся вопроса строгого обоснования полученного формального решения (2.5) уравнения (0.1). Видно, что выполнение, например, таких условий: а) системы элементов (2.3) B-линейно-независимы, б) оператор L определен всюду в H' и непрерывен там, в) сходится в H первый ряд из (1.1) к элементу f, г) сходится в H ряд (2.5), является достаточным для строгого

обоснования полученного решения. При этом для проверки выполнения условия а) полезна

Теорема 2. Если система $\{\varphi_n\}$ линейно-независима, а система $\{\psi_n\}$ выражается формулами

$$\psi_n = K\varphi_n, \; n = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.1}$$

и для оператора K (действующего из H' в H) в области его определения имеет место неравенство

$$(f, Kf) > 0, \quad f \neq 0 \tag{4.2}$$

(т. е. оператор K — положительный [6]), то системы $\{\varphi_n\}$ и $\{\psi_n\}$ B-линейно-независимы.

Для доказательства подставим в (4.2) произвольный элемент вида

$$f = \sum_{j=0}^{n} c_j\varphi_j \quad \left(\sum_{j=0}^{n} c_j^2 \neq 0\right) \tag{4.3}$$

и воспользовавшись (4.1), получим

$$(f, Kf) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} (\psi_j, \varphi_k)\, c_j c_k > 0 \tag{4.4}$$

При этом здесь гарантируется строгое неравенство для любого элемента вида (4.3), так как случай $f = 0$ исключается условием линейной независимости системы $\{\varphi_n\}$. Полученное же неравенство (4.4) свидетельствует, что B-матрица порождает положительную квадратичную форму, а это, как известно [12], влечет строгую положительность ее последовательных главных миноров, которые в рассматриваемом случае совпадают с B-определителями. Теорема доказана.

Согласно этой теореме, условие а) в случае (2.13) будет выполнено, если уравнение $L^*g = 0$ имеет только нулевое решение, так как тогда $\psi_n = LL^*\varphi_n$ и, значит

$$(f, LL^*f) = (L^*f, L^*f) > 0, \; L^*f \neq 0 \; (f \neq 0) \tag{4.5}$$

и в качестве L достаточно взять, например, оператор Фредгольма, т. е.

$$L = I - \lambda K \tag{4.6}$$

(K — вполне непрерывный оператор) и исключить значения λ, совпадающие с собственными значениями оператора L.

Для случая (2.10) выполнение условия а) в силу доказанной теоремы будет выполнено, если сам оператор L будет положительным, т. е. для него будет выполнено неравенство (4.2). Такая ситуация может быть реализована, например, когда оператор интегральный и порождается ядром вида

$$L(x, y) = \int_{\Omega} \rho(t)\, l(x, t)\, l(y, t)\, d\Omega \tag{4.7}$$

$$\rho(t) \geqslant 0 \quad (x, y, t \in \Omega)$$

Ограничившись случаями (2.10) и (2.13), выясним выполнимость условия в). В этих случаях имеет место равенство (4.1), только в первом слу-

чае $K = L$, а во втором $K = LL^*$, т. е. в обоих случаях операторы K симметрические и обладают свойством (4.2). Можно проверить, что для таких операторов, если система $\{\varphi_n\}$ выбрана полной, то полной будет и система $\{\psi_n\}$, причем будут полны в H и порождаемые системами $\{\varphi_n\}$ и $\{\psi_n\}$ B-системы (1.4).

Заметим далее, что определенный всюду в H симметрический оператор ограничен [6] и, значит, в силу известного предложения (см. [2], стр. 438) система $\{\xi_n\}$ бесселева, так как K — ограниченный симметрический положительный оператор и переводит, согласно (2.11) и (2.14), систему $\{\xi_n\}$ в сопряженную ей систему $\{\eta_n\}$.

Известно (см. [13], стр. 221, 289), что симметрические операторы, обладающие свойством (4.2), имеют обратные тоже симметрические операторы. Последние будут определены всюду в H, если оператор L считать фредгольмовым, т. е. представленным в виде (4.6). Действительно, в случае (2.13), когда $K^{-1} = (LL^*)^{-1} = L^{*-1}L^{-1}$, это следует из того, что при λ, не совпадающем с собственным значением, уравнения $Lg = f$ и $L^*g = f$ имеют единственное решение для любого $f \in H$. В случае же (2.10), когда $K^{-1} = L^{-1}$, предположение положительности L, сделанное для выполнения условия а), влечет (см. [14], стр. 352) его симметричность и положительность его собственных значений. Следовательно, и здесь, если в представлении (4.6) считать $\lambda < 0$, K^{-1} всюду определен в H, так как уравнение $Lg = f$ имеет единственное решение для любого $f \in H$.

Таким образом (см. [6], стр. 136), в обоих случаях K^{-1} — ограниченный симметрический оператор, причем в силу (2.11) и (2.14) справедливо соотношение $\xi_n = K^{-1}\eta_n$. Отсюда следует, что система $\{\xi_n\}$ не только бесселева, но и гильбертова (см. [2], стр. 439), и, значит, $\{\xi_n\}$, $\{\eta_n\}$ — системы Рисса — Фишера (см. [2], стр. 440). Последнее же влечет существование таких постоянных M и N, что для любого $f \in H$

$$\sum_{m=0}^{\infty} (f, \xi_m)^2 \leqslant M^2 \| f \|^2, \quad \sum_{m=0}^{\infty} (f, \eta_m)^2 \leqslant N^2 \| f \|^2 \tag{4.8}$$

Эти неравенства позволяют доказать слабую [6] сходимость рядов (1.1) в H, которая в разбираемом случае эквивалентна сходимости их к f в H (см. [6], стр. 310).

Действительно, для слабой сходимости, например первого ряда из (1.1), к f в силу слабой полноты [6] гильбертова пространства H достаточно показать ограниченность последовательностей $(f^{(n)}, g)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, где g — любой элемент из H, $f^{(n)}$ — частные суммы рядов из (1.1), что легко осуществляется с помощью неравенств (4.8).

Проверим теперь выполнение последнего условия г). В случае (2.10) сходимость ряда (2.5) или, точнее, ряда (2.12) следует из того, что он переходит на основании равенств

$$(L = L^*) \quad (f, \xi_m) = (Lg, \xi_m) = (g, L\xi_m) = (g, \eta_m)$$

в один из биортогональных рядов (1.1), сходимость которых для любого элемента из H доказана. Сходимость же ряда (2.5) в случае (2.13) можно

показать, если учесть, что система $\{\xi_n\}$ в данном случае ортонормирована и имеют место неравенства (4.8).

Итак, полученное формальное решение (2.5) уравнения (0.1) удается обосновать в случае (2.13), если оператор L фредгольмов, т. е. представим в виде (4.6), в случае же (2.10) нужно требовать дополнительно его положительность, для чего достаточно (см. [14], стр. 352) считать в (4.6) $\lambda < 0$ и K самосопряженным.

Строгое обоснование формулы (2.5) в общем случае наталкивается на необходимость располагать более тонкими свойствами B-систем.

Поступила 28 VI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Попов Г. Я.* Точное решение задачи о колебаниях защемленной по контуру пластинки. Докл. АН СССР, 1977, т. 233, № 5.
2. *Качмаж С., Штейнгауз Г.* Теория ортогональных рядов. М., Физматгиз, 1958.
3. *Бейтман Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции (функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены). М., «Наука», 1966.
4. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М., «Наука», 1965.
5. *Козин И. В.* Метод решения уравнения $f = Au$. Тр. Ленингр. ин-та авиац. приборостроения, 1967, вып. 54.
6. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М., «Наука», 1966.
7. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М., «Наука», 1970.
8. *Трикоми Ф.* Интегральные уравнения. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
9. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости. М.— Л., Гостехиздат, 1949.
10. *Попов Г. Я.* Об одном замечательном свойстве многочленов Якоби. Укр. матем. ж., 1968, т. 20, № 4.
11. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
12. *Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г.* Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. М.— Л., Гостехиздат, 1950.
13. *Вулих Б. З.* Введение в функциональный анализ. М., «Наука», 1967.
14. *Рудин У.* Функциональный анализ. М., «Мир», 1975.