Прикладная математика и механика. Том 43, 1979

УДК 539.3

МЕТОД ОРТОГОНАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ НА ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ В ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧАХ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В. Я. Терещенко

(Ростов-на-Дону)

Предлагается новый метод решения трехмерных краевых задач линейной теории упругости, связанный с принципом Кастильяно. Построение решения сводится к определению проекции элемента, удовлетворяющего в области уравнению теории упругости и граничному условию на свободной части границы, в подпространство граничных значений решений краевой задачи теории упругости с неоднородными естественными граничными условиями.

1. Постановка задачи. Схема метода. Принцип Кастильяно, к которому сводится метод ортогональных проекций в задачах теории упругости [1], состоит в том, что из всех тензоров напряжений, удовлетворяющих в области уравнениям равновесия и граничному условию на свободной части границы, наименьшую потенциальную энергию деформации сообщает телу тензор упругих напряжений, что выражается неравенством

$$\|\mathbf{R}^*\|_\Sigma^2 = \|\mathbf{R}_0\|_\Sigma^2 + \|\mathbf{R}^* - \mathbf{R}_0\|_\Sigma^2 \geqslant \|\mathbf{R}_0\|_\Sigma^2 \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{R}^*$ — произвольный тензор напряжений, удовлетворяющий уравнениям равновесия упругой среды и граничному условию на свободной части границы; $\mathbf{R}_0$ — тензор упругих напряжений; Σ — гильбертово пространство, образующее множество тензоров с конечным интегралом энергии. Это пространство разложимо [1] в ортогональную сумму $\Sigma = \Sigma_1 \oplus \oplus \Sigma_2$, где Σ_1 — подпространство тензоров $\mathbf{R}'$, связанных с вектором перемещений $\mathbf{u}'$, удовлетворяющим граничному условию на закрепленной части границы; Σ_2 — подпространство тензоров $\mathbf{R}''$, связанных с вектором перемещений $\mathbf{u}''$, удовлетворяющим однородным уравнениям равновесия и граничному условию на свободной части границы. Тогда имеет место условие ортогональности тензоров $(\mathbf{R}', \mathbf{R}'')_\Sigma = 0$ и $\mathbf{R}^* = \mathbf{R}' + \mathbf{R}''$, $\mathbf{R}' \in \Sigma_1$, $\mathbf{R}'' \in \Sigma_2$.

Произвольный вектор перемещений $\mathbf{u}^*(x)$, связанный с тензором R^*, удовлетворяющий уравнению теории упругости $\mathbf{Au}^* = \mathbf{K}$ и граничному условию на свободной части границы S, представим [2] в виде суммы $\mathbf{u}^*(x) = \mathbf{u}_0(x) + \boldsymbol{\varphi}_0(x)$, где $\mathbf{u}_0(x)$ — энергетическое решение основной краевой задачи теории упругости, а вектор $\boldsymbol{\varphi}_0(x)$ — решение дополнительной краевой задачи

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\varphi}_0 = 0 \text{ в } G, \quad \mathbf{t}^{(\nu)}(\boldsymbol{\varphi}_0)|_S = \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*)|_S \tag{1.2}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{u} \equiv - \sum_{i,k,l,m=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} [c_{iklm}(x)\, \varepsilon_{lm}(\mathbf{u})]\, \mathbf{x}_k^{(0)}, \quad x \in G$$

$$\varepsilon_{lm}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_l}\right), \quad l, m = 1, 2, 3$$

$$\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}) = \sum_{i,k,l,m=1}^{3} c_{iklm}(x)\, \varepsilon_{lm}(\mathbf{u}) \cos(\nu, x_i)\, \mathbf{x}_k^{(0)}$$

Здесь A — дифференциальный оператор анизотропной теории упругости; $c_{iklm}(x)$ — коэффициенты анизотропии среды, удовлетворяющие условиям симметрии [1]; $\varepsilon_{lm}(\mathbf{u})$ — составляющие тензора деформаций; $x_k^{(0)}$ = орт оси x_k; $G \subset E_3$ — ограниченная область, занимаемая упругой средой, с границей S — двумерной достаточно гладкой поверхностью; $\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u})$ — вектор напряжений, действующих на площадку поверхности S.

Решение неоднородной второй задачи (1.2) теории упругости будем понимать в обобщенном смысле как вектор $\varphi_0 \in W_2^1(G)$, удовлетворяющий интегральному тождеству

$$2 \int_G W(\varphi_0, \mathbf{u})\, dG - J_S(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*) = 0, \quad \forall \mathbf{u} \in W_2^1(G) \tag{1.3}$$

$$W(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \sum_{i,k,l,m=1}^{3} c_{iklm}\varepsilon_{lm}(\mathbf{u})\, \varepsilon_{ik}(\mathbf{v}), \quad J_S(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{v})\, ds$$

Здесь $W(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ — положительно-определенная квадратичная форма относительно составляющих тензора упругих деформаций. В (1.3) использована формула Бетти [1], обоснованная в силу того [3], что при $\mathbf{u} \in W_2^1(G)$ и $\mathbf{A}\mathbf{u} \in L_2(G)$ след $\partial\mathbf{u}/\partial\nu \in W_2^{-1/2}(S)$ ($\partial/\partial\nu$ — производная по внешней к S нормали ν) определен единственным образом. При выполнении условий

$$\int_S \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*)\, ds = \int_S \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*) \cdot \mathbf{r}\, ds = 0 \tag{1.4}$$

$$\int_G \varphi_0\, dG = \int_G \operatorname{rot} \varphi_0\, dG = 0 \tag{1.5}$$

нуль не является собственным числом задачи (1.2) [2] и оператор $(\mathbf{A}, \mathbf{t}^{(\nu)})$ является изоморфизмом из $W_2^1(G)$ на $L_2(G) \times W_2^{-1/2}(S)$, т. е. задача (1.2) имеет единственное решение в смысле (1.3) для любого вектора $\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*) \in W_2^{-1/2}(S)$, удовлетворяющего (1.4).

Построение метода ортогональных разложений на границе области сводится к построению подпространства следов $W(S) \subset W_2^{1/2}(S)$, в котором следы $\mathbf{u}_0|_S$ и $\varphi_0|_S$, обращающие в нуль поверхностный интеграл J_S в (1.3), при всех граничных условиях задач теории упругости ортогональны. ($W_2^{1/2}(S)$ — пространство Соболева — Слободецкого, $W_2^{-1/2}(S)$ — его двойственное [3,4]).

Задача построения такого пространства сводится к задаче построения оснащения основного пространства $W_0 = L_2(S) = (L_2(S))'$ (штрих означает двойственность) двойственной парой пространств следов $W \subset$

$\subset W_0 \subset W'$, для которого оператор $\mathbf{T}$, порожденный граничной формой J_S как отношением двойственности на $W_2^{1/2}(S) \times W_2^{-1/2}(S)$ (которое в силу непрерывных и плотных вложений $W_2^{1/2}(S) \subset L_2(S) \subset W_2^{-1/2}(S)$ есть расширение скалярного произведения в $L_2(S)$), является изометрией из W на W'. Последняя определяется по известной теореме Рисса соотношением [5]

$$(1.6)\qquad (\mathbf{u}, \mathbf{v})_W = (\mathbf{u}, \mathbf{T}\mathbf{v})_{W_0} = (\mathbf{T}\mathbf{u}, \mathbf{T}\mathbf{v})_{W'}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$$

Тогда из свойств оператора $\mathbf{T}$ вытекают предпосылки к методу ортогональных разложений на границе области. Если $\mathbf{T} = \mathbf{T}_0$, где $\mathbf{T}_0$ — каноническая [изометрия из $W_2^{1/2}(S)$ на $W_2^{-1/2}(S)$, то оператор $\mathbf{T}^*\mathbf{T}$ — тождественный оператор, отображающий $W_2^{1/2}(S)$] на себя. Если же $\mathbf{T}$ — частичная изометрия из $W_2^{1/2}(S)$ в $W_2^{-1/2}(S)$ (оператор называется частично изометрическим, если он изометричен на ортогональном дополнении к своему ядру [5]), то оператор $\mathbf{T}^*\mathbf{T}$ есть проектор на подпространство $(\ker \mathbf{T})^\perp$ — начальное пространство частичной изометрии [5] — и $\mathbf{T}$ — унитарное отображение $(\ker \mathbf{T})^\perp$ на $W_2^{-1/2}(S)$ $(\ker \mathbf{T} : \mathbf{u} \in W_2^{1/2}(S) \mid \mathbf{T}\mathbf{u} = 0)$. В этом случае имеет место ортогональное разложение пространства $W_2^{1/2}(S)$

$$(1.7)\qquad W_2^{1/2}(S) = \ker \mathbf{T} \oplus (\ker \mathbf{T})^\perp, \quad \dim\ker \mathbf{T} < \infty$$

Подпространство $(\ker \mathbf{T})^\perp$ является подпространством $W(S)$ граничных значений векторов φ_0 — решений дополнительной задачи (1.2). Тогда из ортогонального разложения пространства $W_2^{1/2}(S)$ следует метод решения основной краевой задачи теории упругости для $\mathbf{u}_0(x)$, являющийся основой метода ортогональных разложений на границе области. Пусть $\mathbf{u}^*(x)$ — произвольный вектор, удовлетворяющий в области G уравнению теории упругости $\mathbf{A}\mathbf{u}^* = \mathbf{K}$ ($\mathbf{K}(x)$ — вектор объемных сил) и граничному условию на свободной части поверхности S, такой, что $\mathbf{u}^*|_S \in W_2^{1/2}(S)$. Проектируя вектор $\mathbf{u}^*$ на подпространство $(\ker \mathrm{T})^\perp = W$ и вычитая проекцию $\mathbf{T}^*\mathbf{T}\mathbf{u}^* = \varphi_0$ из вектора $\mathbf{u}^*$, получим $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}^* - \varphi_0$. Следовательно, в области G элемент $\mathbf{u}_0$ удовлетворяет уравнению $\mathbf{A}\mathbf{u}_0 = \mathbf{K}$, а на границе S имеет место условие $\mathbf{u}_0|_S = (\mathbf{u}^* - \varphi_0)|_S \in \ker \mathbf{T}$. Здесь включение понимается в смысле $(\mathbf{T}\mathbf{u}_0, \mathbf{v})_{0,S} = 0$, $\forall \mathbf{v} \in W$, следовательно, $\mathbf{T}\mathbf{u}_0 = 0$ и так как $\mathbf{T}$ — унитарное отображение $W(S)$ на $W_2^{-1/2}(S)$, то $\mathbf{u}_0 \mid_S = 0$.

Таким образом, задача построения метода ортогональных разложений на границе области сводится к доказательству следующих вспомогательных предложений:

а) оператор $\mathbf{T}$ есть частичная изометрия из $W_2^{1/2}(S)$ в $W_2^{-1/2}(S)$;

б) начальное пространство этой частичной изометрии есть подпространство граничных значений решений дополнительной задачи (1.2).

Отметим, что изложенные построения имеют точки соприкосновения с абстрактной схемой метода ортогональных проекций решения краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка [1]. В частности, общим является условие применимости метода ортогональных проекций, т. е. положительный оператор представим в виде произведения двух] сопряженных операторов. Как будет показано ниже, таким произведением является $\mathbf{T}^*\mathbf{T}$. Некоторые аналогии имеются также с работой [6].

2. Построение пространства $W(S) = W_2^{*1/2}(S)$. Докажем предложения а) и б), сформулированные в п. 1.

Пусть вектор-функции u и v удовлетворяют в области G уравнению $\mathbf{Av} = 0$. Тогда, согласно формуле Бетти [1], получим

$$(2.1)\qquad 2\int_G W(\mathbf{u},\mathbf{v})\,dG = J_S(\mathbf{u},\mathbf{v})$$

Отсюда следует, что граничная билинейная форма $J_S(\mathbf{u},\mathbf{v})$ симметрична и если вектор-функции u и v удовлетворяют условию (1.5), то соответствующая квадратичная форма $J_S(\mathbf{u},\mathbf{u})$ будет положительна. По теореме Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве [7] для билинейной формы $\langle \mathbf{u}, \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{v})\rangle = J_S(\mathbf{u},\mathbf{v})$ (угловые скобки обозначают отношение двойственности на $W_2^{1/2}(S)\times W_2^{-1/2}(S)$), которая раздельно непрерывна в силу обобщенного неравенства Шварца $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{v})\rangle| \leqslant \|\mathbf{u}\|_{1/2,S}\|\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{v})\|_{-1/2,S}$, имеет место представление

$$(2.2)\qquad J_S(\mathbf{u},\mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{Tv})_{0,S},\quad \forall \mathbf{u}\in W_2^{1/2}(S)$$

Здесь T — некоторый линейный непрерывный оператор, определенный на всем пространстве $W_2^{1/2}(S)$ и действующий в $W_2^{-1/2}(S)$, такой, что

$$\|\mathbf{Tv}\|_{-1/2,S} = \|\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{v})\|_{-1/2,S} \leqslant c\|\mathbf{v}\|_{1/2,S},\quad c>0$$

Тогда из компактности вложения $W_2^{1/2}(S)$ в $W_2^{-1/2}(S)$ следует компактность оператора T и из симметричности билинейной формы $J_S(\mathbf{u},\mathbf{v})$ и положительности квадратичной $J_S(\mathbf{u},\mathbf{u})$ вытекает, что оператор T симметричен и положителен. Для ограниченного оператора T определим гильбертов сопряженный оператор T*, действующий из $W_2^{-1/2}(S)$ в $W_2^{1/2}(S)$, равенством

$$(\psi, \mathbf{T}\varphi)_{-1/2,S} = (\mathbf{T}^*\psi, \varphi)_{1/2,S},\quad \forall\psi\in W_2^{-1/2}(S),\quad \varphi\in W_2^{1/2}(S)$$

Полагая $\psi = \mathbf{Tv}\in W_2^{-1/2}(S)$, $\varphi = \mathbf{u}\in W_2^{1/2}(S)$, получим

$$(2.3)\qquad (\mathbf{T}^*\mathbf{Tv}, \mathbf{u})_{1/2,S} = (\mathbf{Tv}, \mathbf{Tu})_{-1/2,S}$$

Лемма 1. Оператор T*T, действующий в $W_2^{1/2}(S)$, самосопряжен и положителен.

Доказательство следует из того, что область определения $D(\mathbf{T}^*\mathbf{T}) = W_2^{1/2}(S)$ и оператор T замкнут и положителен.

Определим на вектор-функциях $\mathbf{u},\mathbf{v}\in W_2^{-1/2}(S)$ новое скалярное произведение

$$(2.4)\qquad [\mathbf{u},\mathbf{v}]_{1/2,S} = (\mathbf{u}, \mathbf{T}^*\mathbf{Tv})_{1/2,S}$$

с нормой $|\mathbf{u}|_{1/2,S} = \{[\mathbf{u},\mathbf{u}]_{1/2,S}\}^{1/2}$. Так как определен модуль оператора T в виде $|\mathbf{T}| = \sqrt{\mathbf{T}^*\mathbf{T}}$, то скалярное произведение можно определить также следующим образом:

$$(2.5)\qquad [\mathbf{u},\mathbf{v}]_{1/2,S} = (|\mathbf{T}|\mathbf{u}, |\mathbf{T}|\mathbf{v})_{1/2,S}$$

Полученное таким образом гильбертово пространство, которое, как следует из (2.5), изометрично пространству $W_2^{1/2}(S)$, обозначим $W_2^{*1/2}(S)$.

Из изометричности пространств $W_2^{*1/2}(S)$ и $W_2^{1/2}(S)$ следует, что пространство, сопряженное к $W_2^{*1/2}(S)$, есть $W_2^{-1/2}(S)$. Из (2.3) и (2.4) вытекает, что пространства $W_2^{*1/2}(S)$ и $W_2^{-1/2}(S)$ изометричны

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}]_{1/2, S} = (\mathbf{Tu}, \mathbf{Tv})_{-1/2, S}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in W_2^{*1/2}(S)$$

Следовательно, оператор $\mathbf{T}: W_2^{*1/2}(S) \to W_2^{-1/2}(S)$ изометричен и унитарен в силу обратимости (ядро оператора $\mathbf{T}$ на $W_2^{*1/2}(S)$: $\ker \mathbf{T} = \{0\}$). Таким образом, построенное пространство $W_2^{*1/2}(S)$ является подпространством следов $\mathbf{u}\mid_S \in W_2^{1/2}(S)$, для которых граничная форма $J_S(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ положительна. Из результатов п. 1 следует, что этому подпространству принадлежат граничные значения $\varphi_0\mid_S$ решений φ_0 дополнительной задачи (1.2) в смысле (1.3).

Из теоремы о полярном разложении ограниченных операторов [5] следует, что для оператора $\mathbf{T}$, действующего из $W_2^{1/2}(S)$ в $W_2^{-1/2}(S)$, имеет место полярное разложение $\mathbf{T} = \mathbf{U}\mid\mathbf{T}\mid$, где $\mid\mathbf{T}\mid = \sqrt{\mathbf{T^*T}}$ — положительный оператор, действующий в $W_2^{1/2}(S)$, а $\mathbf{U}$ — частичная изометрия из $W_2^{1/2}(S)$ в $W_2^{-1/2}(S)$, однозначно определяемая условием $\ker \mathbf{U} = \ker \mathbf{T}$. Так как оператор $\mathbf{T}$ обратим, то в приведенном разложении оператор $\mathbf{U}$ унитарен [5].

Лемма 2. В полярном разложении $\mathbf{T} = \mathbf{U}\mid\mathbf{T}\mid$ оператор $\mathbf{U} = \mathbf{T}_0$, где $\mathbf{T}_0$ — каноническая изометрия $W_2^{1/2}(S)$ на $W_2^{-1/2}(S)$.

Доказательство вытекает из того факта, что операторы $\mathbf{U}$ и $\mathbf{T}_0$ изометрически отображают область значений оператора $\mid T\mid$: $\operatorname{Ran}\mid\mathbf{T}\mid = W_2^{*1/2}(S)$ на $W_2^{-1/2}(S)$ и, следовательно, имеют место представления

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}]_{1/2, S} = (\mathbf{u}, U\mathbf{v})_{0, S}, \quad [\mathbf{u}, \mathbf{v}]_{1/2, S} = (\mathbf{u}, T_0\mathbf{v})_{0, S}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in W_2^{*1/2}(S)$$

Рассматривая эти равенства совместно, получим, что $\mathbf{U} = \mathbf{T}_0$. На основании полярного разложения $\mathbf{T} = \mathbf{T}_0\mid\mathbf{T}\mid$ доказываются предложения а), б), сформулированные в п. 1.

Теорема 1. Оператор $\mathbf{T}$ есть частичная изометрия из пространства $W_2^{1/2}(S)$ в пространство $W_2^{-1/2}(S)$, удовлетворяющая условию $\ker \mathbf{T} = \ker \mathbf{T}_0$ с начальным пространством $(\ker \mathbf{T})^\perp = W_2^{*1/2}(S)$.

Доказательство следует из того, что на вектор-функциях $\mathbf{u} \in \operatorname{Ran}\mid\mathbf{T}\mid = W_2^{*1/2}(S)$ имеет место равенство $\mathbf{Tu} = \mathbf{T}_0\mathbf{u}$ и, доопределяя оператор T_0 на ортогональное дополнение $(\operatorname{Ran}\mid\mathbf{T}\mid)^\perp$ нулем, в силу равенств $(\operatorname{Ran}\mid\mathrm{T}\mid)^\perp = \ker\mid\mathbf{T}\mid$ (следующего из самосопряженности оператора $\mid\mathbf{T}\mid = \mid\mathrm{T}\mid^*$) и $\ker \mathbf{T} = \ker\mid\mathbf{T}\mid$ получим $\ker \mathbf{T} = \ker \mathbf{T}_0 = (\operatorname{Ran}\mid\mathbf{T}\mid)^\perp$.

Следствие. Имеет место ортогональное разложение (1.7) пространства $W_2^{1/2}(S)$ и оператор $\mathbf{T^*T}$ есть проектор на $W_2^{*1/2}(S)$.

Так как пространства $W_2^{*1/2}(S)$ и $W_2^{-1/2}(S)$ изометричны, то по теореме Рисса имеет место соотношение (см. (1.6))

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}]_{1/2, S} = (\mathbf{u}, \mathbf{Tv})_{0, S} = (\mathbf{Tu}, \mathbf{Tv})_{-1/2, S}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in W_2^{*1/2}(S) \tag{2.6}$$

Отсюда и из (2.2) следует равенство

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}]_{1/2, S} = J_S(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in W_2^{*1/2}(S) \tag{2.7}$$

Из равенства (2.7) следует, что

1°. В краевых задачах теории упругости билинейную форму $J_S(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in W_2^{*1/2}(S)$ можно рассматривать как обобщение дробного скалярного произведения в пространстве $W_2^{1/2}(S)$;

2°. Если векторы $\mathbf{u} \in W_2^{1/2}(S)$ и $\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{v}) \in W_2^{-1/2}(S)$ обращают в нуль интеграл $J_S(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, то векторы $\mathbf{u}|_S$ и $\mathbf{v}|_S$ ортогональны в метрике пространства следов $W_2^{*1/2}(S)$.

3. Ортогональные разложения на границе области в задачах теории упругости. Сформулируем условие ортогональности следов $\mathbf{u}'|_S$ и $\mathbf{u}''|_S$ векторов перемещений $\mathbf{u}'$ и $\mathbf{u}''$, связанных с тензорами $\mathbf{R}'$ и $\mathbf{R}''$ и обращающих в нуль граничный интеграл $J_S(\mathbf{u}', \mathbf{u}'')$, в метрике $W_2^{*1/2}(S)$. Докажем некоторые вспомогательные предложения.

Лемма 3. Пусть $P \subseteq W_2^{1/2}(S)$ — замкнутое подпространство следов векторов $\mathbf{u}'$. Тогда линейное множество функционалов

$$P^{\perp} = \{\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}'') \in W_2^{-1/2}(S) \,|\, \langle \mathbf{u}', \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}'')\rangle = 0, \quad \forall \mathbf{u}' \in P\}$$

есть замкнутое подпространство пространства $W_2^{-1/2}(S)$.

Пусть $\{\mathbf{t}_n^{(\nu)}(\mathbf{u}'')\}$ — последовательность в $P^{\perp}$, для которой $\|\mathbf{t}_n^{(\nu)}(\mathbf{u}'') - \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}'')\|_{-1/2,\, S} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ и $\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}'') \in W_2^{-1/2}(S)$, тогда $|\langle \mathbf{u}', \mathbf{t}_n^{(\nu)}(\mathbf{u}'') - \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}'')\rangle| \leqslant \|\mathbf{u}'\|_{1/2,\, S} \|\mathbf{t}_n^{(\nu)}(\mathbf{u}'') - \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}'')\|_{-1/2,\, S} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Следовательно $\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}'') \in P^{\perp}$.

Назовем $P^{\perp}$ ортогональным дополнением к P в $W_2^{-1/2}(S)$.

Лемма 4. Линейное множество

$$P^{\oplus} = \{\mathbf{u}'' \in W_2^{*1/2}(S) \,|\, [\mathbf{u}', \mathbf{u}'']_{1/2,\, S} = 0, \quad \forall \mathbf{u}' \in P\}$$

есть замкнутое подпространство пространства $W_2^{*1/2}(S)$ и является гильбертовым ортогональным дополнением к P в $W_2^{*1/2}(S)$.

Лемма 4 доказывается аналогично лемме 3.

Лемма 5. Связь между подпространствами $P^{\oplus}$ и $P^{\perp}$ двойственной пары $W_2^{*1/2}(S) \times W_2^{-1/2}(S)$ устанавливается согласно соотношению $P^{\perp} = \mathbf{T}P^{\oplus}$, где $\mathbf{T}$ — изометрия $W_2^{*1/2}(S)$ на $W_2^{-1/2}(S)$.

Действительно, так как в силу равенств (2.6) и (2.7)

$$[\mathbf{u}', \mathbf{u}'']_{1/2,\, S} = (\mathbf{u}', \mathbf{T}\mathbf{u}'')_{0,\, S} = \langle \mathbf{u}', \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}'')\rangle, \quad \forall \mathbf{u}' \in W_2^{*1/2}(S)$$

то $\mathbf{u}'' \in P^{\oplus}$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{T}\mathbf{u}'' \in P^{\perp}$, т. е. когда $\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}'') \in P^{\perp}$.

Подпространство P будем трактовать как подпространство граничных условий для векторов перемещений $\mathbf{u}'$ на закрепленной части поверхности S; подпространство $P^{\oplus}$ трактуется как подпространство граничных значений векторов $\mathbf{u}''$, удовлетворяющих в области G однородному уравнению теории упругости $\mathbf{A}\mathbf{u}'' = 0$ и граничному условию на свободной части поверхности.

Теорема 2. Если векторы $\mathbf{u}'|_S \in P$, $\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}'') \in P^{\perp}$, т. е. ортогональны в смысле $\langle \mathbf{u}', \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}'')\rangle = 0$, то векторы $\mathbf{u}'|_S \in P$, $\mathbf{u}''|_S \in P^{\oplus}$, т. е. ортогональны в смысле $[\mathbf{u}', \mathbf{u}'']_{1/2,S} = 0$.

Теорема 2 вытекает из лемм 3 — 5.

Следствие. Для разложения $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}_0 + \varphi_0$ (см. п. 1) имеет место условие ортогональности $[\mathbf{u}_0, \varphi_0]_{1/2, S} = 0$.

Теорема 3. Произвольный вектор перемещений $\mathbf{u}^*$, удовлетворяющий уравнению теории упругости $\mathbf{A}\mathbf{u}^* = \mathbf{K}$ и граничному условию на свободной части поверхности S, такой, что $\mathbf{u}^*|_S \in W_2^{1/2}(S)$, представим на границе S в виде $\mathbf{u}^*|_S = \mathbf{u}'|_S + \mathbf{u}''|_S$, $\mathbf{u}'|_S \in P$, $u''|_S \in P^{\oplus}$.

Пусть связанный с $\mathbf{u}^*(x)$ вектор напряжений $\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*)$ обращается в нуль на свободной части поверхности S. Пусть $\mathbf{u}'$ — вектор упругих перемещений, тогда $\mathbf{u}'|_S \in P$ и $\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}') \in P^{\perp}$. Положим $\mathbf{u}'' = \mathbf{u}^* - \mathbf{u}'$. Тогда вектор $\mathbf{u}''$ удовлетворяет однородному уравнению теории упругости. Покажем, что $\mathbf{u}''|_S \in P^{\oplus}$. Действительно, так как при граничных условиях задач теории упругости имеет место соотношение $\langle \mathbf{u}', \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*)\rangle = J_S(\mathbf{u}', \mathbf{u}^*) = 0$, то в силу леммы 3 вектор $\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*) \in P^{\perp}$. Тогда вектор $\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}'') = \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*) - \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}') \in P^{\perp}$. Отсюда в силу леммы 5 следует $\mathbf{u}''|_S \in P^{\oplus}$.

Следствие. Из теорем 2, 3 следует ортогональное разложение

$$W_2^{*1/2}(S) = P \oplus P^{\oplus}.$$

Так как $\mathbf{T}$ — ограниченный оператор из $W_2^{1/2}(S)$ в $W_2^{-1/2}(S)$, то выражение $(\mathbf{u}, \mathbf{T}\mathbf{v})_{0,S}$, $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in W_2^{1/2}(S)$ является билинейным непрерывным функционалом в $W_2^{1/2}(S)$. Тогда однозначно определяется ограниченный линейный оператор $\mathbf{T}^{\otimes}$, также отображающий $W_2^{1/2}(S)$ в $W_2^{-1/2}(S)$, для которого $(\mathbf{u}, \mathbf{T}\mathbf{v})_{0,S} = (\mathbf{T}^{\otimes}\mathbf{u}, \mathbf{v})_{0,S}$, $\forall \mathbf{v} \in W_2^{1/2}(S)$. Оператор $\mathbf{T}^{\otimes}$ будем называть обобщенно-сопряженным к оператору $\mathbf{T}$. Если $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W_2^{*1/2}(S)$, то из равенства (2.6) следует $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]_{1/2, S} = (\mathbf{u}, \mathbf{T}\mathbf{v})_{0,S} = (\overset{\otimes}{\mathbf{T}}\mathbf{u}, \mathbf{v})_{0,S}$, т. е. оператор $\mathbf{T}$, определенный на $W_2^{*1/2}(S)$, обобщенно самосопряжен $\mathbf{T} = \mathbf{T}^{\otimes}$ (оператор $\mathbf{T}^{\otimes}$ имеет смысл самосопряженного расширения по Фридрихсу оператора $\mathbf{T}$).

Лемма 6. $(\mathrm{Ran}\,\mathbf{T})^{\perp} = \ker \mathbf{T}$.

Доказательство леммы следует из изложенного выше (см., например, [5]).

Конкретизируем теперь подпространства P и $P^{\oplus}$ для первой и второй граничных задач теории упругости [1].

Первая граничная задача: $\mathbf{u}'|_S = \mathbf{u}_0|_S = 0$; тогда $P = \{0\}$ и, следовательно, $\langle \mathbf{u}', \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}'')\rangle = (\mathbf{u}', \mathbf{T}\mathbf{u}'')_{0,S} = 0$, $\forall \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}'') \in W_2^{-1/2}$, т. е. $P^{\perp} = W_2^{-1/2}$. Тогда из леммы 6 следует $\mathbf{u}' \in (\mathrm{Ran}\,\mathbf{T})^{\perp} = \ker \mathbf{T} = P = \{0\}$, а из $P^{\oplus} = \mathbf{T}^{-1}P^{\perp}$ следует $P^{\oplus} = W_2^{*1/2}(S) = (\ker \mathbf{T})^{\perp}$. Следовательно, векторы $\mathbf{u}'' = \varphi_0$, $\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}'') = \mathbf{t}^{(\nu)}(\varphi_0)$ не подчинены на S никаким граничным условиям, так как вся граница закреплена.

Вторая граничная задача: $\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}'')|_S = \mathbf{t}^{(\nu)}(\varphi_0)|_S = 0$; тогда $P^{\perp} = \{0\}$ и $\langle \mathbf{u}', \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}'')\rangle = (\mathbf{u}', \mathbf{T}\mathbf{u}'')_{0,S} = 0$, $\forall \mathbf{u}' \in W_2^{1/2}$, т. е. $P = W_2^{1/2}(S)$ (действительно, вектор $\mathbf{u}' = \mathbf{u}_0$ в случае второй граничной задачи не подчинен никаким граничным условиям). Из соотношения $P^{\oplus} = \mathbf{T}^{-1}P^{\perp}$ и леммы 6 следует $\mathbf{u}'' \in P^{\oplus} = \{0\} = \ker \mathbf{T}$, следовательно, вектор $\mathbf{u}'' = \varphi_0 = 0$ на S.

Действительно, если $\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*)|_S = 0$, то из интегрального тождества (1.3) следует равенство нулю объемного интеграла для всех векторов $\mathbf{u} \in W_2^1(G)$ (таких, что $\varepsilon_{lm}(\mathbf{u}) \neq 0$). Тогда $\varphi_0 = \mathrm{const}$, т. е. φ_0 — вектор малого жесткого смещения тела без деформаций, что невозможно, так как постоянная, удовлетворяющая условию (1.5), тождественно равна нулю.

В заключение укажем на связь изложенного с принципом Кастильяно, которая заключается в том, что нормы векторов напряжений $\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*)$, $\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}_0)$, $\mathbf{t}^{(\nu)}(\varphi_0)$, действующих на поверхности S, связаны между собой неравенством, аналогичным (1.1). Действительно, из ортогональности следов $\mathbf{u}_0|_S$ и $\varphi_0|_S$ в метрике $W_2^{*^{1/2}}(S)$ и равенства (2.6) следует ортогональность в метрике $W_2^{-1/2}(S)$ элементов $\mathbf{T}\mathbf{u}_0$ и $\mathbf{T}\varphi_0$. Тогда в силу равенства $\|\mathbf{T}\mathbf{u}\|_{-1/2,S} = \|\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u})\|_{-1/2,S}$ имеет место неравенство

$$\|\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*)\|^2_{-1/2,S} = \|\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}_0)\|^2_{-1/2,S} + \|\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*) - \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}_0)\|^2_{-1/2,S} \geqslant \geqslant \|\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}_0)\|^2_{-1/2,S}$$

4. Построение решения основных краевых задач теории упругости. Первая задача $\mathbf{A}\mathbf{u}_0 = \mathbf{K}$ в G, $\mathbf{u}_0|_S = 0$.

1°. Из результатов п. 3 для первой задачи следует $P = \{0\}$, $P^\oplus = W_2^{*^{1/2}}(S)$. Тогда, используя схему метода, изложенную в п. 1, решение $\mathbf{u}_0$ получаем, проектируя вектор $\mathbf{u}^*$ на подпространство $P^\oplus = W_2^{*^{1/2}}(S)$ и вычитая проекцию из вектора $\mathbf{u}^* : \mathbf{u}_0 = \mathbf{u}^* - \Pi\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^* - \varphi_0$, где $\Pi = \mathbf{T}^*\mathbf{T}$ — ортопроектор на $W_2^{*^{1/2}}(S)$ (см. следствие теоремы 1). Следовательно, на границе $\mathbf{u}_0|_S \in P = \{0\}$.

2°. Как следует из п. 1, вектор φ_0 является решением дополнительной задачи (1.2) в смысле (1.3), удовлетворяя при этом условию (1.5). Построим проекцию $\varphi_0 = \Pi\mathbf{u}^*$. Пусть $\{\psi_i\}_{i=1}^{i=\infty}$ — система линейно-независимых, достаточно гладких вектор-функций, таких, что ψ_i удовлетворяют уравнению $\mathbf{A}\psi_i = 0$ в области G и условию

$$\int_G \psi_i dG = 0$$

Ортонормируем систему $\{\psi_i\}$ по энергии второй граничной задачи:

$$\frac{\psi_i}{|\psi_i|_{H_2}} = \psi_i^\circ, \quad [\psi_i^\circ, \psi_k^\circ]_{H_2} = 2\int_G W(\psi_i^\circ, \psi_k^\circ)dG = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases} \tag{4.1}$$

Действительно [1], выражение

$$\left\{2\int_G W(\mathbf{u})dG\right\}^{1/2}$$

на $\mathbf{u} \in W_2^1(G)$, удовлетворяющих (1.5), есть энергетическая норма второй граничной задачи теории упругости.

Подчиним систему $\{\psi_i^\circ\}$ условию полноты по энергии второй задачи [1]. Тогда, так как ψ_i° удовлетворяют $\mathbf{A}\psi_i^\circ = 0$, то в силу равенств (2.1), (2.7) и (4.1) система $\{\psi_i^\circ\}$ ортонормирована и полна в метрике пространства $W_2^{*^{1/2}}(S)$. Построим проекцию

$$\varphi_0 = \Pi\mathbf{u}^* = \sum_{i=1}^{\infty}[\mathbf{u}^*, \psi_i^\circ]_{1/2,S}\psi_i^\circ = \sum_{i=1}^{\infty} J_S(\mathbf{u}^*, \psi_i^\circ)\psi_i^\circ$$

так что $\varphi_0|_S \in P^\oplus$, тогда $u_0|_S = (\mathbf{u}^* - \varphi_0)|_S \in P = \{0\}$.

3°. Вектор $\varphi_{0i} = J_S(\mathbf{u}^*, \psi_i^\circ)\psi_i^\circ$, $i = 1, 2, \ldots$ удовлетворяет интегральному тождеству (1.3). Действительно, из (1.3) получим

$$J_S(\mathbf{u}^*, \psi_i^\circ)\cdot 2\int_G W(\psi_i^\circ, \mathbf{u})\,dG - J_S(\mathbf{u}^*, \mathbf{u}) = 0, \quad \forall \mathbf{u}\in W_2^1(G)$$

Положим здесь $\mathbf{u} = \psi_i^\circ$, $i = 1, 2, \ldots$ и, учитывая (4.1), получим тождество.

4°. Покажем, что вектор $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}^* - \varphi_0$ является решением первой задачи теории упругости. Для этого достаточно убедиться, что $\mathbf{u}_0$ есть энергетическое решение этой задачи. Выполнение граничного условия $\mathbf{u}_0|_S = 0$ следует из $\mathbf{u}_0|_S \in P = \{0\}$. Вектор $\mathbf{u}^*$, являясь решением уравнения $\mathbf{A}\mathbf{u}^* = \mathbf{K}$, удовлетворяет интегральному тождеству [2]:

$$2\int_G W(\mathbf{u}^*, \mathbf{u})\,dG - J_S(\mathbf{u}^*, \mathbf{u}) = \int_G \mathbf{K}\mathbf{u}\,dG, \quad \forall \mathbf{u}\in W_2^1(G).$$

Вектор φ_0 удовлетворяет (1.3), следовательно, вектор $\mathbf{u}_0$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$2\int_G W(\mathbf{u}_0, \mathbf{u})\,dG = \int_G \mathbf{K}\mathbf{u}\,dG, \quad \forall \mathbf{u}\in W_2^1(G)$$

которое при $\mathbf{u} \in H_1 \subset W_2^1(G)$ (H_1 — энергетическое пространство первой задачи теории упругости [1]) является обобщенным уравнением Эйлера — Лагранжа для функционала энергии первой задачи [1].

Вторая задача: $\mathbf{A}\mathbf{u}_0 = \mathbf{K}$ в G, $\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}_0)|_S = 0$. Для второй задачи $P = W_2^{1/2}(S)$, $P^\oplus = \{0\}$. Из $P^\oplus = \{0\}$ следует, что $\varphi_0|_S = 0$ и вектор φ_0 как решение задачи $\mathbf{A}\varphi_0 = 0$, $\mathbf{t}^{(\nu)}(\varphi_0)|_S = 0$ ($\mathbf{t}^{(\nu)}(\varphi_0)|_S = \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*)|_S = 0$ — условие на свободной поверхности S) тождественно равен нулю. Тогда $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}^* - \varphi_0 = \mathbf{u}^*$ и, следовательно, $\mathbf{A}\mathbf{u}_0 = \mathbf{K}$ в G; на границе $\mathbf{u}_0|_S \in P = W_2^{1/2}(S)$. Отсюда следует, что решением второй задачи может служить сам вектор $\mathbf{u}^*$, так как $\mathbf{A}\mathbf{u}^* = \mathbf{K}$, $\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u})^*|_S = 0$.

Третья задача: $\mathbf{A}\mathbf{u}_0 = \mathbf{K}$ в G, $\mathbf{u}_0|_{S_1} = 0$, $\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}_0)|_{S_2} = 0$.

Решением этой задачи является вектор

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}^* - \sum_{i=1}^{\infty}[\mathbf{u}^*, \psi_i^\circ]_{1/2, S_1}\psi_i^\circ = \mathbf{u}^* - \sum_{i=1}^{\infty} J_{S_1}(\mathbf{u}^*, \psi_i^\circ)\psi_i^\circ$$

(здесь проектор $\Pi_1 = \mathbf{T}_1^*\mathbf{T}_1$ определяется только интегралом по S_1). Следовательно, $\mathbf{u}_0|_{S_1} = (\mathbf{u}^* - \varphi_0)|_{S_1} \in P_{S_1} = \{0\}$, при этом вектор $\mathbf{u}^*$ и координатные функции ψ_i нужно дополнительно подчинить условию $\mathbf{t}^{(\nu)}(\psi_i)|_{S_1} = 0$.

Как следует из [8], вектор $\mathbf{u}^*$ может быть принят равным

$$\mathbf{u}^*(x) = \int_G \mathbf{V}\mathbf{K}\,dG$$

где $\mathbf{V}$ — тензор Сомильяна [8].

Поступила 23 X 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М., «Наука», 1970.
2. *Терещенко В. Я.* Обобщение метода Трефтца для пространственных задач теории упругости. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1976, т. 16, № 4.
3. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Е.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., «Мир», 1971.
4. *Слободецкий Л. Н.* Обобщенные пространства С. Л. Соболева и их приложения к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных. Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та, 1958, т. 197.
5. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы, ч. 2. Спектральная теория. М., «Мир», 1966.
6. *Вишик М. И.* Метод ортогональных и прямых разложений в теории эллиптических дифференциальных уравнений. Матем. сб., 1949, т. 25, № 2.
7. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М., «Наука», 1966.
8. *Михлин С. Г.* Проблема минимума квадратичного функционала. М.— Л., Гостехиздат, 1952.