

ВАРИАЦИОННО-АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

В. Л. Бердичевский

(Москва)

Предлагается метод исследования функционалов, содержащих малый параметр. Этим методом по функционалу трехмерной теории упругости строятся функционал первого приближения физически и геометрически нелинейной теории оболочек и функционалы уточненных теорий оболочек.

1. Вариационно-асимптотический метод. Пусть на некотором множестве M элементов u определен функционал $I(u, h)$, зависящий от малого параметра h , и ищутся стационарные точки $I(u, h)$ на M . Эту задачу можно попытаться упростить следующим образом.

Построим функционал I_0 , отбросив в $I(u, h)$ все малые в асимптотическом смысле члены, и обозначим через M_0 множество его стационарных точек. Если множество M_0 состоит из одного элемента, то естественно ожидать, что этот элемент представляет первое приближение к одной из стационарных точек. Однако в рассматриваемых дальше задачах множество M_0 содержит много элементов даже в том случае, когда исходный функционал имеет на M единственную стационарную точку. Фиксируем какой-нибудь элемент $u_0 \in M_0$ и будем искать u в виде $u = u_0 + u'$, где u' в асимптотическом смысле меньше u_0 . Оставим в функционале $I(u_0 + u', h)$ только главные в асимптотическом смысле члены по u' и главный перекрестный член между u_0 и u' . Получим функционал $I'(u_0, u', h)$. Если стационарная точка функционала I' единственна, то u' определится через u_0 и h . В принципе, однако, при нахождении u' может возникнуть произвол: $u' = u'(u_0, u_1, h)$, где u_1 пробегает некоторое множество M_1 . Далее ищем u в виде $u = u_0 + u'(u_0, u_1, h) + u''$, где u'' в асимптотическом смысле меньше u' , и аналогично предыдущему находим u'' через u_0, u_1 . Как правило, начиная с некоторого шага, произвол исчезает, и все решение определяется по некоторому набору элементов u_0, u_1, \dots, u_s .

Обозначим через v часть разложения $u = u_0 + u' + u'' + \dots$, в которой появлялись новые произволы, через N — подмножество M , которое пробегает элементы v , когда u_0 пробегает M_0 , u_1 пробегает M_1, \dots , через v' — первую поправку к v : $u = v + v'$ (v' не содержит новых произволов и определяется через v : $v' = v'(v, h)$).

Рассмотрим задачу об отыскании стационарных точек функционала $I(u, h)$ на N . Эта задача, вообще говоря, проще исходной, так как мно-

жество N уже чем M . Если она «разумна» (например стационарная точка находится единственным образом) и $I(u + v'(u, h), h)$ мало отличается от $I(u, h)$ на N , то можно ожидать, что стационарные точки $I(u, h)$ на N представляют первое приближение к стационарным точкам $I(u, h)$. Если $I(u + v'(u, h), h)$ отличается от $I(u, h)$ на N на конечную величину, а учет v'' вносит малый вклад, то первое приближение дают стационарные точки функционала $I(u + v'(u, h), h)$. В противном случае надо рассмотреть следующие приближения.

Во многих задачах множество N можно угадать. Тогда множество M представляется в виде суммы $M = N + N'$ ($u = v + v'$, $v \in N$, $v' \in N'$), v фиксируется, в функционале $I(v + v', h)$ отбрасываются малые члены и ищется стационарная точка по v' . Далее по общей схеме строятся поправки к $v'(v, h)$ и функционалы первого и последующих приближений.

Иногда при оценках встречается затруднение, связанное с тем, что порядок искомых функций заранее неизвестен и относительно отдельных слагаемых неясно, нужно ли сохранять их в рассматриваемом приближении. В этих случаях следует отбросить сначала подобные члены, найти порядки искомых функций и затем определить порядок отброшенных членов. Если отброшенные члены оказались меньше учтенных, то можно рассчитывать, что приближение построено правильно. В противном случае их необходимо удерживать.

Для построения уточненной теории, учитывающей поправки порядка $\varepsilon(h)$, в функционале надо сохранить все члены порядка $\varepsilon(h)$ по сравнению с единицей.

Поясним это утверждение на примере задачи о минимуме на линейном пространстве M квадратичного функционала $I(u, h)$ вида

$$\begin{aligned} I(u, h) &= E(u, u, h) - L(u, h) \\ E(u, v, h) &= E_0(u, v) + \varepsilon_1(h) E_1(u, v) + \varepsilon_2(h) E_2(u, v) + \dots \\ L(u, h) &= L_0(u) + \varepsilon_1(h) L_1(u) + \varepsilon_2(h) L_2(u) + \dots, \quad \varepsilon_2 = o(\varepsilon_1) \end{aligned}$$

Здесь $E(u, v, h)$ — симметричный, билинейный по u, v функционал, $L(u, h)$ — линейный функционал, $E_0(u, u)$ — положительно-определенный функционал.

Первое приближение u_0 — точка минимума функционала $I_0 = E_0(u, u) - L_0(u)$. Элемент u_0 удовлетворяет уравнениям Эйлера: для любого элемента w из M

$$(1.1) \quad 2E_0(u_0, w) - L_1(w) = 0$$

Представим u в виде $u = u_0 + u'$. Оставляя в $I(u, h)$ главный член, содержащий u' , и главный перекрестный член между u_0 и u' и используя равенство $2E_0(u_0, u') - L_1(u') = 0$, вытекающее из (1.1), для определения u' получим задачу о минимуме функционала

$$I' = E_0(u', u') + 2\varepsilon_1(h) E_1(u_0, u') - \varepsilon_1(h) L_1(u')$$

После замены $u' = \varepsilon_1(h) z$ она сводится к задаче о минимуме функционала $\varepsilon_1^{-2}(h) I' = E_0(z, z) + 2E_1(u_0, z) - L_1(z)$, не зависящего от малого параметра. Таким образом, $u' \sim \varepsilon_1(h)$, и для построения решения с точностью до $\varepsilon_1(h)$ нужно удерживать в функционале члены порядка $\varepsilon_1(h)$.

Ниже вариационно-асимптотический метод применен к проблеме вывода двумерной теории оболочек из трехмерной теории упругости (из

работ, посвященных этой теме, отметим [1-20]). Решение трехмерной задачи зависит от малого параметра существенно различным образом на краю и во внутренней части оболочки. Поэтому функционал энергии разбивается на сумму двух функционалов — краевого и внутреннего и для каждого из них строится свой итерационный процесс. В результате энергия оболочки складывается из энергии, распределенной по срединной поверхности, и энергии, сосредоточенной на краю.

Построено четыре приближения: классическая теория, имеющая погрешность $\varepsilon + h_* + h_{**}$ (ε — масштаб деформаций, $h_* = h/R_0$, R_0 — характерный радиус кривизны, $h_{**} = h/l$, l — характерный масштаб изменения напряженного состояния), уточненная теория, в которой сохранены члены порядка h_{**} , уточненная теория, в которой сохранены члены порядка h_* и h_{**} , и приближение, в котором удержаны поправки порядка h_* , h_{**} и h_{**}^2 .

Классическая теория рассмотрена в случае неоднородности, анизотропии и физической нелинейности, следующие приближения — для однородных, изотропных, физически линейных оболочек.

Энергия, распределенная по срединной поверхности, в уточненной теории отличается от классического выражения перекрестными членами между тензорами растяжения и изгиба. В приближении, учитывающем поправки порядка h_{**}^2 , добавляется энергия поперечного сдвига и две дополнительные искомые функции, описывающие сдвиг. В этом отношении оно напоминает теорию Рейсснера — Нахди.

Краевой энергией в классической теории можно пренебречь. В следующих приближениях учет краевой энергии существен. Краевая энергия вычислена в работе в приближении, позволяющем учесть поправки порядка h_* и h_{**} . Показано, что в более высоких приближениях краевая энергия нагруженного края зависит от самоуравновешенной части нагрузки. В прикладных задачах, как правило, самоуравновешенная часть нагрузки неизвестна, поэтому краевая энергия не определена и применение теорий, описывающих поправки порядка h_{**}^2 (сюда относятся теории, учитывающие поперечный сдвиг), лишено смысла. Исключение представляют замкнутые оболочки, а также оболочки со свободным и жесткозаделанным краем, для которого краевая энергия находится однозначно.

Краевая энергия описывает влияние погранслоя на внутреннее напряженное состояние. Оно изучалось впервые А. Л. Гольденвейзером [3]. Идея о краевой энергии была высказана Койтером и Хейденом [16, 18]. Ими из физических соображений была указана энергия свободного края изотропной оболочки. Для свободного края истинная энергия краевой области меньше, чем энергия, вычисленная по двумерной теории оболочек. Поэтому в [16, 18] энергия оболочки была представлена в виде разности энергии, распределенной по всей срединной поверхности (включая краевую область), и некоторого положительного интеграла по границе срединной поверхности. Построенный таким образом функционал оказывается невыпуклым и неограниченным снизу. В связи с этим можно указать задачи, которые либо не имеют решения, либо имеют неединственное решение (см. п. 8).

В рассмотренной ниже теории энергия складывается из суммы энергии внутренней части оболочки и энергии краевого стержня. Соответствующая задача представляет,

по существу, задачу сопряжения внутренней части оболочки и краевого стержня с одинаковыми упругими характеристиками. Это позволяет устранить отмеченный дефект.

Задача сопряжения приводит к крайевым условиям, содержащим производные того же порядка, что и дифференциальные уравнения. Подобные крайевые задачи возникали и в других подходах к построению уточненной теории оболочек [5].

В качестве других приложений вариационно-асимптотического метода в настоящее время известны: вывод геометрически нелинейной теории анизотропных неоднородных стержней [21], уточненной линейной теории стержней [22], уточненной теории низкочастотных колебаний оболочек [23], теории высокочастотных колебаний пластин [24] и прямых стержней [25], вывод осредненных уравнений, описывающих континуумы с периодической микроструктурой [26].

Различные редакции метода даны в [21,23]¹. Обоснование метода в работе не рассматривается, однако для гладких, строго выпуклых функционалов оно представляется вполне обзорным.

2. Постановка задачи. Рассмотрим в трехмерном пространстве R гладкую поверхность Ω_0 (под гладкостью понимается существование производных того порядка, которые дальше встретятся). Обозначим через V_0 трехмерную область, заштрихованную векторами $1/2 h n_0$, $-1/2 h n_0$, n_0 — вектор нормали к Ω_0 . Упругое тело (оболочка) занимает в недеформированном состоянии область V_0 .

Введем в V_0 криволинейную систему координат ξ^α , ξ по формулам

$$(2.1) \quad x^i = r_0^i(\xi^\alpha) + \xi n_0^i(\xi^\alpha)$$

Здесь x^i — декартовы координаты в R , $x^i = r_0^i(\xi^\alpha)$ — уравнения поверхности Ω_0 , n_0^i — компоненты вектора n_0 ; координаты ξ^α , ξ изменяются в цилиндре высотой h : $\xi^\alpha \in \Omega_0$, $|\xi| \leq h/2$; область изменения ξ^α , так же как и срединная поверхность, обозначается через Ω_0 . Координаты ξ^α , ξ обозначаются также через ξ^a , малые латинские индексы a, b, c, \dots и i, j, k, \dots присваиваются проекциям на сопутствующие оси ξ^a и оси наблюдателя x^i и пробегает значения $1, 2, 3$; сопутствующий индекс 3 иногда опускается (например $\xi = \xi^3$); малые греческие индексы пробегает значения $1, 2$ и соответствуют проекциям на оси ξ^α . Нулевой индекс отмечает величины в недеформированном состоянии.

Компоненты метрического тензора в системе координат (2.1) даются формулами]

$$(2.2) \quad \begin{aligned} g_{0\alpha\beta} &= a_{\alpha\beta} - 2\xi b_{\alpha\beta} + \xi^2 c_{\alpha\beta}, \quad g_{\alpha\alpha} = 0, \quad g_{033} = 1 \\ g_0^{\alpha\beta} &= \kappa^{-2} [(1 - 2H_0\xi)^2 a_{\alpha\beta} + 2\xi(1 - 2H_0\xi) b_{\alpha\beta} + \xi^2 c_{\alpha\beta}] \\ g_0^{\alpha 3} &= 0, \quad g_0^{33} = 1 \\ \kappa &= 1 - 2H_0\xi + K_0\xi^2 = \sqrt{\det \|g_{\alpha\beta}\|} / a_0 \\ (a_{0\alpha\beta} &= r_{0\alpha}^i r_{0\beta}^i, \quad a_0 = \det \|a_{\alpha\beta}\|, \quad r_{0\alpha}^i \equiv r_{0,\alpha}^i \\ b_{0\alpha\beta} &= n_{0i} r_{0,\alpha\beta}^i, \quad c_{0\alpha\beta} = b_{\alpha\lambda}^{\lambda} b_{0\lambda\beta} = -K_0 a_{0\alpha\beta} + 2H_0 b_{0\alpha\beta}) \end{aligned}$$

Здесь $a_{0\alpha\beta}$, $b_{0\alpha\beta}$, $c_{0\alpha\beta}$ — компоненты первой, второй и третьей квадратичных форм поверхности, запятой в индексах отмечается дифференци-

¹ См. также Бердичевский В. Л. Вариационно-асимптотический метод построения (теории оболочек. Тезисы докл. XI Всес. конф. по теории оболочек и пластин Харьков, 1977). М., 1977.

рование по ξ^α , H_0 и K_0 — средняя и гауссова кривизны Ω_0 . Жонглирование поверхностными индексами, если не оговорено противное, осуществляется при помощи метрики $a_{0\alpha\beta}$. По повторяющимся нижнему и верхнему индексам производится суммирование. Под характерным радиусом кривизны R_0 поверхности Ω_0 , следуя [8], будем понимать наилучшую постоянную в неравенствах

$$|b_{0\beta}^\alpha| \leq \frac{1}{R_0}, \quad |b_{0\beta,\gamma}^\alpha| \leq \frac{1}{R_0^2}$$

Координаты ξ^1, ξ^2 в окрестности границы Γ_0 поверхности Ω_0 выберем так, чтобы уравнение Γ_0 имело вид $\xi^1 = c = \text{const}$ и ξ^1 убывало при удалении от Γ_0 .

Будем считать, что на $S_0 = \Gamma_0 \times [-h/2, h/2]$ и Ω_\pm ($\xi = \pm h/2$) заданы мертвые поверхностные силы P_i . Тогда функции x^i (ξ^α, ξ), определяющие положения точек тела в деформированном состоянии, являются стационарными точками функционала [27]

$$(2.3) \quad I = \int_{V_0} U \kappa d\omega d\xi - \int_{\Omega_0} \{P_i x^i(\xi^\alpha, \xi) \kappa\} d\omega - \int_{S_0} P_i x^i(\xi^\alpha, \xi) d\sigma$$

$$\{A\} \equiv A|_{\xi=h/2} + A|_{\xi=-h/2}, \quad d\omega = \sqrt{a_0} d\xi^1 d\xi^2$$

Здесь $d\omega$ — элемент площади на Ω_0 , упругая энергия единицы объема U — известная функция от компонент тензора деформаций

$$(2.4) \quad 2\varepsilon_{\alpha\beta} = x_{i,\alpha} x_{i,\beta}^i - g_{0\alpha\beta}, \quad 2\varepsilon_{\alpha 3} = x_{i,\alpha} x_{i,3}^i, \quad 2\varepsilon_{33} = x_{i,3} x_{i,3}^i - 1$$

запятой перед индексом ξ обозначается дифференцирование по ξ .

Амплитуда деформаций $\varepsilon = \max_{V_0} (\varepsilon_{ab} \varepsilon^{ab})^{1/2}$ предполагается малой ($\varepsilon \ll 1$).

Требуется заменить сформулированную задачу приближенной «двумерной», в которой фигурируют функции только ξ^1, ξ^2 .

Обычно двумерную задачу можно рассматривать как результат предельного перехода $h \rightarrow 0$, в котором U и P_i зависят от h известным образом. Замена переменной $\xi = h\zeta$, $|\zeta| \leq 1/2$ делает область определения решения одинаковой при разных h . После замены параметр h войдет в функционал явно через $\varepsilon_{\alpha 3}$ и ε_{33} . Начнем изложение с этой точки зрения, однако впоследствии перейдем к более «реалистической», согласно которой h фиксировано и разложение ведется по некоторым безразмерным малым (но не бесконечно малым) параметрам.

Дело в том, что при $h \rightarrow 0$ деформации изгиба также стремятся к нулю, если деформированная срединная поверхность приходит при $h \rightarrow 0$ в некоторое предельное положение. В силу физической нелинейности материал может вести себя различным образом при $\varepsilon \sim 10^{-2}$ или $\varepsilon \sim 10^{-3}$, и формальный предельный переход $h \rightarrow 0$ может увести из физически интересной области.

Отказ от бесконечной малости параметров требует, вообще говоря, уточнения смысла символов o, O, \sim, \ll . Этот вопрос дальше не обсуждается. Отметим лишь, что в физически линейном случае возможность предельного перехода $h \rightarrow 0$ восстанавливается, и все понятия асимптотического анализа приобретают обычное содержание.

3. Первое приближение в физической линейной теории. Деформированная срединная поверхность. Введем функции

$$r^i(\xi^\alpha) = \langle x^i(\xi^\alpha, \zeta) \rangle$$

где $\langle \cdot \rangle$ — интеграл по ζ в пределах $[-1/2, 1/2]$. Поверхность Ω , заданную уравнениями $x^i = r^i(\xi^\alpha)$, назовем деформированной срединной поверхностью. Деформация срединной поверхности описывается тензорами $A_{\alpha\beta} = 1/2(a_{\alpha\beta} - a_{0\alpha\beta})$, $B_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta} - b_{0\alpha\beta}$. Будем считать, что амплитуда удлинения $\varepsilon_A = \max_{\Omega_0} (A_{\alpha\beta} A^{\alpha\beta})^{1/2}$ и амплитуда изгиба $\varepsilon_B = 1/2h \max_{\Omega_0} (B_{\alpha\beta} B^{\alpha\beta})^{1/2}$ малы по сравнению с единицей.

Характерные масштабы. Сделаем замену искоемых функций

$$(3.1) \quad x^i(\xi^\alpha, \zeta) = r^i(\xi^\alpha) + hn^i(\xi^\alpha)\zeta + hy^i(\xi^\alpha, \zeta)$$

где n^i — нормаль к Ω . Согласно определению r^i , функции $y^i(\xi^\alpha, \zeta)$ удовлетворяют ограничениям

$$(3.2) \quad \langle y^i(\xi^\alpha, \zeta) \rangle = 0$$

Формула (3.1) устанавливает взаимно-однозначное соответствие между всеми функциями $x^i(\xi^\alpha, \zeta)$ и парами $\{r^i(\xi^\alpha), y^i(\xi^\alpha, \zeta)\}$, в которых y^i подчинены условиям (3.2).

Пусть

$$y_\alpha \equiv r_\alpha^i y_i \quad (r_\alpha^i \equiv r_{,\alpha}^i), \quad y \equiv n^i y_i \\ \Delta_\alpha \equiv \max_{V_0} |y_{\alpha,\zeta}|, \quad \Delta \equiv \max_{V_0} |y_{,\zeta}|$$

В силу неравенства Виртингера [28] $|y_\alpha| \leq \Delta_\alpha$, $|y| \leq \Delta$, и если $\Delta_\alpha = \Delta = 0$, то и $y_\alpha = y = 0$.

Рассмотрим некоторую точку поверхности Ω_0 . Для достаточно малых чисел l_1, l_2 в этой точке справедливы неравенства

$$(3.3) \quad |A_{\alpha\beta,\gamma}| \leq \frac{\varepsilon_A}{l_\gamma}, \quad \frac{1}{2}h |B_{\alpha\beta,\gamma}| \leq \frac{\varepsilon_B}{l_\gamma} \\ \max_\zeta |y_{\alpha,\beta}| \leq \frac{\Delta_\alpha}{l_\beta}, \quad \max_\zeta |y_{,\alpha}| \leq \frac{\Delta}{l_\alpha}$$

Наилучшие постоянные l_1, l_2 в неравенствах (3.3) назовем характерными масштабами изменения деформаций по осям ξ^1, ξ^2 . Масштабы l_1, l_2 зависят от точки поверхности.

Характер напряженного состояния существенно связан с относительной величиной h, l_1 и l_2 . Разобьем оболочку на три части V_1, V_2 и V_3 : в V_1 отношение h к одному масштабу много меньше единицы, к другому — порядка или больше единицы, в V_2 $h/l_1 \ll 1, h/l_2 \ll 1$, в V_3 $h/l_1 \gtrsim 1, h/l_2 \gtrsim 1$. Области V_1, V_2 и V_3 в переменных ξ^α, ζ суть цилиндры. Их пересечения с Ω_0 обозначим через Ω_1, Ω_2 и Ω_3 . Индексы у областей V_1 и V_2 выбраны в соответствии с тем, что в области V_1 можно приближенно перейти от трехмерной задачи к одномерной (к стержню), в области V_2 — к двумерной. В области V_3 задача остается трехмерной. Области V_1, V_2 и V_3 зависят от h .

Предположим, что оболочка не содержит области V_3 и состоит из областей V_1 и V_2 , причем область V_1 примыкает к краю оболочки и задается уравнением $c - b \leq \xi^1 \leq c$, $b = b(\xi^2, h)$, $b \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$; в V_1 $h/l_1 \sim \sim 1$, $h/l_2 \ll 1$.

Значения l_1 и l_2 и, следовательно, относительное расположение областей V_1 , V_2 и V_3 определяются внешней нагрузкой, кинематическими краевыми условиями и геометрией поверхности Ω_0 . Сделанные предположения неявно вводят на них ряд ограничений. Например, предположение об отсутствии области V_3 исключает внешние силы, характерный масштаб изменения которых имеет порядок толщины оболочки, а также оболочки, у которых $R_0 \sim h$. Описание возникающих ограничений в явном виде тесно связано с построением оценок погрешности приближенных теорий и представляет отдельную задачу.

Обозначим через l величину, равную $\min\{l_1, l_2\}$ в Ω_2 и l_2 в Ω_1 . В предельном переходе $h \rightarrow 0$ можно подобрать такой характер изменения внешней нагрузки, что параметр $h_{**} = h/l$ будет функцией от геометрического параметра $h_* = h/R_0$. В ряде работ, по существу, принимается зависимость $h_{**} = (h_*)^{1-\theta}$, где $0 \leq \theta < 1$ — показатель изменчивости. Постулирование такой зависимости не связано с существом дела: переход от трехмерной теории к двумерной возможен и при других зависимостях, например $h_{**} = (h_*)^{1-\theta} \ln h_*$, и в тех случаях, когда параметр h_{**} вообще не связан с h_* — важно лишь, что $h_{**} \ll 1$. Дальше параметры h_* и h_{**} рассматриваются как независимые. Соответствие с обычно принимаемой терминологией можно достичь, если считать равенство $h_{**} = (h_*)^{1-\theta}$ определением показателя изменчивости θ по параметрам h_* и h_{**} .

Классификация приближений. Наличие трех малых параметров ε , h_* и h_{**} порождает большое разнообразие асимптотик. Уменьшим число возможных случаев при помощи следующих соображений. Для металлов $\varepsilon \sim 10^{-5} - 10^{-3}$ и нет смысла удерживать члены порядка ε по сравнению с единицей. Для тонких оболочек ($h_* \lesssim 10^{-2}$) слагаемые порядка h_* следует отбросить. Для оболочек средней толщины ($h_* \sim 10^{-1} \div 2 \cdot 10^{-1}$) учет поправок порядка h_* может представить интерес. Численные расчеты показывают, что двумерные теории иногда удовлетворительно работают вплоть до $h_{**} \sim 1/2$, и целесообразно строить двумерную теорию, в которой учитываются поправки порядка h_* и h_{**}^2 .

В связи с этим дальше рассмотрены следующие приближенные теории: классическая теория

$$(1 + [h_{**} + h_* + h_{**}^2 + h_{**}h_* + h_*^2 + \varepsilon + \dots])$$

основная уточненная теория

$$(1 + h_{**} + [h_* + h_{**}^2 + h_{**}h_* + h_*^2 + \varepsilon + \dots])$$

уточненная теория, учитывающая геометрическую поправку

$$(1 + h_{**} + h_* + [h_{**}^2 + h_{**}h_* + h_*^2 + \varepsilon + \dots])$$

теория с учетом поперечного сдвига

$$(1 + h_{**} + h_* + h_{**}^2 + [h_{**}h_* + h_*^2 + \varepsilon + \dots])$$

В круглых скобках указаны порядки сохраняемых и отбрасываемых по сравнению с единицей членов, последние взяты в квадратные скобки.

В отдельных частях оболочки l может быть значительно меньше R_0 , а при $l \sim (hR_0)^{1/2}$ имеем $h_* \sim h_{**}^2$. Поэтому, теория, учитывающая гео-

метрическую поправку, может претендовать на уточнение классической теории только в тех частях оболочки, где $l \gg (hR_0)^{1/2}$.

Внутренняя задача и задача о пограничном слое. Разобьем функционал I на сумму двух функционалов:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} I_1 &= h \int_{V_1} U \kappa d\omega d\zeta - \int_{S_0} P_i x^i(\xi^\alpha, \zeta) d\sigma \\ I_2 &= h \int_{V_2} U \kappa d\omega d\zeta - \int_{\Omega_2} \{P_i x^i(\xi^\alpha, \zeta) \kappa\} d\omega \end{aligned}$$

Обозначим через S_* цилиндрическую поверхность, разделяющую области V_1 и V_2 , через Γ_* — ее пересечение с Ω_0 ; $S_* = \Gamma_* \times [-1/2, 1/2]$. Зададим на S_* каким-либо образом функции $x^i(\xi^\alpha, \zeta)$

$$(3.5) \quad x^i(\xi^\alpha, \zeta) = x_*^i = r_*^i + hn_*^i \zeta + hy_*^i$$

Тогда определены задачи об отыскании стационарных точек функционалов I_2 и I_1 на множестве функций $x^i(\xi^\alpha, \zeta)$, удовлетворяющих ограничениям (3.5). Первую задачу назовем внутренней, вторую — задачей о погранслое.

Некоторые оценки. Будем обозначать через m числа, не зависящие от h и напряженного состояния. Пусть d — диаметр Ω_0 (максимальное расстояние между точками кривой Γ_0), $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ и $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ — объекты связности на Ω_0 и Ω . Будем дальше понимать под l меньшее из числа d и рассмотренной выше величины l . Имеют место оценки

$$(3.6) \quad |a_{0\alpha\beta}| \leq m, \quad |a_0^{\alpha\beta}| \leq m, \quad |\Gamma_{0\beta\gamma}^\alpha| \leq m/d, \quad |\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha| \leq m/l$$

$$(3.7) \quad \begin{aligned} h^2 C_{\alpha\beta} &\equiv 1/2 h^2 (c_{\alpha\beta} - c_{0\alpha\beta}) = h^2 b_{0(\alpha} \wedge B_{\beta)\lambda} + \\ &+ O(\varepsilon_B^2 + h_* \varepsilon_A \varepsilon_B + h_*^2 \varepsilon_A^2) \end{aligned}$$

Здесь $c_{\alpha\beta} = a^{\mu\nu} b_{\mu\alpha} b_{\nu\beta}$, круглыми скобками в индексах обозначается симметрирование: $f_{(\alpha\beta)} \equiv 1/2 (f_{\alpha\beta} + f_{\beta\alpha})$.

Пусть $\Delta_\alpha < 1$, $\Delta < 1$. Тогда можно показать, что

$$(3.8) \quad \Delta_\alpha \leq m\varepsilon, \quad \Delta \leq m\varepsilon, \quad \varepsilon_A \leq m\varepsilon, \quad \varepsilon_B \leq m\varepsilon$$

Внутренняя задача. Условие ограниченности деформаций при $h \rightarrow 0$ накладывает на внешние силы определенные ограничения. Второе слагаемое в функционале I_2 должно быть того же порядка малости, что и энергия, т. е. $\mu\varepsilon^2 h |\Omega_0|$ ($|\Omega_0|$ — площадь Ω_0), или более высокого порядка. Поэтому $P_i = O(h)$ при $h \rightarrow 0$. Устремим ε к нулю. Так как внешние поверхностные силы P_i пропорциональны деформациям, можно написать $P_i = O(\mu\varepsilon h)$. Эта оценка должна содержать безразмерный малый параметр и h следует заменить на h/l или h/R_0 . Естественно ожидать, что в оценке силы фигурирует характеристика напряженного состояния h/l . Итак, в качестве основного предположения примем, что

$$P_i = O(\mu\varepsilon h_{**}) \text{ на } \Omega_\pm.$$

Приступим к асимптотическому анализу функционала I_2 в случае

физически линейного материала,

$$(3.9) \quad 2U = \lambda (g_0^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} + \varepsilon_{33})^2 + 2\mu g_0^{\alpha\gamma} g_0^{\beta\delta} \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon_{\gamma\delta} + \\ + 2\mu \varepsilon_{33}^2 + 4\mu g_0^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha 3} \varepsilon_{\beta 3}$$

Введем продольную и поперечную упругие энергии по формулам

$$U_{\parallel} = \min_{\varepsilon_{\alpha 3}, \varepsilon_{33}} U, \quad U_{\perp} = U - U_{\parallel}$$

Простые вычисления дают

$$U_{\parallel} = \mu [\sigma (g_0^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta})^2 + g_0^{\alpha\gamma} g_0^{\beta\delta} \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon_{\gamma\delta}], \quad \sigma = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \\ U_{\perp} = 1/2 (\lambda + 2\mu) (\varepsilon_{33} + \sigma g_0^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta})^2 + 2\mu g_0^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha 3} \varepsilon_{\beta 3}$$

Оценим порядок y_{α} и y . Для этого следует принять, что функции r^i (ξ^{α}) фиксированы и найти первое приближение для y_{α} , y . Первое приближение ищется из условия стационарности функционала I_2 , в котором отброшены все малые в асимптотическом смысле члены. Поступим следующим образом. Возьмем сначала для деформаций приближенные выражения

$$(3.10) \quad \varepsilon_{\alpha 3} = A_{\alpha 3} - h B_{\alpha 3} \zeta, \quad 2\varepsilon_{33} = y_{\alpha, \zeta} + h y_{, \alpha}, \quad \varepsilon_{33} = y_{, \zeta}$$

Функции y_{α} и y войдут только в U_{\perp} . В первом приближении можно положить $\kappa = 1$, $g_0^{\alpha\beta} = a_0^{\alpha\beta}$. Члены, содержащие y_{α} , y , имеют вид

$$(3.11) \quad h \int_{\Omega_2} U_{\perp} d\omega d\zeta = h \int_{\Omega_2} J d\omega \\ J = 1/2 \langle (\lambda + 2\mu) (y_{, \zeta} + \sigma A_{\alpha}^{\alpha} - \sigma h B_{\alpha}^{\alpha} \zeta)^2 + \\ + \mu a_0^{\alpha\beta} (y_{\alpha, \zeta} + h y_{, \alpha}) (\alpha \rightarrow \beta) \rangle$$

Символом $(\alpha \rightarrow \beta)$ обозначается выражение в предыдущей скобке с индексом α , замененным на β . Работа внешних сил пока отброшена. Функционал (3.11) «не удерживает» краевых условий (3.5). Поэтому определение y_{α} , y сводится к минимизации J при ограничениях $\langle y_{\alpha} \rangle = \langle y \rangle = 0$. Минимум J равен нулю и достигается на функциях

$$(3.12) \quad y_{\alpha} = 1/2 \sigma h A_{\beta, \alpha}^{\beta} (\zeta^2 - 1/12) - 1/6 \sigma h^2 B_{\beta, \alpha}^{\beta} \zeta (\zeta^2 - 1/4) \\ y = -\sigma A_{\alpha}^{\alpha} \zeta + 1/2 \sigma h B_{\alpha}^{\alpha} (\zeta^2 - 1/12)$$

Следовательно, $y \sim \varepsilon_A + \varepsilon_B$, $y_{\alpha} \sim h_{**} (\varepsilon_A + \varepsilon_B)$. Проверим теперь, допустимо ли было использование приближенных выражений для деформаций и отбрасывание работы внешних сил. Полные выражения для деформаций запишем в виде (две черты в индексах обозначают ковариантное дифференцирование на Ω , точка с запятой — ковариантное дифференцирование на Ω_0)

$$(3.13) \quad \varepsilon_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} - h B_{\alpha\beta} \zeta + h^2 C_{\alpha\beta} \zeta^2 + h (y_{(\alpha \parallel \beta)} - b_{\alpha\beta} y) - \\ - h^2 b_{(\alpha}{}^{\mu} y_{\mu \parallel \beta)} \zeta + h^2 c_{\alpha\beta} y \zeta + 1/2 h^2 (y_{, \alpha} + b_{\alpha\lambda} a^{\mu\lambda} y_{, \lambda}) (\alpha \rightarrow \beta) + \\ + 1/2 h^2 a^{\mu\nu} (y_{\mu \parallel \alpha} - b_{\mu\alpha} y) (y_{\nu \parallel \beta} - b_{\nu\beta} y) \\ 2\varepsilon_{\alpha 3} = y_{\alpha, \zeta} + h y_{, \alpha} + h b_{\alpha\mu} a^{\mu\lambda} y_{, \lambda} - h b_{\alpha\lambda} a^{\lambda\mu} y_{\mu, \zeta} + \\ + h (y_{, \alpha} + b_{\alpha\mu} a^{\mu\lambda} y_{, \lambda}) y_{, \zeta} + h a^{\mu\nu} (y_{\mu \parallel \alpha} - b_{\mu\alpha} y) y_{\nu \parallel \zeta} \\ \varepsilon_{33} = y_{, \zeta} + 1/2 y_{, \zeta}^2 + 1/2 a^{\mu\nu} y_{\mu, \zeta} y_{\nu, \zeta}$$

Из (3.13) видно, что в выражениях для $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и ε_{33} все отброшенные члены дадут малые поправки к членам, которые входят в (3.10). В выражении для $\varepsilon_{\alpha\beta}$ слагаемое $h^2 C_{\alpha\beta} \zeta^2$ может быть опущено в силу оценки (3.7). Слагаемые, содержащие y , дадут в энергии члены, малые по сравнению с членами, входящими в функционал J . Среди слагаемых, содержащих y_α , наименьший порядок малости имеет $hy_{(\alpha\parallel\beta)}$. Рассмотрим порождаемые им перекрестные члены в энергии (квадратичный член $h^2 y_{(\alpha\parallel\beta)}^2$, согласно определению характерного масштаба (3.3), мал по сравнению с членом $y_{\alpha,\zeta}^2$, входящим в J).

$$(3.14) \quad h \langle g_0^{\alpha\gamma} g_0^{\beta\delta} (A_{\alpha\beta} - hB_{\alpha\beta}\zeta) y_{\gamma\parallel\delta} \kappa \rangle$$

Заметим, что при малых h_* согласно (2.2)

$$(3.15) \quad g_0^{\alpha\beta} = a_0^{\alpha\beta} + 2\xi b_0^{\alpha\beta} + O(h_*^2), \quad g_1^{\alpha\beta} \equiv (\kappa)^{1/2} g_0^{\alpha\beta} = \\ = a_0^{\alpha\beta} + 2\xi b_1^{\alpha\beta} + O(h_*^2), \quad b_{1i}^{\alpha\beta} = b_0^{\alpha\beta} - 1/2 H_0 a_0^{\alpha\beta}$$

В силу ограничения $\langle y_\alpha \rangle = 0$ имеем $\langle A_{\alpha\beta} y_{\gamma\parallel\delta} \rangle = 0$. Главный перекрестный член между y_α и $A_{\alpha\beta}$ в (3.14) имеет вид $h^2 \langle a_0^{\alpha\gamma} b_1^{\beta\delta} A_{\alpha\beta} y_{\gamma\parallel\delta} \zeta \rangle$ и, следовательно, мал по сравнению с перекрестным членом между $y_{\alpha,\zeta}$ и y_α . Главный перекрестный член между y_α и $B_{\alpha\beta}$ в (3.14) $h^2 \langle B_{\alpha\beta} y_{\gamma\parallel\delta} \zeta \rangle$ имеет тот же порядок малости, что перекрестный член между $y_{\alpha,\zeta}$ и y_α в J . Поэтому для правильного вычисления y_α его следует сохранить.

Работа сил P_y ($P \equiv P_i n^i$) внесет вклад порядка $\mu \varepsilon^2 h_{**}$ и несущественна для определения y в первом приближении. Работа сил $P^\alpha y_\alpha$ ($P^\alpha \equiv P_i r_\beta^i a^{\alpha\beta}$) имеет порядок $\mu \varepsilon^2 h_{**}^2$ и, следовательно, вносит тот же вклад, что $\mu y_{,\zeta} y_{\alpha,\zeta}$. Поэтому она должна быть учтена. Сохранение указанных слагаемых не изменит порядка y_α и y и формулы для y (3.12).

Из оценок $y \sim \varepsilon_A + \varepsilon_B$, $y_\alpha \sim (\varepsilon_A + \varepsilon_B) h_{**}$ и формул (3.13) следует, что $|\varepsilon_{\alpha\beta}| \leq m(\varepsilon_A + \varepsilon_B)$, $|\varepsilon_{\alpha 3}| \leq m(\varepsilon_A + \varepsilon_B) h_{**}$, $|\varepsilon_{33}| \leq m(\varepsilon_A + \varepsilon_B)$. Поэтому $\varepsilon \leq m(\varepsilon_A + \varepsilon_B)$ и, согласно (3.8), меры малости деформаций $\varepsilon_A + \varepsilon_B$ и ε асимптотически эквивалентны.

Классическая теория. Поперечная часть упругой энергии в первом приближении равна нулю, и полная энергия совпадает с продольной энергией, вычисленной на деформациях $\varepsilon_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} - hB_{\alpha\beta}\zeta$. Сохраняя главные члены по $A_{\alpha\beta}$ и $hB_{\alpha\beta}$ и главный перекрестный член, получим

$$\Phi = h \langle U \rangle = h \langle U_{\parallel} \rangle = F(A) + 1/12 F(hB) + F(A, hB)$$

$$F(A) = \mu h [\sigma (A_\alpha^\alpha)^2 + A_{\alpha\beta} A^{\alpha\beta}]$$

$$F(hB) = \mu h [\sigma (hB_\alpha^\alpha)^2 + h^2 B_{\alpha\beta} B^{\alpha\beta}]$$

$$F(A, hB) = 1/6 \mu h^3 b_1^{\gamma\delta} [\sigma (A_\alpha^\alpha B_{\gamma\delta} + A_{\gamma\delta} B_\alpha^\alpha) - 2A_\gamma^\alpha B_{\alpha\delta}]$$

Тензоры $A_{\alpha\beta}$ и $B_{\alpha\beta}$ кинематически независимы: при заданных $A_{\alpha\beta}$ тензор $B_{\alpha\beta}$ может иметь функциональные степени свободы. Дополнительные степени свободы можно искать (при фиксированных $A_{\alpha\beta}$) из условия экстремума функционала с плотностью энергии $1/12 F(hB) + F(A, hB)$. При этом перекрестная энергия $F(A, hB)$ играет для дополнительных степеней свободы роль внешних воздействий. Однако в большинстве возни-

кающих в приложениях линейных задач задание $A_{\alpha\beta}$ в силу условий закрепления на краю полностью определяет тензор $B_{\alpha\beta}$; перекрестная энергия в силу неравенства $F(A, hB) \leq mh_* (F(A) + F(hB))$ «подчинена» энергии растяжения и изгиба и может быть отброшена. В результате приходим к формуле $\Phi = F(A) + \frac{1}{12}F(hB)$.

В рамках точности классической теории можно переопределять меры деформации срединной поверхности за счет добавления малых членов. Например, можно заменить тензор $B_{\alpha\beta}$ на тензор [6]

$$(3.16) \quad \rho_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta} - b_{0(\alpha} \lambda A_{\beta)\lambda}$$

Это соответствует добавлению к hB слагаемых порядка $h_* \varepsilon_A$ и изменяет лишь перекрестную энергию, которую в классической теории оболочек отбрасывают. Далее под плотностью энергии в классической теории оболочек будем понимать величину

$$(3.17) \quad \Phi = F(A) + \frac{1}{12}F(h\rho)$$

Работа внешних сил на лицевых поверхностях в первом приближении сводится к работе на $x^i = r^i(\xi^\alpha) + hn^i(\xi^\alpha)\zeta$. В краевом функционале I_1 энергия имеет порядок $\mu\varepsilon^2 |\Gamma_0| b$ ($|\Gamma_0|$ — длина Γ_0) и мала по сравнению с энергией внутренней части оболочки, имеющей порядок $\mu\varepsilon^2 |\Omega_0|$. Работа сил в краевом функционале в первом приближении сводится к работе на $x^i = r^i(\xi^\alpha) + hn^i(\xi^\alpha)\zeta$ (это станет ясным после рассмотрения уточненных теорий). Кроме того, в выражении для энергии внутренней части оболочки интеграл по Ω_2 можно заменить на интеграл по Ω_0 — это приводит к добавлению малого слагаемого порядка $\mu\varepsilon^2 |\Gamma_0| b$. Итак, функционал энергии оболочки в первом приближении дается формулой

$$(3.18) \quad I(r(\xi)) = \int_{\Omega_0} \Phi d\omega - L$$

$$L = \int_{\Omega_0} (\{P_i\} r^i + \frac{1}{2} h [P_i] n^i) d\omega + h \int_{\Gamma_0} (\langle P_i \rangle r^i + h \langle P_i \zeta \rangle n^i) ds$$

$$\{P_i\} = P_i|_{\zeta=1/2} + P_i|_{\zeta=-1/2}, \quad [P_i] = P_i|_{\zeta=1/2} - P_i|_{\zeta=-1/2}$$

Здесь Φ — функция (3.17), ds — элемент длины на Γ_0 .

4. Поверхностная энергия в уточненных теориях. Для вычисления слагаемых в плотности энергии порядка $\mu\varepsilon^2 h_*$, $\mu\varepsilon^2 h_{**}$, $\mu\varepsilon^2 h_{**}^2$ надо найти y_α , которые, как было установлено, имеют порядок εh_{**} . Определение y_α связано с удержанием в энергии слагаемых порядка $\mu\varepsilon^2 h_{**}^2$. Члены такого порядка входят как в продольную, так и в поперечную энергию. Для того чтобы упростить вычисления и не учитывать членов в продольной энергии, вместо замены (3.1) сделаем замену

$$(4.1) \quad x^i = r^i(\xi^\alpha) + h\varphi^i(\xi^\alpha)\zeta + hz^i(\xi^\alpha, \zeta)$$

Функции r^i и φ^i считаются независимыми искомыми функциями. Наличие дополнительно трех независимых функций от ξ^α позволяет наложить на остаток z^i шесть ограничений

$$(4.2) \quad \langle z^i \rangle = 0, \quad \langle z^i \zeta \rangle = 0$$

Функции r^i и φ^i имеют следующий смысл: $r^i = \langle x^i(\xi^\alpha, \zeta) \rangle$, $\varphi^i = 12h^{-1} \times \langle x^i(\xi^\alpha, \zeta) \zeta \rangle$. Формула (4.1) устанавливает взаимно-однозначное соответствие между всеми функциями $x^i(\xi^\alpha, \zeta)$ и всеми тройками $\{r^i, \varphi^i, z^i\}$, в которых z^i подчинены ограничениям (4.2).

Из предыдущего анализа следует, что $\varphi_\alpha \equiv r_\alpha^i \varphi_i \sim \varepsilon h_{**}$, $\varphi - 1 \equiv n^i \varphi_i - 1 \sim \varepsilon$. Далее считаем r^i, φ^i фиксированными и такими, что $\varphi_\alpha \sim \varepsilon h_{**}$, $\varphi - 1 \sim \varepsilon$, и ищем z^i .

При построении приближенных теорий, обладающих более высокой точностью, приходится оценивать производные от искомым функций более высокого порядка. В связи с этим в определении характерных масштабов следует ввести дополнительные неравенства для следующих производных. В рамках замены (4.1) это сводится к добавлению оценок производных от новых степеней свободы. Неравенства (3.3) заменим неравенствами

$$(4.3) \quad |A_{\alpha\beta, \gamma}| \leq \frac{\varepsilon_A}{l}, \quad \frac{1}{2} h |B_{\alpha\beta, \gamma}| \leq \frac{\varepsilon_B}{l}$$

$$|\varphi_\alpha| \leq \frac{(\varepsilon_A + \varepsilon_B) h}{l}, \quad |\varphi - 1| \leq \varepsilon_A + \varepsilon_B, \quad |\varphi_{\alpha, \beta}| \leq \frac{(\varepsilon_A + \varepsilon_B) h}{l^2}$$

$$|\varphi_{, \alpha}| \leq \frac{\varepsilon_A + \varepsilon_B}{l}, \quad \max_\zeta |z_{\alpha, \gamma}| \leq \frac{\bar{\Delta}}{l}, \quad \max_\zeta |z_{, \gamma}| \leq \frac{\bar{\Delta}}{l}$$

$$(z_\alpha \equiv r_\alpha^i z_i, \quad z \equiv n^i z_i, \quad \bar{\Delta} \equiv \max_{V_0} (|z_{1, \zeta}| + |z_{2, \zeta}| + |z_{, \zeta}|))$$

Поскольку $z^i = y^i - r_\beta^i \varphi_\alpha a^{\alpha\beta} \zeta - (\varphi - 1) n^i \zeta$, $\bar{\Delta} \sim \varepsilon$. Выпишем компоненты деформаций в терминах r^i, φ^i, z^i

$$(4.4) \quad \varepsilon_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} - h B_{\alpha\beta}^{(\varphi)} \zeta + h^2 C_{\alpha\beta}^{(\varphi)} \zeta^2 + h r_{(\alpha}^i z_{i, \beta)} +$$

$$+ h^2 \varphi_{(\alpha}^i z_{i, \beta)} \zeta + \frac{1}{2} h^2 z_{, \alpha}^i z_{i, \beta}$$

$$2\varepsilon_{\alpha\zeta} = z_{\alpha, \zeta} + \varphi_\alpha + h \varphi^i z_{i, \alpha} + \frac{1}{2} h (\varphi_i \varphi^i)_{, \alpha} \zeta +$$

$$+ h \varphi_{, \alpha}^i z_{i, \zeta} \zeta + h z_{, \alpha}^i z_{i, \zeta}$$

$$\varepsilon_{\zeta\zeta} = z_{, \zeta} + \frac{1}{2} (\varphi_i \varphi^i - 1) + \frac{1}{2} z_{, \zeta}^i z_{i, \zeta}$$

$$(B_{\alpha\beta}^{(\varphi)} \equiv -r_{(\alpha}^i \varphi_{i, \beta)} - b_{0\alpha\beta} = B_{\alpha\beta} - \varphi_{(\alpha} \varphi_{\beta)} + (\varphi - 1) b_{\alpha\beta} =$$

$$= B_{\alpha\beta} + O(\varepsilon(h_* + h_{**})), \quad C_{\alpha\beta}^{(\varphi)} \equiv \frac{1}{2} (\varphi_{, \alpha}^i \varphi_{i, \beta} - c_{0\alpha\beta}))$$

Из (4.3) следуют оценки

$$|z_{, \alpha}^i| \leq m \bar{\Delta} (l^{-1} + R_0^{-1}), \quad |\varphi_{, \alpha}^i - n_{, \alpha}^i| \leq m (\varepsilon_A + \varepsilon_B) (l^{-1} + R_0^{-1})$$

$$h^2 |(\varphi_{, \alpha}^i - n_{, \alpha}^i) z_{i, \beta}| \leq m (h_* + h_{**})^2 \varepsilon \bar{\Delta}$$

Эти оценки показывают, что последние два слагаемых в формуле для $\varepsilon_{\alpha\beta}$ с точностью до членов порядка $(h_* + h_{**})^2 \varepsilon^2$ можно заменить на $h^2 n_{(\alpha}^i z_{i, \beta)} \zeta$. Слагаемые $h r_{\alpha}^i z_{i, \beta}$ и $h^2 n_{(\alpha}^i z_{i, \beta)} \zeta$ в силу ограничений (4.2) дают в продольную энергию вклад порядка $(h_*^2 \varepsilon_A + h_* \varepsilon_B) (h_* + h_{**}) \bar{\Delta}$. Поскольку в поперечной энергии есть перекрестные члены между z^i и r^i, φ^i порядка $h_{**} \varepsilon \bar{\Delta}$, перекрестные члены в продольной энергии можно отбросить. Следовательно, при отыскании z^i в первом приближении надо учесть их вклад только в поперечную энергию. В поперечной энергии также

возможны упрощения за счет отбрасывания в формуле для $\varepsilon_{\alpha\beta} h\varphi^i_{,\alpha} z_{i,\zeta} \zeta$ ($|h\varphi^i_{,\alpha} z_{i,\zeta} \zeta| \leq m(h_* + h_{**})(\varepsilon_A + \varepsilon_B)\bar{\Delta} + mh_*\bar{\Delta}$) и $hz^i_{,\alpha} z_{i,\zeta} \times$
 $\times (|hz^i_{,\alpha} z_{i,\zeta}| \leq m(h_* + h_{**})\bar{\Delta}^2)$

и замены

$$\begin{aligned} & \varphi^i \varphi_i - 1 \text{ на } 2(\varphi - 1), \quad \varphi^i z_{i,\alpha} \text{ на } z_{,\alpha} \\ & (|\varphi_i \varphi^i - 1 - 2(\varphi - 1)| \leq m(\varepsilon_A + \varepsilon_B)^2, \quad |\varphi^i z_{i,\alpha} - n^i z_{i,\alpha}| \leq \\ & \leq l^{-1}(\varepsilon_A + \varepsilon_B)^2 + mh_{**}\varepsilon\bar{\Delta}) \end{aligned}$$

Для компонент метрического тензора можно использовать приближенные выражения $g_{0\alpha\beta} = a_{0\alpha\beta}$, $g_0^{\alpha\beta} = a_0^{\alpha\beta}$, так как значения z^i ищутся в первом приближении. С учетом работы внешних сил на z^i , для определения z^i получим функционал

$$\begin{aligned} (4.5) \quad & h \int_{\Omega_2} (J_{\angle}(z_{\alpha}, z) + J_{\perp}(z)) d\omega \\ & J_{\angle}(z_{\alpha}, z) = \frac{1}{2} \int_{-1/2}^{1/2} \mu a_0^{\alpha\beta} (z_{\alpha,\zeta} + \varphi_{\alpha} + h\varphi_{,\alpha}\zeta + hz_{,\alpha}) (\alpha \rightarrow \beta) d\zeta - \\ & - \{P^{\alpha} z_{\alpha}\} \\ & J_{\perp}(z) = \frac{1}{2} \int_{-1/2}^{1/2} (\lambda + 2\mu) (z_{,\zeta} + \varphi - 1 + \sigma A_{\alpha}^{\alpha} - \sigma h B_{\alpha}^{\alpha\zeta})^2 d\zeta - \{Pz\} \end{aligned}$$

Функционал (4.5) «не удерживает» кинематических краевых условий на S_* , поэтому вычисление z_{α} и z сводится к минимизации в каждой точке поверхности Ω_2 суммы $J_{\angle} + J_{\perp}$ по z_{α} и z , которые рассматриваются как произвольные функции ζ , зависящие от ξ^{α} как от параметров и удовлетворяющие ограничениям $\langle z_{\alpha} \rangle = \langle z_{\alpha} \zeta \rangle = \langle z \rangle = \langle z \zeta \rangle = 0$. Для нахождения z_{α} надо знать z в первом приближении. Перекрестные члены между z_{α} и z в функционале J_{\angle} малы по сравнению с перекрестными членами между z и $A_{\alpha\beta}$, $hB_{\alpha\beta}$ в J_{\perp} . Поэтому первое приближение для z определяется из задачи о минимуме J_{\perp} . Получим

$$(4.6) \quad z = \frac{1}{2} \sigma h B_{\alpha}^{\alpha} (\zeta^2 - \frac{1}{12}) - \frac{5}{3} \bar{\varphi} \zeta (\zeta^2 - \frac{3}{20}) + \\ + \frac{1}{2} (\lambda + 2\mu)^{-1} (\frac{5}{3} [P] \zeta (\zeta^2 - \frac{3}{20}) + \{P\} (\zeta^2 - \frac{1}{12}))$$

$$(4.7) \quad \inf J_{\perp} = -\frac{1}{12} \sigma \{P\} h B_{\alpha}^{\alpha} + \frac{5}{12} (\lambda + 2\mu) \bar{\varphi}^2 + \frac{1}{12} [P] \bar{\varphi}$$

Здесь $\bar{\varphi} = \varphi - 1 + \sigma A_{\alpha}^{\alpha}$. Члены, квадратичные по компонентам внешних сил, в (4.7) опущены, поскольку, как нетрудно проверить, их варьирование дает в уравнения вклад порядка εh_{**}^2 по сравнению с единицей (в линейной теории эти члены не варьируются и играют в функционале энергии роль аддитивных постоянных).

Предположим, что $\bar{\varphi} = O(\varepsilon h_{**})$ (далее это будет проверено). Тогда, согласно (4.6), в первом приближении

$$z = \frac{1}{2} \sigma h B_{\alpha}^{\alpha} (\zeta^2 - \frac{1}{12})$$

Подставляя это выражение в $J_{\angle}(z_{\alpha}, z)$ и минимизируя по z_{α} , найдем

$$(4.8) \quad z_{\alpha} = -\frac{1}{2}h\varphi_{,\alpha}(\zeta^2 - \frac{1}{12}) + \frac{1}{6}\sigma h^2 B_{\beta,\alpha}^{\beta} \zeta(\zeta^2 - \frac{3}{20}) - \\ - \frac{5}{3}\bar{\varphi}_{\alpha} \zeta(\zeta^2 - \frac{3}{20}) + \frac{1}{2}\mu^{-1}(\frac{5}{3}[P_{\alpha}]\zeta(\zeta^2 - \frac{3}{20}) + \\ + \{P_{\alpha}\}(\zeta^2 - \frac{1}{12})), \quad \bar{\varphi}_{\alpha} \equiv \varphi_{\alpha} - \frac{1}{60}\sigma h^2 B_{\beta,\alpha}^{\beta} \\ \inf J_{\angle} = h^{-1}\Phi_{\angle} + \frac{1}{12}[P^{\alpha}]\bar{\varphi}_{\alpha} + \frac{1}{12}\{P^{\alpha}\}h\varphi_{,\alpha} + \\ + \frac{1}{120}\sigma[P^{\alpha}]h^2 B_{\beta,\alpha}^{\beta}, \quad \Phi_{\angle} = h\langle U_{\angle} \rangle = \frac{5}{12}\mu h\bar{\varphi}_{\alpha}\bar{\varphi}^{\alpha}$$

Члены, квадратичные по внешним силам, в (4.8) отброшены.

Для построения функционала энергии внутренней части оболочки осталось вычислить поверхностную плотность продольной энергии $\Phi_{\parallel} = h\langle U_{\parallel} \rangle$. При этом для компонент деформаций $\varepsilon_{\alpha\beta}$ можно использовать приближенные выражения $\varepsilon_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} - hB_{\alpha\beta}^{(\varphi)}\zeta + h^2 C_{\alpha\beta}^{(\varphi)}\zeta^2$ (заметьте, что $C_{\alpha\beta}^{(\varphi)} = C_{\alpha\beta} + O(h_*(h_* + h_{**})\varepsilon)$). Введем несимметричный тензор $\varepsilon_{1\beta}^{\alpha} = g_1^{\alpha\gamma}\varepsilon_{\gamma\beta}$, где $g_1^{\alpha\gamma}$ определены формулой (3.15). Плотности энергии можно придать вид

$$U_{\parallel} \kappa = \mu [\sigma (\varepsilon_{1\alpha}^{\alpha})^2 + \varepsilon_{1\beta}^{\alpha}\varepsilon_{1\alpha}^{\beta}]$$

Переразлагая $\varepsilon_{1\beta}^{\alpha}$ по первым полиномам Лежандра, при помощи (3.15) получим

$$\varepsilon_{1\beta}^{\alpha} = (A_{\beta}^{\alpha} - \frac{1}{6}h^2 b_1^{\alpha\gamma} B_{\gamma\beta}^{(\varphi)} + \frac{1}{12}h^2 C_{\beta}^{\alpha}) - \\ - h(B_{\beta}^{(\varphi)\alpha} - 2b_1^{\alpha\gamma} A_{\gamma\beta})\zeta + h^2(\dots)(\zeta^2 - \frac{1}{12}) + \dots$$

Опустим индекс у $\varepsilon_{1\beta}^{\alpha}$ при помощи метрики $a_{0\alpha\beta}$. Тогда

$$(4.9) \quad U_{\parallel} \kappa = \mu [\sigma (a_0^{\alpha\beta}\varepsilon_{1\alpha\beta})^2 + a_0^{\alpha\gamma}a_0^{\beta\gamma}\varepsilon_{1\alpha\beta}\varepsilon_{1\gamma\delta}]$$

Антисимметричная часть $\varepsilon_{1\alpha\beta}$ дает в $U_{\parallel} \kappa$ вклад порядка $h_*^2 \varepsilon^2$ и может не учитываться. Поэтому для вычисления Φ_{\parallel} надо подставить в (4.9) вместо $\varepsilon_{1\alpha\beta}$ тензор $\varepsilon_{1(\alpha\beta)} = A_{1\alpha\beta} - hB_{1\alpha\beta}\zeta$, где

$$A_{1\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} - \frac{1}{6}h^2 b_{1(\alpha}^{\lambda} B_{\beta)\lambda}^{(\varphi)} + \frac{1}{12}h^2 C_{\alpha\beta}, \quad B_{1\alpha\beta} = B_{\alpha\beta}^{(\varphi)} - 2b_{1(\alpha}^{\lambda} A_{\beta)\lambda}$$

Для Φ_{\parallel} получим соотношение, по форме совпадающее с классическим: $\Phi_{\parallel} = F(A_1) + \frac{1}{12}F(hB_1)$. Разница заключается в выражениях для мер деформации и изгиба.

Найдем φ . Производные от φ входят в функционал линейно, поэтому, варьируя по φ , получим для φ линейное алгебраическое уравнение

$$\frac{5}{6}(\lambda + 2\mu)(\varphi - 1 + \sigma A_{\alpha}^{\alpha}) + \frac{1}{12}[P] - \frac{1}{12}\{P^{\alpha}\}_{;\alpha} + \\ + h^{-1}b_{\alpha\beta}\partial\Phi_{\parallel} / \partial B_{1\alpha\beta} = 0$$

Отсюда видно, что, как и предполагалось выше, в первом приближении $\varphi = 1 - \sigma A_{\alpha}^{\alpha}$. Погрешность этой формулы есть $O(\varepsilon(h_* + h_{**}))$.

Возьмем в качестве меры изгиба тензор

$$\rho_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta} - \varphi_{(\alpha;\beta)} - b_{0(\alpha}^{\lambda} A_{\beta)\lambda}$$

Он совпадает с тензором (3.16), если не учитывается поперечный сдвиг φ_{α} . Тензоры $A_{1\alpha\beta}$ и $B_{1\alpha\beta}$ в терминах $A_{\alpha\beta}$, $\rho_{\alpha\beta}$ с учетом выражения для φ

имеют вид ($b'_{\alpha\beta} = b_{0\alpha\beta} - H_0 a_{0\alpha\beta}$ — девиатор второй квадратичной формы Ω_0).

$$A_{1\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} - 1/12 h^2 b'_{(\alpha\rho\beta)\lambda}, \quad B_{1\alpha\beta} = \rho_{\alpha\beta} - b'_{(\alpha} A_{\beta)\lambda} - \sigma b_{0\alpha\beta} A_{\lambda}^{\lambda}$$

Выражение для энергии все еще остается громоздким. Особенно «неприятен» градиент B_{β}^{β} , который входит в энергию поперечного сдвига через $\bar{\varphi}_{\alpha} = \varphi_{\alpha} - 1/60 h^2 B_{\beta}^{\beta}{}_{,\alpha}$. Поскольку φ_{α} — независимые функции, естественно избавиться от градиента B_{β}^{β} , перейдя к новым искомым функциям $\bar{\varphi}_{\alpha}$. При этом надо сделать также замену $r_i \rightarrow \bar{r}_i = r_i - 1/60 \sigma h^2 B_{\beta}^{\beta} n_i$ для того, чтобы не изменилась формула для $\rho_{\alpha\beta}$ (в линейной теории пластин эта замена применялась в [29]). Обозначим через $\gamma_{\alpha\beta}$ тензор $A_{\alpha\beta}$, построенный по \bar{r}_i ; $\gamma_{\alpha\beta} = 1/2 (\bar{r}_{i,\alpha} \bar{r}_{i,\beta} - a_{0\alpha\beta})$, через \bar{n}_i — вектор, определяемый из соотношений $\bar{n}_i \bar{r}_{i,\alpha} = 0$, $\bar{n}_i \bar{n}^i = 1$. Тогда

$$(4.10) \quad \begin{aligned} A_{1\alpha\beta} &= \gamma_{\alpha\beta} - 1/12 h^2 b'_{(\alpha\rho\beta)\lambda} - 1/60 \sigma h^2 b_{0\alpha\beta} \rho_{\mu}^{\mu} \\ B_{1\alpha\beta} &= \rho_{\alpha\beta} - b'_{(\alpha} \gamma_{\beta)\lambda} - \sigma b_{0\alpha\beta} \gamma_{\lambda}^{\lambda}, \quad \rho_{\alpha\beta} = \bar{n}_i \bar{r}_{i,\alpha\beta} - b_{0\alpha\beta} - \bar{\varphi}_{(\alpha;\beta)} - b_{0(\alpha} \gamma_{\beta)\lambda} \end{aligned}$$

Поверхностная плотность упругой энергии $\Phi = h \langle U_{\kappa} \rangle = h \langle U_{\parallel \kappa} \rangle + h \langle U_{\perp \kappa} \rangle$ после подстановки (4.10) в Φ_{\parallel} и отбрасывания членов порядка h_*^2 по сравнению с главными записывается в форме

$$(4.11) \quad \begin{aligned} \Phi &= F(\gamma) + 1/12 F(h\rho) + F(\gamma, h\rho) + 5/12 \mu h \bar{\varphi}_{\alpha} \bar{\varphi}^{\alpha} \\ F(\gamma, h\rho) &= -1/3 \mu h^3 (\gamma_{\alpha\beta} b_{\lambda}^{\alpha} \rho^{\lambda\beta} + \sigma \gamma_{\lambda}^{\lambda} b_{0\alpha\beta} \rho^{\alpha\beta} + 3/5 \sigma \gamma^{\alpha\beta} b_{0\alpha\beta} \rho_{\lambda}^{\lambda} + \\ &+ \sigma (6/5 \sigma - 1) \gamma_{\alpha}^{\alpha} H_{0\rho\beta}^{\beta}) \end{aligned}$$

Здесь $F(\gamma)$ и $1/12 F(h\rho)$ — энергии растяжения и изгиба по классической теории, $F(\gamma, h\rho)$ — перекрестная энергия, последний член в (4.11) — энергия сдвига.

Работа внешних сил дается равенством

$$(4.12) \quad \begin{aligned} L_2 &= \int_{\Omega_2} \left((\{P_i\} - h H_0 [P_i]) \bar{r}^i + \frac{1}{2} [P_i] h \bar{n}^i - \Theta \right) d\omega \\ \Theta &= 1/2 \sigma h ([P] + 1/6 h \{P^{\alpha}\}_{;\alpha}) \gamma_{\beta}^{\beta} - \\ &- 1/10 \sigma h^2 (\{P\} + 1/12 h [P^{\alpha}]_{;\alpha}) \rho_{\beta}^{\beta} - 5/12 [P^{\alpha}] h \bar{\varphi}_{\alpha} \end{aligned}$$

Формулы (4.11) и (4.12) определяют функционал энергии внутренней части оболочек.

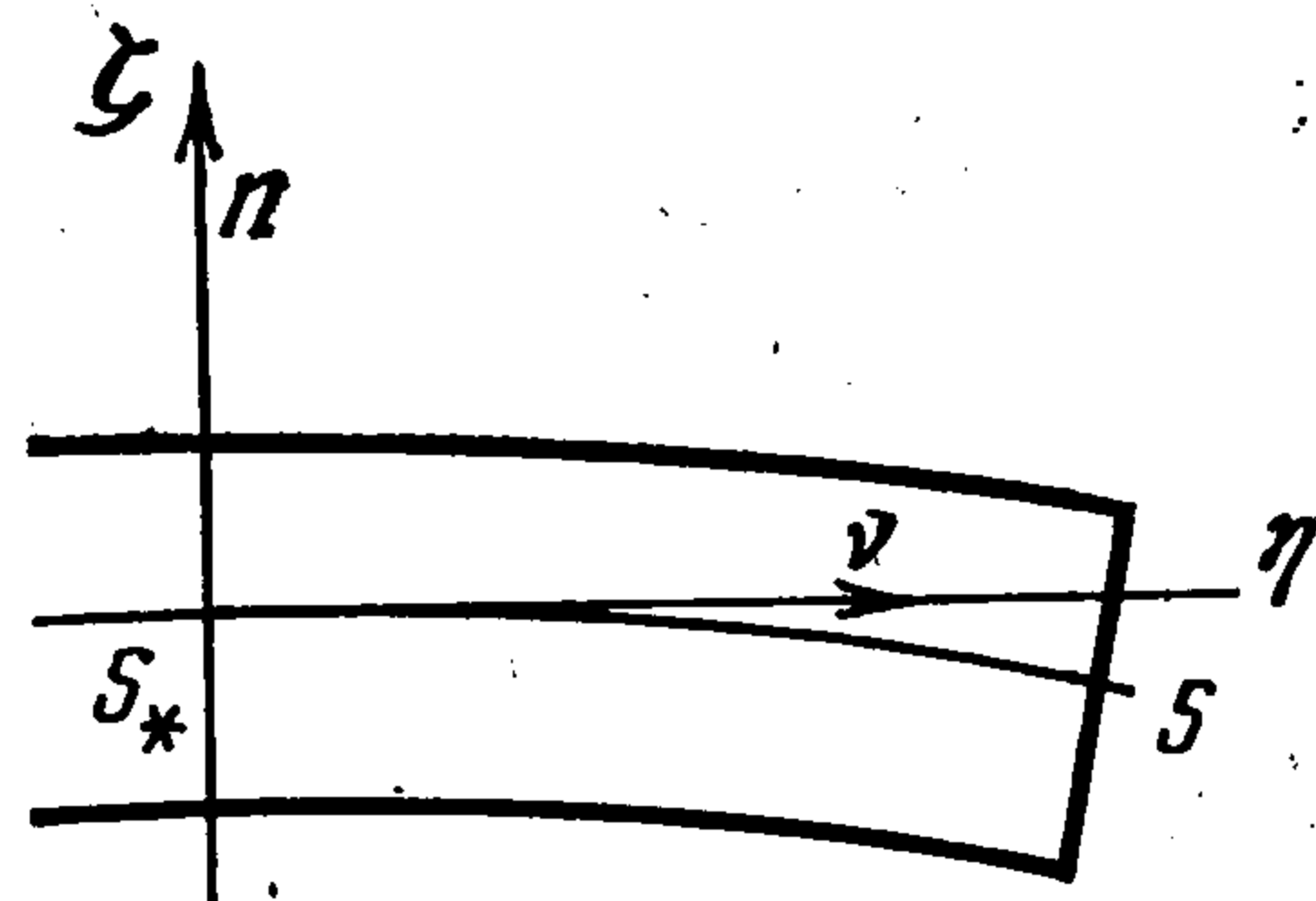
5. Задача о погранслое. Задача о погранслое есть задача о деформации замкнутого упругого стержня, на одной части боковой поверхности которого (S_*) заданы положения частиц $x^i = x_*^i(\xi^{\alpha}, \zeta)$, на другой (S_0) — поверхностные силы, а боковые поверхности $\zeta = \pm 1/2$ свободны от нагрузок. Положение частиц на S_* будем считать согласованным с внутренним разложением. Это означает, что $x_*^i = r_*^i + h \varphi_*^i \zeta + h z_*^i$ (звездочкой отмечаются значения величин на S_*), а первое приближение для z_*^i находится из формул (4.6), (4.8).

Поскольку $U \sim \mu \varepsilon^2$, объемный интеграл в I_1 имеет порядок $\mu \varepsilon^2 |\Gamma_0| h^2$ (при $b \sim h$). Его влияние скажется в краевых условиях в членах порядка h_{**} по сравнению с единицей. Поэтому в основной уточненной тео-

при надо найти I_1 в первом приближении, в теории с учетом сдвига — с поправками порядка h_{**} по сравнению с единицей.

В задаче о погранслое возникает еще один характерный параметр — поверхностная кривизна $k_{(n)}$ контура Γ_* (или Γ_0): $k_{(n)} = \tau_{0i} dv_0^i / ds$ (τ_0 — касательный вектор к Γ_* , $\nu_0 = \tau_0 \times n_0$, s — длина дуги на Γ_* , возрастающая, если при обходе Γ_* поверхность Ω_2 остается слева). Дальше считаем, что $k_{(n)} \sim l^{-1}$ [и на Γ_* $a_{011} = a_{022} = 1$, $a_{012} = 0$].

Энергия свободного края. Пусть сначала $P_i = 0$ на S_0 . С точностью до членов порядка h_* и h_{**} компоненты метрического тензора, входящие в коэффициенты квадратичной формы U , можно заменить символами Кронекера. Выделим в U продольную энергию, поперечную энергию и энергию сдвига (греческие индексы в п. 5 пробегают значения 1, 3, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона)



$$(5.1) \quad U = U_{\parallel} + U_{\perp} + U_{\Delta}, \quad U_{\parallel} \equiv \min_{\epsilon_{\alpha\beta}, \epsilon_{\alpha 2}} U = 1/2 E \epsilon_{22}^2$$

$$U_{\perp} \equiv \min_{\epsilon_{\alpha\beta}} (U - U_{\parallel}) = 2\mu (\epsilon_{21}^2 + \epsilon_{23}^2)$$

$$U_{\Delta} \equiv U - U_{\parallel} - U_{\perp} = \mu [(\epsilon_{11} + \nu \epsilon_{22})^2 + (\epsilon_{33} + \nu \epsilon_{22})^2 + 2\epsilon_{13}^2] + 1/2 \lambda (\epsilon_{11} + \epsilon_{33} + 2\nu \epsilon_{22})^2$$

В задаче о погранслое удобно ввести новую сопутствующую систему координат η, s, ζ' , которая в начальном состоянии задается формулами

$$x^i = r_0^i(s) + h\nu_0^i(s)\eta + hn_0^i(s)\zeta'$$

где $x^i = r_0^i(s)$ — уравнения Γ_* в начальном состоянии.

Поперечное сечение стержня в координатах η, ζ' криволинейно (фигура).

Матрица перехода от координат $(\xi^1 - b)/h, \zeta$ к координатам η, ζ' отличается от единичной на величины порядка h_* , поэтому энергия в новых координатах с принятой точностью имеет вид (5.1). Координаты ζ и ζ' при $\eta = 0$ совпадают. Дальше штрих у ζ' опускается, так как координата ζ в погранслое не используется.

Сделаем замену искоемых функций

$$(5.2) \quad x^i = r^i(s) + h\nu^i(s)\eta + hn^i(s)\zeta + hy^i(\eta, \zeta, s)$$

Векторы ν^i и n^i расположены относительно образа Γ_* в деформированном состоянии так же, как ν_0^i и n_0^i относительно Γ_* .

Подстановка (5.2) в выражения для компонент тензора деформаций дает

$$(5.3) \quad \epsilon_{11} = \underline{y_{1|1}} + 1/2 y_{1|1}^i y_{i|1}, \quad 2\epsilon_{13} = \underline{y_{1|3}} + \underline{y_{3|1}}$$

$$\epsilon_{33} = \underline{y_{3|3}} + 1/2 y_{3|3}^i y_{i|3}$$

$$2\epsilon_{21} = \underline{y_{2|1}} - \underline{h\omega_* \zeta} + \underline{h\nu^i y_{i,s}} + \underline{hn^i y_{i|1} \zeta} + \underline{hn^i y_{i|1}} + \underline{hy^i y_{i|1}}$$

$$2\epsilon_{23} = \underline{y_{2|3}} + \underline{h\omega_* \eta} + \underline{hn^i y_{i,s}} + \underline{h\nu^i y_{i|3} \eta} + \underline{hn^i y_{i|3}} + \underline{hy^i y_{i|3}}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{22} = & \underline{A_{22}^*} - \underline{hB_{22}^*\zeta} + \underline{h(\tau_i v_{,s}^i - \tau_{0i} v_{0,s}^i)} \eta + \\ & + \underline{h\tau^i y_{i,s}} + \underline{1/2 h^2 (n_{,s}^i n_{i,s} - n_{0,s}^i n_{0i,s})} \zeta^2 + \\ & + \underline{1/2 h^2 (v_{,s}^i v_{i,s} - v_{0,s}^i v_{0i,s})} \eta^2 + \underline{h^2 (n_{,s}^i v_{i,s} - n_{0,s}^i v_{0i,s})} \eta \zeta + \\ & + \underline{1/2 h^2 y_{,s}^i y_{i,s}} + \underline{h^2 n_{,s}^i y_{i,s} \zeta} + \underline{h^2 v_{,s}^i y_{i,s} \eta} \end{aligned}$$

Здесь чертой перед индексами 1 и 3 обозначены производные по η и ζ , запятой перед s — производная по s .

$$\begin{aligned} y_1 = v^i y_i, \quad y_2 = \tau^i y_i, \quad y_3 = n^i y_i, \quad \tau^i \equiv dr_*^i / ds \\ \omega_* = n_i v_{,s}^i - b_{012}, \quad A_{22}^* = 1/2 (\tau_i \tau^i - 1), \quad B_{22}^* = n_i \tau_{,s}^i - n_{0i} \tau_{0,s}^i \end{aligned}$$

Величины $h\omega_*$ и hB_{22}^* отличаются членами порядка $h_* \varepsilon_A$ от значений hB_{12} и hB_{22} на Γ_* .

Оставим в (5.3) члены, подчеркнутые сплошной линией. Тогда задача о погранслое распадется на две независимые: плоскую задачу — задачу о минимуме функционала (« \cdot » — интеграл по η , ζ по поперечному сечению стержня)

$$(5.4) \quad \langle\langle U_{\perp} \rangle\rangle = \langle\langle \mu [(y_{1|1} + vA_{22}^* - v h B_{22}^* \zeta)^2 + (y_{3|3} + vA_{22}^* - v h B_{22}^* \zeta)^2 + \\ + 1/2 (y_{1|3} + y_{3|1})^2] + 1/2 \lambda (y_{1|1} + y_{3|3} + 2vA_{22}^* - 2v h B_{22}^* \zeta)^2 \rangle\rangle$$

на множестве функций y_1, y_3 , удовлетворяющих при $\eta = 0$ условиям

$$y_1 = 0, \quad y_3 = -\sigma A_{\alpha}^{*\alpha} + 1/2 \sigma h B_{\alpha}^{*\alpha} (\zeta^2 - 1/12) |$$

и антиплоскую задачу — задачу о минимуме функционала

$$(5.5) \quad \langle\langle U_{\angle} \rangle\rangle = 1/2 \mu \langle\langle (y_{2|1} - h\omega_* \zeta)^2 + (y_{2|3} + h\omega_* \eta)^2 \rangle\rangle$$

на множестве функций y_2 , обращающихся в нуль при $\eta = 0$.

Из (5.4) и (5.5) видно, что y_1, y_2 и y_3 будут порядка ε . Поэтому все отброшенные в (5.3) члены меньше оставленных (третье слагаемое в формуле для ε_{22} мало отличается от $h \partial A_{22}^* / \partial \zeta^1$ и, следовательно, порядка $h_{**} \varepsilon_A$).

Интеграл по поперечному сечению « \cdot » можно заменить на интеграл по прямоугольнику $0 \leq \eta \leq b_* = b/h$, $|\zeta| \leq 1/2$. Это внесет погрешность порядка h_* .

Плоская задача. Перейдем от y_1, y_3 к новым искомым функциям z_1, z_3

$$(5.6) \quad \begin{aligned} y_1 = -vA_{22}^* \eta + v h B_{22}^{*1} \eta \zeta + z_1 \\ y_3 = -vA_{22}^* \zeta + 1/2 v h B_{22}^* (\zeta^2 - 1/12) - 1/2 v h B_{22}^{*1} \eta^2 + z_3 \end{aligned}$$

Тогда функционал плоской задачи примет форму

$$\langle\langle U_{\perp} \rangle\rangle = \langle\langle \mu [z_{1|1}^2 + 1/2 (z_{1|3} + z_{3|1})^2 + z_{3|3}^2] + 1/2 \lambda (z_{1|1} + z_{3|3})^2 \rangle\rangle$$

Функции z_1, z_3 при $\eta = 0$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} z_1 = 0, \quad z_3 = (-\sigma A_{\alpha}^{*\alpha} + vA_{22}^*) \zeta + 1/2 h (\sigma B_{\alpha}^{*\alpha} - vB_{22}^*) \times \\ \times (\zeta^2 - 1/12) \end{aligned}$$

Поскольку с принятой точностью

$$\begin{aligned} A_{11}^* = \langle y_1 \rangle_{|1} |_{\eta=0} = -vA_{22}^* + \langle z_{1|1} \rangle |_{\eta=0} \\ B_{11}^* = -\langle y_{3|11} \rangle |_{\eta=0} = -vB_{22}^* - \langle z_{3|11} \rangle |_{\eta=0} \end{aligned}$$

и $\nu - \sigma = -\nu\sigma$, краевое условие для z_3 является однородным

$$z_3 = -\sigma \langle z_{1|1} \rangle \zeta - 1/2 h \sigma \langle z_{3|11} \rangle, \quad \eta = 0$$

Поэтому $\inf \langle U_{\perp} \rangle = 0$ и достигается при $z_1 = z_3 = 0$

Антиплоская задача. Минимальное значение $\langle U_{\perp} \rangle$ пропорционально $b_* (h\omega_*)^2$. Коэффициент пропорциональности обозначим через D .

$$\inf_{y_2} \langle U_{\perp} \rangle = 1/12 D b_* h^2 \omega_*^2$$

Вычисления дают

$$D = 2\mu \left[1 - \frac{h}{b} \frac{96}{\pi^5} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\text{th}(2s-1)\pi b/h}{(2s-1)^5} \right]$$

При $h \leq b$ приближенно можно положить $\text{th}(2s-1)\pi b/h = 1$ и $D \approx 2\mu [1 - 0,315h/b]$.

Краевая энергия складывается из продольной энергии $\langle U_{\parallel} \rangle$ и энергии сдвига $\langle U_{\perp} \rangle$. В первом приближении имеем

$$(5.7) \quad \inf I_1 = \int_{\Gamma_*} \Psi ds, \quad \Psi = \frac{hb}{2} \left[E \left(A_{22}^{*2} + \frac{h^2}{12} B_{22}^{*2} \right) + \frac{h^2 D}{6} \omega_*^2 \right]$$

Следующее приближение для энергии свободного края. Учет поправок порядка h_{**} связан с сохранением в выражениях (5.3) членов, подчеркнутых штрихами и пунктиром. Если $hk_{(n)} \sim h_*$, то члены, подчеркнутые пунктиром, можно опустить. Нетрудно проверить, что $\inf \langle U_{\perp} \rangle \sim \mu \varepsilon^2 h_{**}^2$ и не дает вклада в краевую энергию. Для вычисления $\inf \langle U_{\perp} \rangle$ надо подставить в слагаемые выражений для ε_{21} и ε_{23} , подчеркнутые штрихами, найденные в первом приближении значения y_1 и y_3 . Краевая энергия легко находится, однако ответ слишком громоздкий, чтобы приводить его здесь.

Функционал энергии нагруженного края. Во внутренней части оболочки продольные компоненты тензора напряжений $r^{\alpha\beta}$ имеют порядок $\mu\varepsilon$, а поперечные $r^{\alpha 3}$ — порядок $\mu\varepsilon h_{**}$. В связи с этим внешние силы на краю естественно подчинить условию

$$P_i v^i = O(\mu\varepsilon), \quad P_i \tau^i = O(\mu\varepsilon), \quad P_i n^i = O(\mu\varepsilon h_{**})$$

Оказывается, однако, что для таких «больших» внешних сил в краевую энергию дает вклад самоуравновешенная часть нагрузки. Действительно, $\langle P_i \tau^i y_2 \rangle \sim \mu\varepsilon^2$, т. е. порядка энергии сдвига $\langle U_{\perp} \rangle$. Следовательно, в функционал антиплоской задачи войдет работа $P_i \tau^i$ на y_2 . Решая антиплоскую задачу, можно убедиться, что самоуравновешенная часть нагрузки, равная $P_i \tau^i - \langle P_i \tau^i \rangle - \zeta \langle P_i \tau^i \zeta \rangle / \langle \zeta^2 \rangle$, совершает работу на $h\omega_*$ и поэтому существенна для вычисления поправок к решению порядка h_{**} . Следовательно, если на краю известны только суммарные сила и момент, то максимально достижимую точность дает классическая теория оболочек, и построение уточненных теорий, вообще говоря, лишено смысла. Ситуация изменяется, если внешние силы удовлетворяют дополнительному ограничению: (нечетная по ζ часть $P_i \tau^i = O(\mu\varepsilon h_{**})$). Четную

по ζ часть $P_i \tau^i$ в антиплоской задаче можно отбросить, так как она не работает на $h\omega_*$ и дает лишь слагаемые, квадратичные по внешним силам. Величина $\langle (\text{нечетная по } \zeta \text{ часть } P_i \tau^i) \cdot y_2 \rangle$ имеет порядок $\mu \varepsilon^2 h_{**}$ и пренебрежимо мала по сравнению с $\langle U \rangle$. Поэтому учет внешних сил не изменит решения антиплоской задачи. Работу внешних сил на y_3 можно отбросить, так как $\langle P_i n^i y_3 \rangle \sim \mu \varepsilon^2 h_{**}$. Остается работа на y_1 : $\langle P_i v^i y_1 \rangle$. Она имеет порядок $\mu \varepsilon^2$ и войдет в функционал плоской задачи. После замены (5.6) он примет вид

$$\langle \mu [z_{1|1}^2 + 1/2 (z_{1|3} + z_{3|1})^2 + z_{3|3}^2] + 1/2 \lambda (z_{1|1} + z_{3|3})^2 \rangle - \langle P_i v^i z_1 \rangle |_{\eta=b_*} - \langle P_i v^i (-v A_{22}^* \eta + v h B_{22}^* \eta \zeta) \rangle |_{\eta=b_*}$$

Экстремали зависят от $P_i v^i$. Отбрасывая слагаемые, зависящие от $P_i v^i$, для минимального значения функционала плоской задачи получим $v b_* (\langle P_i v^i \rangle A_{22}^* - \langle P_i v^i \zeta \rangle h B_{22}^*)$. В результате краевой функционал дается формулой (Ψ — функция (5.7))

$$I_1 = \int_{\Gamma_*} \Psi ds - L_1$$

$$L_1 = h \int_{\Gamma_*} (\langle P_i \rangle r^i + b \langle P_i \rangle v^i + h \langle P_i \zeta \rangle n^i - v b (\langle P_i v^i \rangle A_{22}^* - \langle P_i v^i \zeta \rangle h B_{22}^*)) ds$$

Построение краевого функционала с учетом поправок порядка h_{**} и, следовательно, теории с учетом поперечного сдвига невозможно, если неизвестна самоуравновешенная часть нагрузки. Поправки такого порядка вызывает, например, самоуравновешенная часть силы $|P_i \tau^i$ в антиплоской задаче. В связи с этим теория с учетом сдвига не универсальна, и ее применение оправдано лишь для специальных классов задач (замкнутые оболочки, оболочки со свободным краем).

Изложенное позволяет ожидать, что справедлив следующий аналог принципа Сен-Венана в статике оболочек: для того чтобы нагрузка, самоуравновешенная на каждом поперечном волокне края, вызвала внутреннее напряженное состояние, представляющее $o(\mu \varepsilon h_{**})$, необходимо и достаточно, чтобы на краю оболочки $P_i v^i = O(\mu \varepsilon)$, $P_i n^i = O(\mu \varepsilon h_{**})$ (нечетная по ζ часть $P_i \tau^i$) = $o(\mu \varepsilon)$.

Необходимость последнего условия подтверждается точным решением задачи о деформации полубесконечной пластины самоуравновешенной на краю нагрузкой, которое построено в работе [30].

6. Двумерные уточненные теории физически линейных оболочек. Суммируем результаты. Функционал двумерной теории оболочек дается формулой

$$(6.1) \quad I = \int_{\Omega_2} \Phi d\omega + \int_{\Gamma_*} \Psi ds - L, \quad L = L_1 + L_2$$

Варьируя (6.1), в рамках точности теории с учетом сдвига, получим систему уравнений

$$(6.2) \quad t^{\alpha\beta}{}_{;\beta} - q^\beta b_{0\beta}^\alpha + \{P^\alpha\} = 1/2 h [P^\beta] (b_{0\beta}^\alpha + 2H_0 \delta_\beta^\alpha)$$

$$(6.3) \quad q^\alpha_{;\alpha} + t^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} + \{P\} + 1/2 h [P^\alpha]_{;\alpha} = h H_0 [P]$$

$$(6.4) \quad t^{\alpha\beta} = n^{\alpha\beta} + 1/2 (b_{0\sigma}^\alpha m^{\beta\sigma} - b_{0\sigma}^\beta m^{\alpha\sigma}), \quad q^\alpha + m^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0$$

$$(6.5) \quad n^{\alpha\beta} = \frac{\partial(\Phi + \Theta)}{\partial \gamma_{\alpha\beta}}, \quad m^{\alpha\beta} = \frac{\partial(\Phi + \Theta)}{\partial \rho_{\alpha\beta}}$$

В левой части (6.2), (6.3) выписаны классические члены, в правой — поправки порядка h_* . В первых двух уточненных теориях система уравнений (6.2) — (6.5) замкнута. В теории с учетом сдвига к уравнениям (6.2) — (6.5) добавляется еще два уравнения для функций $\bar{\Phi}_\alpha$

$$(6.6) \quad q^\alpha = \frac{\partial(\Phi + \Theta)}{\partial \bar{\Phi}_\alpha} = \frac{5}{6} \mu h \bar{\Phi}^\alpha - \frac{5}{12} h [P^\alpha]$$

В классической и в основной уточненной теории $\Phi = F(\gamma) + 1/12 F(h\rho)$ (если несущественна перекрестная энергия), $\Theta = 0$. Поэтому

$$(6.7) \quad n^{\alpha\beta} = 2\mu h (\sigma \gamma_\lambda^\alpha a_0^{\lambda\beta} + \gamma^{\alpha\beta}), \quad m^{\alpha\beta} = 1/6 \mu h^3 (\sigma \rho_\lambda^\alpha a_0^{\lambda\beta} + \rho^{\alpha\beta})$$

В теории, учитывающей геометрическую поправку, $\Phi = F(\gamma) + 1/12 F(h\rho) + F(\gamma, h\rho)$, где $F(\gamma, h\rho)$ дается формулой (4.11), а в выражении для Θ (4.12) следует отбросить малые члены, подчеркнутые пунктиром. Следовательно

$$(6.8) \quad n^{\alpha\beta} = n_1^{\alpha\beta} - 1/3 \mu h^3 [\rho^{\lambda(\alpha} b_\lambda^{\beta)} + \sigma (b_0^{\mu\nu} \rho_{\mu\nu} + (6/5 \sigma - 1) H_0 \rho_\mu^\mu) a_0^{\alpha\beta} + 3/5 \sigma \rho_\lambda^{\lambda\alpha\beta}] + 1/2 \sigma h [P] a_0^{\alpha\beta}$$

$$m^{\alpha\beta} = m_1^{\alpha\beta} - 1/3 \mu h^3 [\gamma^{\lambda(\alpha} b_\lambda^{\beta)} + \sigma (3/5 b_0^{\mu\nu} \gamma_{\mu\nu} + (6/5 \sigma - 1) H_0 \gamma_\mu^\mu) a_0^{\alpha\beta} + \sigma \gamma_\lambda^{\lambda\alpha\beta}] - 1/10 \sigma h^2 \{P\} a_0^{\alpha\beta}$$

Здесь $n_1^{\alpha\beta}$, $m_1^{\alpha\beta}$ — тензоры (6.7).

В теории с учетом сдвига Φ и Θ даются формулами (4.11) и (4.12). Согласно (6.5)

$$n^{\alpha\beta} = n_2^{\alpha\beta} + 1/12 \sigma h^2 \{P^\mu\}_{;\mu} a_0^{\alpha\beta}, \quad m^{\alpha\beta} = m_2^{\alpha\beta} - 1/120 \sigma h^3 [P^\mu]_{;\mu} a_0^{\alpha\beta}$$

где $n_2^{\alpha\beta}$, $m_2^{\alpha\beta}$ — тензоры (6.8).

Для записи краевых условий введем кривизны контура Γ_* соотношениями [16]

$$\frac{dv_0^i}{ds} = k_{(n)} \tau_0^i - k_{(\tau)} n_0^i, \quad \frac{d\tau_0^i}{ds} = k_{(v)} n_0^i - k_{(n)} v_0^i$$

$$\frac{dn_0^i}{ds} = k_{(\tau)} v_0^i - k_{(v)} \tau_0^i$$

Варьирование (6.1) приводит к следующим краевым условиям для первых двух уточненных теорий:

$$(6.9) \quad t^{\alpha\beta} v_\alpha v_\beta - h \langle P_i v^i \rangle - \underline{k_{(\tau)}} \underline{m_{v\tau}} = hb \frac{d}{ds} \langle P_k \tau^k \rangle - k_{(n)} T \parallel - k_{(n)} k_{(v)} M -$$

$$- \frac{d}{ds} (k_{(v)} M_* + k_{(\tau)} M) - k_{(\tau)} \left(\frac{dM}{ds} + k_{(n)} M_* \right)$$

$$t^{\alpha\beta} v_\beta \tau_\alpha - h \langle P_i \tau^i \rangle + \underline{k_{(v)}} \underline{m_{v\tau}} = hb k_{(n)} \langle P_i \tau^i \rangle + \frac{dT}{ds} \parallel +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{d}{ds} (k_{(v)}M) + k_{(v)} \left(\frac{dM}{ds} + k_{(n)}M_* \right) - k_{(n)} (k_{(\tau)}M + k_{(v)}M_*) \\
& - m^{\alpha\beta}{}_{;\beta} v_\alpha - \frac{d}{ds} m_{\nu\tau} - h \langle P_i n^i \rangle = - hb k_{(\tau)} \langle P_k \tau^k \rangle - \\
& - \frac{d}{ds} \left(\frac{dM}{ds} + k_{(n)}M_* \right) + h^2 \frac{d}{ds} \langle P_k \tau^k \zeta \rangle + \\
& + k_{(\tau)} (k_{(\tau)}M + k_{(v)}M_*) + k_{(v)} (T + k_{(v)}M) \\
& m^{\alpha\beta} v_\alpha v_\beta + h^2 \langle P_i v^i \zeta \rangle = hb \langle P_i n^i \rangle + \frac{d}{ds} M_* - k_{(n)}M
\end{aligned}$$

Здесь

$$m_{\nu\tau} = m^{\alpha\beta} v_\alpha v_\beta, \quad T = hbEA_{22}^* - vhb \langle P_i v^i \rangle$$

$$M = 1/12 h^3 b E B_{22}^* + v h^2 b \langle P_i v^i \zeta \rangle, \quad M_* = 1/6 h^3 b D \omega_*$$

В левых частях (6.9) выписаны классические члены, в правых — поправки. Подчеркнутые члены и члены за вертикальной чертой в рамках точности основной уточненной теории можно отбросить. Отметим, что самосопряженность системы уравнений при этом теряется. В теории с учетом геометрической поправки пренебрежимо малыми являются члены, выписанные после двойной вертикальной черты.

Слагаемые, содержащие множителями величины b и $k_{(n)}$, не имеют аналогов в классической теории. Они связаны с тем, что краевые условия ставятся не в точках приложения внешних сил, а в месте склейки оболочечного и погранслоного решения. При этом возникают дополнительные моменты и перерезывающие усилия.

Точность, с которой вычислен функционал I_1 , не позволяет написать краевые условия в теории с учетом сдвига. Соотношения, полученные для этой теории, можно применять для замкнутых оболочек.

7. Физически нелинейная теория. Сделаем замену искомым функций (3.1). Вычисление y_α будет производиться так же, как в физически линейной теории, если соотношения напряжения — деформации при деформациях порядка εh_{**}^2 допускают линеаризацию. Тогда для y_α , как и раньше, получим $y_\alpha \sim \varepsilon h_{**}$. Опуская дальнейшие подробности, сформулируем результат.

Пусть $U(\xi^\alpha, \zeta, h; \varepsilon_{\alpha\beta}; \varepsilon_{\alpha 3}; \varepsilon_{33})$ — гладкая функция всех своих аргументов, кроме ζ (по ζ допускается кусочная гладкость), строго выпуклая по компонентам тензора деформаций и мало меняющаяся по ξ^α на расстояниях порядка h (соответствующий масштаб l_U удовлетворяет условию $l_U \gg h$). Эти условия выполняются и в пределе при $h = 0$. Построим продольную энергию

$$U_{||}(\xi^\alpha, \zeta; \varepsilon_{\alpha\beta}) = \min_{\varepsilon_{\alpha 3}, \varepsilon_{33}} U(\xi^\alpha, \zeta, 0; \varepsilon_{\alpha\beta}; \varepsilon_{\alpha 3}; \varepsilon_{33})$$

Вычислим функцию

$$(7.1) \quad \Phi(A, \rho) = \langle U_{||}(\xi^\alpha, \zeta; A_{\alpha\beta} - h\rho_{\alpha\beta}\zeta) \rangle$$

Функционал энергии дается в первом приближении формулами (3.18), в которых под Φ следует понимать функцию (7.1), под $\rho_{\alpha\beta}$ — тензор (3.16).

8. О коротковолновой экстраполяции. Построение двумерной теории оболочек асимптотическими методами состоит из двух логических этапов: 1) асимптотического анализа трехмерной теории и вывода двумерной теории оболочек в области длинных волн и 2) экстраполяции результатов на короткие волны. Здесь для краткости применяется терминология, принятая в динамике, и длинноволновыми называются медленно меняющиеся напряженные состояния ($h/l \ll 1$), а коротковолновыми — быстро меняющиеся напряженные состояния.

На первом этапе различные асимптотические подходы (анализ уравнений или энергии) должны приводить к одинаковым результатам. В частности, построенная выше основная уточненная теория должна совпадать с уточненной теорией, предложенной А. Л. Гольденвейзером [3]. Действительно, как было показано Койтером и Хейдемом [16], теория А. Л. Гольденвейзера допускает энергетическую формулировку с энергией E вида

$$(8.1) \quad E = \int_{\Omega_0} \Phi d\omega - \int_{\Gamma_0} \Psi' d\gamma, \quad \Psi' = \frac{h^3 b}{6} \left(1 - \frac{D}{2\mu}\right) \omega_*^2$$

По основной уточненной теории энергия имеет вид

$$(8.2) \quad E = \int_{\Omega_0} \Phi d\omega + \int_{\Gamma_*} \Psi d\gamma$$

Из формулы для Ψ (5.7) видно, что выражения (8.1) и (8.2) в рамках рассматриваемой точности совпадают.

Второй этап (экстраполяция на короткие волны) связан с желанием ставить математически корректные задачи и, кроме того, применять теорию для «не очень длинных» и «коротких» волн. Остановимся на вопросе о корректности.

Характер краевых задач, корректных для данной системы уравнений, тесно связан с типом системы. Тип системы определяется ее поведением на коротких волнах. Поэтому говорить о корректности и о типе системы уравнений, которая по своему смыслу была выведена в области длинных волн, без предварительной экстраполяции на короткие волны невозможно.

Будем называть экстраполяцию тривиальной, если она заключается просто в рассмотрении построенной системы уравнений, в которой выброшены все малые в рассматриваемом приближении члены как для длинноволновых, так и для коротковолновых напряженных состояний. Под нетривиальной будем понимать экстраполяцию, которая связана с добавлением в уравнения ряда членов, пренебрежимо малых в длинноволновой области, но существенных в коротковолновой области.

Ясно, что возможны различные нетривиальные экстраполяции одной и той же системы уравнений. Это не должно вызывать недоумения, поскольку коротковолновые напряженные состояния не допускают двумерного описания и приходится рассчитывать лишь на качественное соответствие и, может быть, удовлетворительное описание интегральных характеристик. Удачность той или иной нетривиальной экстраполяции с точки зрения правильности описания напряженного состояния выясняется при решении тестовых задач.

В связи с изложенным отметим, что неоднократно поднимавшийся в литературе вопрос о том, должны ли уточненные уравнения динамики оболочек быть уравнениями гиперболического типа, есть, по существу, вопрос о том, как осуществить экстраполяцию уравнений, выведенных для длинных волн, на короткие волны. Допустимы как гиперболические, так и не гиперболические экстраполяции, однако гиперболические экстраполяции, как показывают многочисленные расчеты [31], в целом лучше описывают напряженное состояние.

Вопрос об экстраполяции как самостоятельный вопрос не возникал при выводе классической теории оболочек, так как после тривиальной экстраполяции естественные краевые задачи являлись корректными.

Тривиальная экстраполяция уточненной теории А. Л. Гольденвейзера порождает неединственность решения, а для некоторых нагрузок — отсутствие решения.

Поясним это на следующем примере. Рассмотрим изгиб пластинки, занимающей полуплоскость $x_1 \leq 0$. Край $x_1 = 0$ свободен от нагрузки. Классические краевые условия имеют вид

$$(8.3) \quad m_{,\alpha}^{\alpha 1} + m_{,2}^{12} = 0, \quad m^{11} = 0$$

где $m^{\alpha\beta}$ — тензор изгибающих моментов. Уточненные краевые условия [3,16] содержат поправку во втором равенстве (8.3) (B — постоянная)

$$(8.4) \quad m^{11} + Bhm_{,2}^{12} = 0$$

В (8.4) принято, что движение вдоль оси x^2 оставляет пластинку слева.

Уточненные краевые условия можно использовать двумя способами: 1) решить задачу с краевыми условиями (8.3), вычислить m^{12} и найти поправку к решению — изгиб пластинки внешним моментом — $(Bhm^{12})_{,2}$; 2) решить задачу после «тривиальной экстраполяции», т. е. непосредственно с уточненными краевыми условиями.

Рассмотрим второй способ. Для простоты положим $\lambda = 0$, $2\mu = 1$, так что $m^{11} = u_{,11}$, $m^{12} = u_{,12}$, $m^{22} = u_{,22}$. Пусть внешние силы отсутствуют. Прогиб u — решение бигармонического уравнения $\Delta^2 u = 0$. Возьмем бигармоническую функцию вида $u = (a_1 + a_2 x_1) e^{kx_1} \sin kx_2$. Подстановка в уточненные краевые условия дает

$$(8.5) \quad ka_1 - a_2 = 0 \quad (1 - Bhk) ka_1 + (2 - Bhk) a_2 = 0$$

Определитель системы линейных уравнений (8.5) обращается в нуль при $k = 3 / (2Bh)$. Таким образом, при нулевых внешних силах имеются ненулевые решения. Естественно, что эти решения обладают большой изменчивостью ($l \sim h$) и выходят за рамки тех напряженных состояний, для которых строилась двумерная теория.

Если в правые части (8.3), (8.4) добавить внешние воздействия $P \sin (3x_2 / (2Bh))$ и $M \sin (3x_2 / (2Bh))$, то постоянные P и M всегда можно подобрать так, чтобы решения не существовало.

Вопрос о том, может ли сказаться отмеченное обстоятельство на устойчивости численного счета, требует дополнительного исследования. (В принципе, по-видимому, возможна постановка задачи с краевыми условиями (8.3), (8.4) и с дополнительным отбрасыванием решений с большой изменчивостью.)

Линеаризованный вариант изложенной выше основной уточненной теории можно рассматривать как один из возможных способов нетривиальной экстраполяции уточненной теории А. Л. Гольденвейзера на короткие волны. Единственность решения задач по линеаризованной основной уточненной теории следует из строгой выпуклости энергии, существование решения можно доказать стандартными методами вариационного исчисления.

Автор признателен Ле Хань Чау, проверившему все формулы и исправившему при этом ряд ошибок.

Поступила 20 VI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Friedrichs K. O. Kirchhoff's boundary conditions and the edge effect for elastic plates. Proc. Sympos. Appl. Math., 1950, vol. 3, No. 4, p. 117—124.
2. Friedrichs K. O., Dressler R. F. A boundary-layer theory for elastic plates. Commun. Pure and Appl. Math., 1961, vol. 14, No. 1.
3. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М., «Наука», 1976.
4. Green A. E. Boundary-layer equations in the linear theory of thin elastic shells. Proc. Roy. Soc. London. Ser. A, 1962, vol. 269, No. 1339, p. 481—491.
5. Ворович И. И. Некоторые результаты и проблемы асимптотической теории пластин и оболочек. Материалы 1 Всес. школы по теории и числ. методам расчета оболочек и пластин. Гегечкори, 1974. Тбилиси, Изд-во Тбилисс. ун-та, 1975.
6. Koiter W. T. A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells. Proc. Sympos. on the theory of thin elastic shells. Delft, 1959. Amsterdam, North-Holland, 1960.
7. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Л., Судпромгиз, 1962.

8. *John F.* Estimates for the derivatives of the stresses in a thin shells and interior shell equations. *Communs Pure and Appl. Math.*, 1965, vol. 18, No. 1—2.
9. *Sanders J. L. Jr.* Non-linear theories for thin shells. *Quart. Appl. Math.*, 1963, vol. 21, No. 1.
10. *Naghdi P. M.* On the theory of thin elastic shells. *Quart. Appl. Math.*, 1957, vol. 14, No. 4.
11. *Мосолов П. П.* Асимптотическая теория тонких прямолинейных панелей. Докл. АН СССР, 1972, т. 206, № 2.
12. *Мосолов П. П., Мясников В. П.* Асимптотическая теория жесткопластических оболочек. ПММ, 1977, т. 41, вып. 3.
13. *Шойхет Б. А.* Об асимптотически точных уравнениях тонких плит сложной структуры. ПММ, 1973, т. 37, вып. 5.
14. *Шойхет Б. А.* Одно энергетическое тождество в физически нелинейной теории упругости и оценки погрешности уравнений плит. ПММ, 1976, т. 40, вып. 2.
15. *Danielson D. A.* Improved error estimates in the linear theory of thin elastic shells. *Proc. Koninkl. nederl. acad. wet. B*, 1971, vol. 74, No. 3, p. 294—300.
16. *Koiter W. T., Simmonds J. G.* Foundations of shell theory. In: *Theoretical and applied mechanics. Proc. 13 Internat. Congr. Theor. and Appl. Mech. (Moscow, 1972)*. Berlin, Springer, 1973.
17. *Аксентян О. К., Устинов Ю. А.* Построение уточненных прикладных теорий для плиты на основе уравнений теории упругости. ПММ, 1972, т. 36, вып. 2.
18. *Heijden A. M. A. van der.* On modified boundary conditions for the free edge of a shell. Delft Univ. Press, 1976.
19. *Heijden A. M. A. van der.* An asymptotic analysis of a plate with a circular hole. *Lab. Engng Mech., Delft University of Technol., Rept 78*.
20. *Ladeveze P.* Justification de la theorie linearize des coques elastiques. *J. Mecanique*, 1976, vol. 15, No. 5.
21. *Бердичевский В. Л.* Об уравнениях теории анизотропных неоднородных стержней. Докл. АН СССР, 1976, т. 228, № 3.
22. *Бердичевский В. Л., Квашина С. С.* Об уравнениях, описывающих поперечные колебания упругих стержней. ПММ, 1976, т. 40, вып. 1.
23. *Бердичевский В. Л.* Вариационно-асимптотический метод. В сб.: *Некоторые вопросы механики сплошной среды*. Изд-во МГУ, 1978.
24. *Бердичевский В. Л.* Высокочастотные длинноволновые колебания пластин. Докл. АН СССР, 1977, т. 236, № 6.
25. *Квашина С. С.* Высокочастотные длинноволновые колебания упругих стержней. ПММ, 1979, т. 43, вып. 2.
26. *Бердичевский В. Л.* Об осреднении периодических структур. ПММ, 1977, т. 41, вып. 6.
27. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды, т. 2. Изд. 3. М., «Наука», 1976.
28. *Беккенбах Э. Ф., Беллман Р.* Неравенства. М., «Мир», 1965.
29. *Бердичевский В. Л.* К динамической теории тонких упругих пластин. Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 6.
30. *Бердичевский В. Л.* Энергетические методы в некоторых задачах о затухании решений. ПММ, 1978, т. 42, вып. 1.
31. *Григолюк Э. И., Селезов И. Т.* Неклассические теории колебаний стержней пластин и оболочек. М., ВИНТИ, 1973.