

**О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЧАСТИЦЫ СО СФЕРИЧЕСКИМ ПУЗЫРЕМ
В СЛУЧАЕ МАЛЫХ ЧИСЕЛ СТОКСА**

Е. Б. Кремер, Р. Ф. Нагаев

(Ленинград)

Рассматривается движение мелкой частицы в однородном на бесконечности стационарном потоке жидкости. Решение уравнений движения, отвечающее равномерному и прямолинейному погружению на бесконечности, получено в виде рядов по степеням числа Стокса. Это решение используется для описания единичного акта флотации, когда число Стокса достаточно мало и влияние инерционных факторов на движение частицы незначительно. Построены первые два приближения по числу Стокса значения критического прицельного расстояния, характеризующего вероятность столкновения частицы с поверхностью пузыря. Показано, что величина критического прицельного расстояния с точностью до немалых слагаемых не зависит от характера обтекания. Выявлена область, внутри которой столкновение частицы и пузыря маловероятно и поэтому процесс флотации неэффективен.

В работе [1] при решении аналогичной задачи предполагалось идеальное обтекание частицы, а влиянием инерционных факторов пренебрегалось. В работе [2] исследовалось не сближение частицы с поверхностью пузыря, а их непосредственное гидродинамическое взаимодействие через тонкую прослойку жидкости.

1. Уравнения движения частицы и порождающее приближение задачи. Уравнение движения мелкой сферической частицы в жидкости в безразмерных переменных запишем, согласно [3], в виде

$$(1.1) \quad K \left(1 + \frac{\kappa}{2} \right) \frac{d\eta}{d\tau} = \frac{3}{2} K\kappa \frac{d\xi}{d\tau} - G\mathbf{j} - (\eta - \xi) - \\ - 3 \sqrt{\frac{K\kappa}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\tau} \left(\frac{d\eta}{d\tau} - \frac{d\xi}{d\tau} \right)_{\tau=\tau'} \frac{d\tau'}{\sqrt{\tau - \tau'}} + \frac{3}{2} \frac{K\kappa}{R} \frac{d}{d\rho} \frac{d\xi}{d\rho}$$

$$\eta = \frac{d\rho}{d\tau}$$

$$\eta = v/V, \quad \xi = u/V, \quad \tau = Vt/L, \quad \rho = r/L = \tau_0/\varepsilon$$

$$\kappa = d_1/d_2, \quad G = \frac{2}{9} (d_2 - d_1) ga^2 / (\mu V)$$

$$K = \frac{2}{9} Va^2 d_2 / (L\mu), \quad R = 2LVd_1 / \mu$$

Здесь a и d_2 — характерный размер и плотность частицы; d_1 и μ — плотность и динамическая вязкость жидкости; g — ускорение силы тяжести; \mathbf{j} — единичный вектор, направленный вертикально вверх; \mathbf{r} — радиус-вектор центра частицы, $\mathbf{v}(t)$ и $\mathbf{u}(r, t)$ — векторы скорости частицы и жидкости соответственно; L и V — характерные линейный и скоростной масштабы течения; K и R — числа Стокса и Рейнольдса; $d/d\rho$ —

оператор Гамильтона; $\partial u / \partial r$ — матрица размерности 3×3 . Производная $du / dt = \partial u / \partial t + v \partial u / \partial r$ скорости жидкой частицы и ускорение твердой частицы dv / dt вычисляются под интегралом (1.1) в момент $t = t'$ при $r = r(t')$.

Предположим, что течение жидкости стационарно, осесимметрично и имеет на бесконечности скорость V . В сферической системе координат (r, φ) , связанной с некоторой точкой на оси симметрии, для функции тока $\Psi(r, \varphi)$ имеем

$$(1.2) \quad r \rightarrow \infty, \quad \Psi = -\frac{1}{2} V r^2 \sin^2 \varphi$$

Безразмерные радиальная ζ_r и тангенциальная ζ_φ составляющие скорости жидкости определяются соотношениями

$$\zeta_r = \frac{\varepsilon^2}{\sin \varphi} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \quad \zeta_\varphi = \frac{\varepsilon^3}{\sin \varphi} \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon}, \quad \psi = \frac{\Psi}{V L^2} \quad (\varepsilon = \frac{L}{r})$$

Соотношения (1.1) эквивалентны четырем интегро-дифференциальным уравнениям относительно неизвестных $\varepsilon, \varphi, \eta_r = \eta \tau_r$ и $\eta_\varphi = \eta \tau_\varphi$. Понижим порядок этой системы, проектируя второе уравнение (1.1) на радиальное направление. Второе уравнение (1.1) принимает вид

$$\eta_r \varepsilon d\varphi / d\varepsilon + \eta_\varphi = 0$$

Для случая малых чисел Стокса ($K \ll 1$) будем искать решение в виде

$$(1.3) \quad \eta = \sum_{n=0}^{\infty} K^{n/2} \eta_n, \quad \varphi = \sum_{n=0}^{\infty} K^{n/2} \varphi_n$$

В порождающем приближении ($K = 0$) получим

$$(1.4) \quad \eta_0 - \zeta_0 + G j = 0, \quad \eta_{r0} \varepsilon d\varphi_0 / d\varepsilon + \eta_{\varphi 0} = 0 \\ \zeta_0 = \zeta|_{\varphi=\varphi_0}, \quad \eta_{r0} = \eta_0 \tau_{r0}, \quad \eta_{\varphi 0} = \eta_0 \tau_{\varphi 0}$$

Здесь τ_{r0} и $\tau_{\varphi 0}$ — орты порождающей траектории частицы. В порождающем приближении учитываются только архимедова сила и сила вязкого сопротивления движению Стокса. В этом приближении задача решалась в работе [1] для идеального обтекания сферического пузыря. Подставляя выражения для η_{r0} и $\eta_{\varphi 0}$, вытекающие из первого векторного уравнения (1.4), во второе уравнение, придем к уравнению порождающей траектории частицы

$$(1.5) \quad \frac{G}{2} \frac{\sin^2 \varphi_0}{\varepsilon^2} - \psi_0 = \frac{G+1}{2} \xi^2, \quad \psi_0 = \psi(\varepsilon, \varphi_0)$$

Здесь ξ — постоянная интегрирования. Переходя в (1.5) к пределу $\varepsilon \rightarrow 0$, в силу (1.2) найдем, что постоянная ξ есть безразмерное прицельное расстояние (отношение расстояния от прямолинейной траектории частицы до вертикальной оси симметрии к характерному размеру L).

Для получения общего решения уравнений в вариациях порождающей системы (1.4) в силу теоремы Пуанкаре [4] достаточно найти производную $\delta\varphi_0 / \delta\xi$. В результате получим

$$(1.6) \quad \delta\varphi = A \varepsilon^2 / (G \cos \varphi_0 \sin \varphi_0 - \varepsilon^2 \partial \psi_0 / \partial \varphi_0), \quad A = \text{const}$$

Асимптотическое поведение вариации $\delta\varphi$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеет, согласно (1.4), вид

$$\delta\varphi = A\varepsilon / (\xi \sqrt{G+1}).$$

Уравнения для определения последовательных приближений $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ представляют собой линейные неоднородные дифференциальные уравнения первого порядка, однородные части которых совпадают с уравнением в вариациях порождающей системы. Поэтому их общие решения представляются в виде суммы частного решения, отвечающего правой части, и решения однородного уравнения, совпадающего с (1.6). Будем предполагать, что 1) постоянные в однородных частях общих решений (такие, как A в (1.6)), обращаются в нуль; 2) частные решения, отвечающие правым частям, при $\varepsilon \rightarrow 0$ убывают как ε^α , где $\alpha \geq 2$. Последнее всегда можно осуществить, добавляя в частное решение слагаемое типа (1.6). Дополнительный учет однородных решений типа (1.6) эквивалентен замене постоянной ξ в интеграле (1.5) разложением $\xi + \sqrt{K}\xi_1 + O(K)$. Следовательно, в силу того, что $\partial\varphi_i / \partial\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$, величина ξ есть истинное (а не только порождающее) прицельное расстояние

$$\xi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon^{-1} \sin \varphi)$$

Отметим, что малый параметр K в исходной системе (1.1) является коэффициентом при старшей производной $d\eta / d\tau$ и порядок порождающей системы (1.4) соответственно на два ниже порядка исходной. Поэтому в виде рядов (1.3) удастся построить только частное решение (1.1), зависящее от одной постоянной ξ и соответствующее равномерному осаждению частицы на бесконечности.

Определим теперь коэффициенты разложения (1.3). Дифференцируя первое уравнение (1.4) по τ и учитывая, что $d\dot{j} / d\tau = 0$, получим

$$(1.7) \quad d\eta_0 / d\tau - \eta_0 (d\xi / d\rho)_0 = 0$$

Здесь круглые скобки означают, что компоненты матрицы $d\xi / d\rho$ вычисляются в порождающем приближении. Приравнявая коэффициенты при \sqrt{K} в уравнениях (1.1) с учетом (1.7), получим для неизвестных η_1 и φ_1 однородную систему, имеющую вид уравнений в вариациях порождающей системы. Это означает, что $\eta_1 = \varphi_1 = 0$ и интегральное слагаемое в первом уравнении (1.1) влияет только на приближение порядка $O(K^{3/2})$.

2. Построение второго и третьего приближений. Определим проекции векторов η_i ($i = 2, 3$) на порождающие полярные направления τ_{ρ_0} и τ_{φ_0} . Поскольку направления порождающих τ_{ρ_0} и τ_{φ_0} и истинных τ_ρ и τ_φ полярных ортов отличаются друг от друга на малый угол $\varphi - \varphi_0 = K\varphi_2 + O(K^{3/2})$, следовательно

$$\tau_\rho = \tau_{\rho_0} + \varphi_2 \tau_{\varphi_0} K + \varphi_3 \tau_{\varphi_0} K^{3/2} + O(K^2)$$

$$\tau_\varphi = \tau_{\varphi_0} - \varphi_2 \tau_{\rho_0} K - \varphi_3 \tau_{\rho_0} K^{3/2} + O(K^2)$$

Радиальная и тангенциальная составляющие скорости частицы представляются в виде разложений

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \eta_\rho &= \eta_{\rho 0} + (\eta_{\rho 2} + \varphi_2 \eta_{\varphi 0}) K + (\eta_{\rho 3} + \varphi_3 \eta_{\varphi 0}) K^{3/2} + O(K^2) \\ \eta_\varphi &= \eta_{\varphi 0} + (\eta_{\varphi 2} - \varphi_2 \eta_{\rho 0}) K + (\eta_{\varphi 3} - \varphi_3 \eta_{\rho 0}) K^{3/2} + O(K^2) \end{aligned}$$

Отметим, что порождающие орты $\tau_{\rho 0}$ и $\tau_{\varphi 0}$ не зависят от числа Стокса K .

Предполагая, что $\kappa / R = O(K)$, запишем уравнения для определения приближений порядка $O(K)$ с учетом (2.1) в виде

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \eta_{\rho 2} &= \lambda \left(\frac{d\eta_{\rho 0}}{d\varepsilon} + \frac{\eta_{\varphi 0}^2}{\varepsilon \eta_{\rho 0}} \right) + \varphi_2 \left(\frac{\partial \eta_{\rho 0}}{\partial \varphi_0} - \eta_{\varphi 0} \right) \\ \eta_{\varphi 2} &= \lambda \left(\frac{d\eta_{\varphi 0}}{d\varepsilon} - \frac{\eta_{\varphi 0}}{\varepsilon} \right) + \varphi_2 \left(\frac{\partial \eta_{\varphi 0}}{\partial \varphi_0} + \eta_{\rho 0} \right) \\ \varepsilon \frac{d\varphi_2}{d\varepsilon} + \frac{\partial}{\partial \varphi_0} \left(\frac{\eta_{\varphi 0}}{\eta_{\rho 0}} \right) \varphi_2 &= \lambda \left[\frac{d}{d\varepsilon} \left(\frac{\eta_{\varphi 0}}{\eta_{\rho 0}} \right) - \frac{\eta_{\varphi 0}}{\varepsilon \eta_{\rho 0}} \left(1 + \frac{\eta_{\varphi 0}^2}{\eta_{\rho 0}^2} \right) \right] \\ \lambda &= (1 - \kappa) \eta_{\rho 0} \varepsilon^2, \quad \frac{d}{d\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} + \frac{d\varphi_0}{d\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \varphi_0} \end{aligned}$$

Поправка φ_2 представляет собой частное решение последнего уравнения (2.2), удовлетворяющее условию $\varphi_2 / \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$. Это решение в силу (1.6) приводится к виду

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \varphi_2 &= -(1 - \kappa) F_1(\varepsilon, \xi) / (\eta_{\rho 0} \sin \varphi_0) \\ F_1 &= \int_0^\varepsilon \eta_{\rho 0}^2 \sin \varphi_0 \left[\varepsilon \left(\frac{d\varphi_0}{d\varepsilon} \right)^3 - \frac{d^2 \varphi_0}{d\varepsilon^2} \right] d\varepsilon \end{aligned}$$

Последующие приближения порядка $O(K^{3/2})$ определяются из системы

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \eta_3 &= \varphi_3 \sigma + 3 \sqrt{\kappa / 2\pi} (1 - \kappa) A \\ \sigma_\rho &= \partial \eta_{\rho 0} / \partial \varphi_0 - \eta_{\varphi 0}, \quad \sigma_\varphi = \partial \eta_{\varphi 0} / \partial \varphi_0 + \eta_{\rho 0} \\ \varepsilon \frac{d\varphi_3}{d\varepsilon} + \frac{\partial}{\partial \varphi_0} \left(\frac{\eta_{\varphi 0}}{\eta_{\rho 0}} \right) \varphi_3 &= 3 \sqrt{\frac{\kappa}{2\pi}} (1 - \kappa) \frac{1}{\eta_{\rho 0}^2} (\eta_0 \times A) k \\ A &= \int_{-\infty}^\tau \left(\frac{d^2 \eta_0}{d\tau^2} \right)_{\tau=\tau'} \frac{d\tau'}{\sqrt{\tau - \tau'}} \end{aligned}$$

Здесь k — единичный вектор, перпендикулярный плоскости движения частицы.

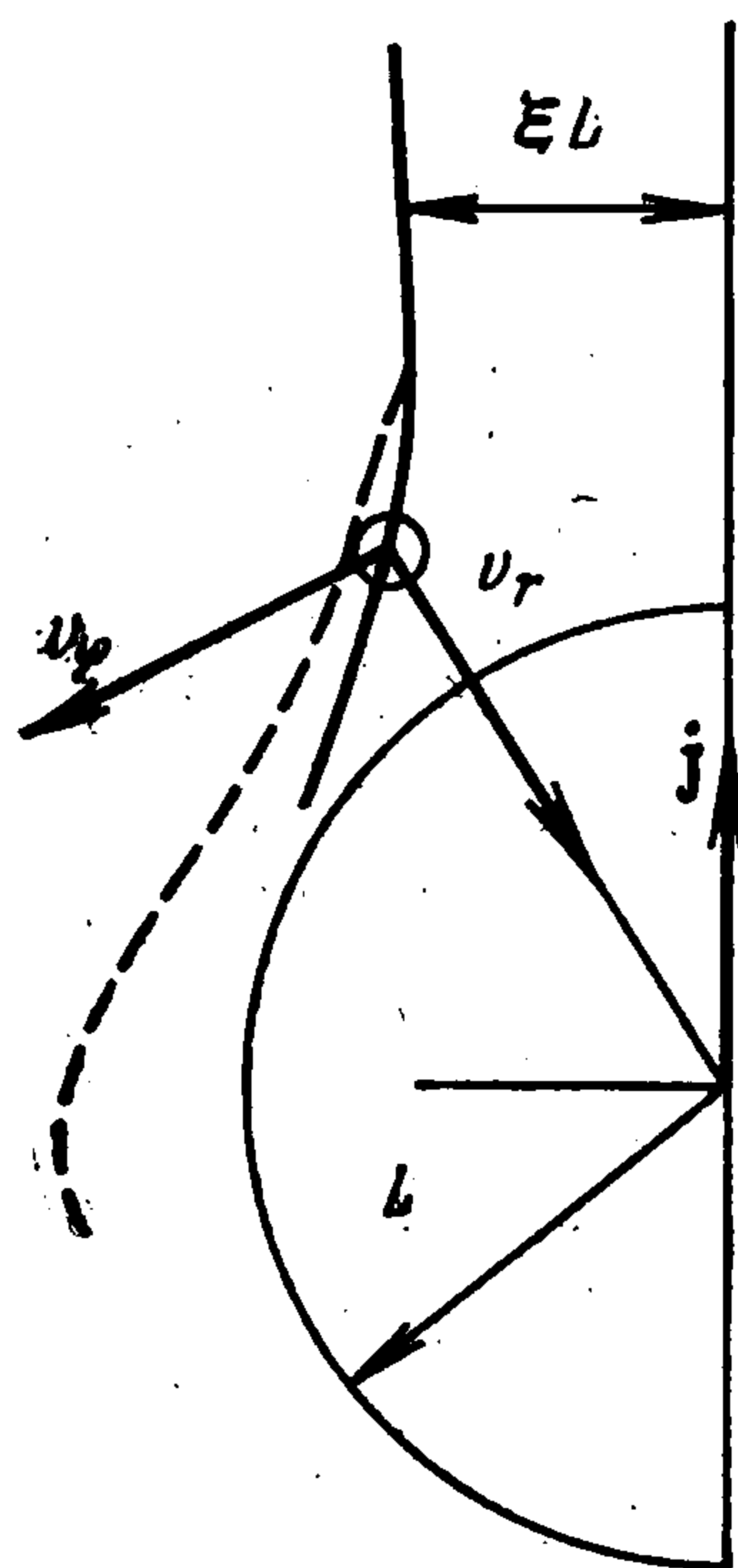
После интегрирования последнего уравнения (2.4) получим

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \varphi_3 &= 3 \sqrt{\kappa / 2\pi} (1 - \kappa) \varepsilon^2 F_2(\varepsilon, \xi) / (\eta_{\rho 0} \sin \varphi_0) \\ F_2 &= - \int_0^\varepsilon \frac{\sin \varphi_0}{\eta_{\rho 0} \varepsilon^3} \left\{ \eta_0 \times \int_0^\varepsilon \frac{d}{d\varepsilon'} \left(\varepsilon'^2 \eta_{\rho 0}' \frac{d\eta_0'}{d\varepsilon'} \right) \frac{d\varepsilon'}{\Lambda} \right\} k d\varepsilon \\ \Lambda &= \left(\int_\varepsilon^{\varepsilon'} \frac{d\varepsilon''}{\varepsilon''^2 \eta_{\rho 0}''} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

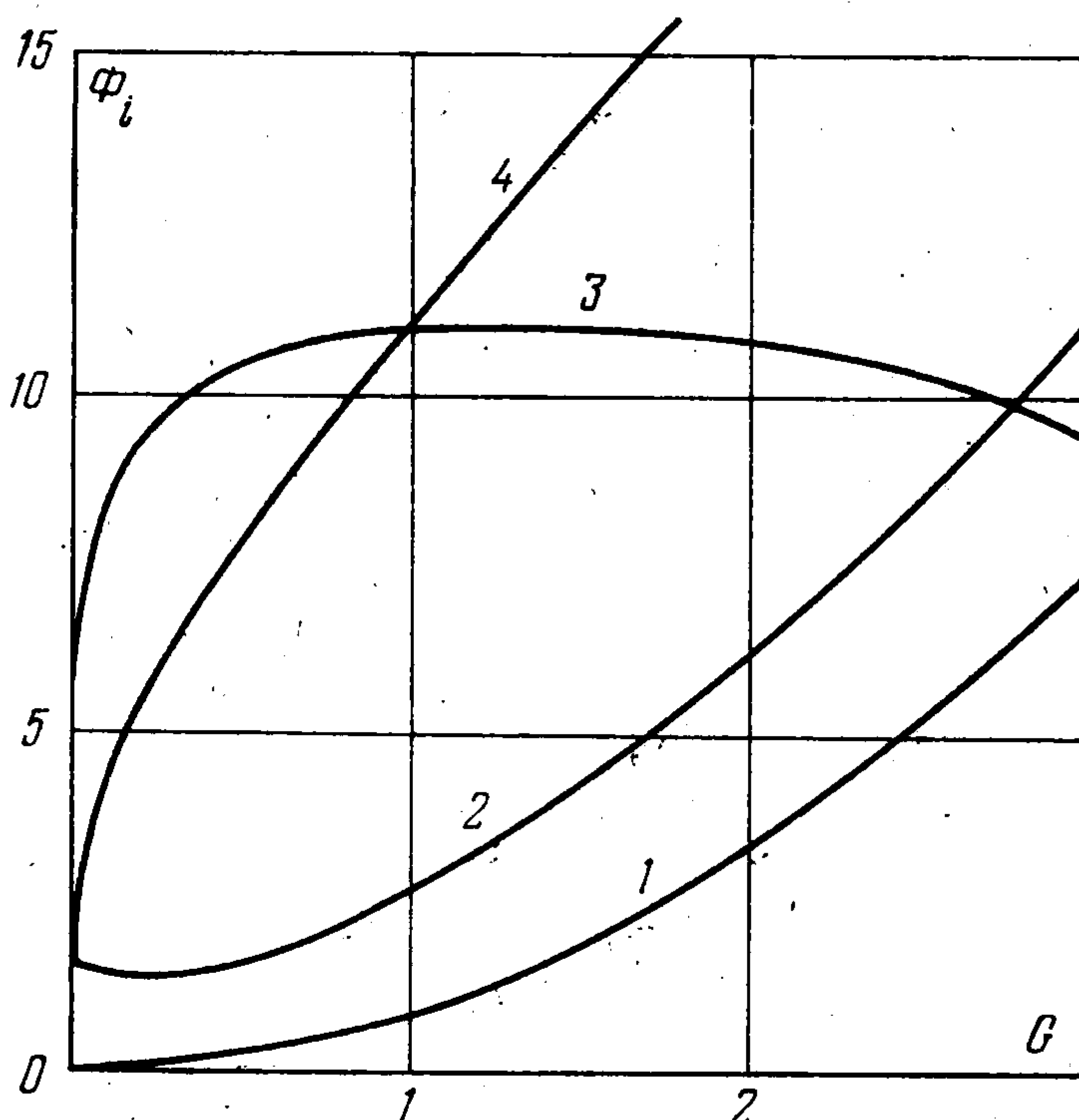
Здесь штрихи означают, что соответствующие величины вычисляются при $\varepsilon = \varepsilon'$ ($\varepsilon = \varepsilon''$). Из (2.5) следует, что третья поправка φ_3 удовлетворяет условию $\varphi_3 / \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ и, следовательно, (2.5) является искомым решением.

Отметим, что приближение порядка $O(K)$ характеризует влияние инерционности частицы и эффекта присоединенной массы. Последующее приближение порядка $O(K^{3/2})$ является поправкой на нестационарность обтекания частицы с учетом инерционности и эффекта присоединенной массы. Построенное решение справедливо для любого стационарного осесимметричного течения, однородного на бесконечности.

3. Критическое прицельное расстояние. Рассмотрим движение частицы около сферического пузыря, всплывающего с постоянной скоростью V (фиг. 1). Для этого свяжем полярную систему координат (r, φ) с центром



Фиг. 1



Фиг 2.

пузыря и примем в качестве линейного масштаба течения L радиус пузыря. Характер стационарного обтекания пузыря жидкостью определяется величиной числа Рейнольдса. Если $R \gg 1$, то обтекание близко к идеальному и, согласно [5], с точностью до величин высшего порядка малости будем иметь

$$(3.1) \quad \psi = - \frac{1 - \varepsilon^3}{2\varepsilon^2} \sin^2 \varphi + \frac{16}{3R} \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} (2 + \cos \varphi) \times \\ \times \left[\frac{1}{2} \operatorname{erfc} z - \frac{1}{2} + \int_0^z z \operatorname{erfc} z dz \right], \quad 0 < \varepsilon \leq 1 \\ z = {}^{3/2} \sqrt{R} (1 - \varepsilon) \varepsilon^{-1} \cos^2(\varphi/2) / \sqrt{2 - \cos \varphi}$$

Если $R \ll 1$ (согласно оценке (2.4), это означает, что рассматриваются тяжелые частицы в том смысле, что $\kappa < O(a/L)$), обтекание близко к стоксову и справедливо следующее разложение Озеена [6]

$$(3.2) \quad \psi = - [2 + \varepsilon + {}^{3/8} R (2 + \varepsilon - (2 + \varepsilon + \varepsilon^2) \cos \varphi) + \\ + O(R^2)] \times {}^{1/4} \varepsilon^{-2} (1 - \varepsilon)^2 \sin^2 \varphi, \quad O(R) < \varepsilon \leq 1$$

Критическая траектория частицы касается поверхности пузыря, т. е. $\varphi_0 = 0$ при $\varepsilon = 1$. По мере приближения к поверхности пузыря возрастает

роль сил типа Магнуса, обусловленных вращением частицы в неоднородном внешнем потоке. Учет этого фактора приводит к дополнительному слагаемому вида $K [(d/d\rho) \times \xi] \times (\eta - \xi)$ в уравнении (1.1). Однако в силу принятого порождающего приближения, этот член имеет порядок $O(K^2)$. Уравнение для определения критического прицельного расстояния $\xi = \chi$ имеет в силу (1.5), (2.2) и (2.4) вид

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \Omega_0 + (1 - \kappa) K \Omega_1 + 3 \sqrt{\frac{\kappa}{2\pi}} \frac{1 - \kappa}{G} K^{3/2} \Omega_2 + O(K^2) &= 0 \\ \Omega_0 &= 1 - \chi^2 (G + 1) / G \\ \Omega_1 &= \Omega_0 \left(\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \varepsilon \partial \varphi_0} \right)_{\varepsilon=1} \frac{1}{\chi} \sqrt{\frac{G}{G+1}} - \Omega_1^* \\ \Omega_1^* &= \Omega_0^{1/2} \left[1 + \frac{(\partial \psi_0 / \partial \varepsilon)_{\varepsilon=1}}{(G+1)\chi^2} \right] \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=1} - \frac{F(1, \chi)}{G} \\ \Omega_2 &= \Omega_0^{1/2} A_0(1, \chi) + F_2(1, \chi) \end{aligned}$$

Решение трансцендентного уравнения (3.3) представимо в виде ряда

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \chi^2 &= \frac{1}{1+G} [G - (1 - \kappa) \Phi_1 K + 3 \sqrt{\frac{\kappa}{2\pi}} (1 - \kappa) \Phi_2 K^{3/2} + O(K^2)] \\ \Phi_i &= F_i(1, \sqrt{G/(G+1)}) \quad (i = 1, 2) \end{aligned}$$

При определении коэффициентов ряда (3.4) учитывалось, что функция тока обтекания пузыря при любых значениях R представима в виде $\psi = (1 - \varepsilon) \theta(\varepsilon, \varphi)$, $\theta(1, \varphi) < \infty$.

Вследствие этого из квадратуры $F_1(1, \chi)$ выделяется несобственная часть, аналитичная по \sqrt{K}

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{f_1(\varepsilon, K) d\varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon + K f_2(\varepsilon K)}} &= \int_0^1 \frac{f_1(\varepsilon, 0) d\varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon}} - 2f_1(1, 0) \sqrt{f_2(1, 0) K} + O(K) \\ f_1 &= \varepsilon^{-2} \sigma_\rho \eta_{\varphi_0}^2 \sin^2 \varphi_0 P^{-1/2} + O(K^{1/2}) \\ f_2 &= (1 - \kappa) G \Phi_1 \varepsilon^2 P^{-1} + O(K^{1/2}) \\ P &= G^2 \left(1 - \varepsilon - \frac{2\varepsilon^2}{G} \theta_0 \right) - 2G\varepsilon^2 \operatorname{ctg} \varphi_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial \varphi_0} + \frac{(1 - \varepsilon) \varepsilon^4}{\sin^2 \varphi_0} \left(\frac{\partial \theta_0}{\partial \varphi_0} \right)^2 \\ \theta_0 &= \theta(\varepsilon, \varphi_0) \end{aligned}$$

Критическое прицельное расстояние в первом приближении ($K = 0$) не зависит от характера обтекания (числа Рейнольдса) и отношения плотностей частицы и жидкости κ . Квадратуры Φ_1 и Φ_2 являются функциями числа Рейнольдса и при $R = 0$ и $R = \infty$, [согласно (2.3), (2.5), (3.1), (3.2) и (3.4), имеют соответственно вид

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \Phi_1 &= G \int_0^1 \frac{f - \varepsilon f'/2}{f^2 \sqrt{1 - G\varepsilon^2/f}} X_1 d\varepsilon \\ X_1 &= 3/2 \varepsilon f f' + f^2 - (2\varepsilon f f' + f^2 - \varepsilon^2 f'^2 / 4) G \varepsilon^2 f \\ \Phi_2(G) &= \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{\operatorname{tg} \varphi_0 d\varepsilon}{f \varepsilon^3} \int_0^\varepsilon \frac{dX_2}{d\varepsilon'} \frac{d\varepsilon'}{\Lambda^*} \\ X_2 &= \varepsilon'^2 f' \cos \varphi' d(\sigma_1' \sigma_2 - \sigma_1 \sigma_2') / d\varepsilon' \end{aligned}$$

$$\Lambda_* = \left(\int_{\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{d\varepsilon''}{f'' \varepsilon''^2 \cos \varphi''} \right)^{1/2}$$

$$f|_{R=\infty} = G + 1 - \varepsilon^3, \quad f|_{R=0} = G + (2 + \varepsilon)(1 - \varepsilon)^2 / 2$$

$$\sigma_1(\varepsilon) = \varepsilon f' \sin 2\varphi, \quad \sigma_2(\varepsilon) = f - Gf\varepsilon^3 / f; \quad (') = d/d\varepsilon$$

Зависимости $\Phi_i^{(d)} = \Phi_i|_{R=\infty}$ и $\Phi_i^{(s)} = \Phi_i|_{R=0}$ ($i = 1, 2$) от параметра G приведены на фиг. 2. Здесь кривые 1—4 соответствуют $\Phi_1^{(s)}$, $\Phi_1^{(d)}$, $\Phi_2^{(d)}$ и $\Phi_2^{(s)}$.

Пусть $R \gg 1$ и, следовательно, справедливо выражение (3.1). Введя в квадратурах Φ_1 и Φ_2 замену переменной интегрирования $\varepsilon \rightarrow z$ согласно (3.1), из (3.5) с точностью до величин высшего порядка малости получим

$$\begin{aligned} (3.6) \quad \Phi_1 &= \Phi_1^{(d)} + 2.65 R^{-3/4} G^{-1/2} (4G^2 + G - 9) \\ \Phi_2 &= \Phi_2^{(d)} + R^{-3/4} G^{-1/4} (67.69 + 62.98G + 10.57G^2) \end{aligned}$$

Следует отметить, что разложения (3.6) непригодны при $GR^{3/2} \rightarrow 0$.

Полученные результаты свидетельствуют о существовании «зоны нефлотиремости» в случаях, когда $1 \gg G \gg R^{-3/2}$. Под зоной нефлотиремости здесь понимается область в пространстве безразмерных критериев подобия задачи G, R, κ, K , внутри которой $\chi \equiv 0$ и поэтому столкновение частицы с поверхностью пузыря невозможно. Размеры этой зоны определяются из условия положительности выражения (3.4).

Поступила 17 VII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Богданов О. С., Кизевальтер Б. В. Некоторые итоги изучения физики флотационного процесса. Тр. 2-й науч.-техн. сессии ин-та Механобр. М., Metallurgizdat, 1952.
2. Духин С. С., Рулев Н. И. Гидродинамическое взаимодействие твердой сферической частицы с пузырьком в элементарном акте флотации. Коллоидный ж., 1977, т. 39, № 2.
3. Бусроид Р. Течение газа со взвешенными частицами. М., «Мир», 1975.
4. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.—Л., Гостехиздат, 1950.
5. Moore D. W. The Boundary layer on a spherical gas bubble. J. Fluid. Mech., 1963, vol. 16, No. 7.
6. Найфе А. Методы возмущений. М., «Мир», 1976.