Прикладная математика и механика. Том 43, 1979

УДК 532.72

О МАССООБМЕНЕ ДВИЖУЩЕЙСЯ ЦЕПОЧКИ ПОГЛОЩАЮЩИХ КАПЕЛЬ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТА НАСЫЩЕНИЯ

А. Д. Полянин

(Москва)

Исследуется массообмен цепочки поглощающих капель при малых числах Рейнольдса и больших числах Пекле для простейшей математической модели внутренней диффузии — модели полного перемешивания внутри капель диффундирующего через их поверхность вещества. Полученные результаты обобщают результаты работ [1–4], соответствующие предельному случаю малых интервалов времени. Показано, что учет внутренней диффузии ввиду насыщения капель со временем приводит к существенному изменению кинетики системы: в частности, для капель равных радиусов всегда существует интервал времени, в котором фиксированная капля цепочки поглощает растворенного в потоке вещества больше, чем остальные капли цепочки.

Ранее [1–4] рассматривалась задача о стационарной конвективной диффузии к цепочке реагирующих частиц при условии полного поглощения вещества на их поверхностях и больших числах Пекле. Было показано, что взаимодействие диффузионного пограничного слоя каждой частицы с диффузионным следом впереди идущей приводит к значительному уменьшению полного диффузионного потока на ее поверхность (по сравнению с тем, который она имела бы при отсутствии этого взаимодействия). В связи с тем, что капли могут поглощать лишь ограниченное количество растворенного в потоке вещества, подобная упрощающая постановка задачи оправдывается в случаях, когда можно пренебречь изменением концентрации вещества внутри капель (например при анализе слабого поглощения или сравнительно небольших промежутков времени).

1. Постановка задачи. Рассмотрим процесс конвективной диффузии к цепочке поглощающих капель равного радиуса a, движущихся на равных расстояниях одна от другой с одинаковой скоростью U. Считаем, что вдали от капель концентрация растворенного в потоке вещества постоянна и равна C_0, а внутри капель происходит полное перемешивание диффундирующего через их поверхность вещества, т. е. концентрация внутри и на поверхности одинакова и равна C_k^+ (где k — номер капли в цепочке, а нумерация ведется от впереди идущей капли). При этом концентрация вещества C вне капли и концентрация C_k^+ внутри нее связаны законом сохранения массы, т. е. полное изменение вещества внутри капли в единицу времени $^4/_3\, \pi a^3 dC_k^+ / dt$ должно равняться полному притоку диффундирующего вещества из окружающей жидкости

$$I_k{}^* = 2\pi a^2 D \int\limits_0^\pi \left[\frac{\partial C}{\partial r_k}\right]_{r_k=a} \sin\theta_k\, d\theta_k$$

Здесь r_k, θ_k — сферическая система координат, связанная с центром k-й капли. Видно, что концентрация внутри капли зависит от ее порядкового номера и времени.

В дальнейшем считаем, что число Рейнольдса капли $R = aU\nu^{-1}$ мало, а число Пекле $P = aUD^{-1}$ велико (ν — кинематическая вязкость жидкости, D — коэффициент диффузии).

В [5] показано, что при условии полного поглощения на поверхности частицы $C_1^+ = 0$ и $P \gg 1$ полный диффузионный поток на нее $I_1^* \sim \sim aDC_0P^{1/(n+1)}$, где $n = 1$ соответствует каплям умеренной вязкости $\beta \leqslant O(1)$, а $n = 2$ — каплям большой вязкости $\beta > O(P^{1/2})$; β — отношение вязкостей капли и окружающей ее жидкости. Значению $n = 2$ соответствует также случай капель умеренной вязкости в присутствии поверхностно-активных веществ [5].

Используя закон сохранения массы и указанное соотношение для полного диффузионного потока I_1^*, получаем, что характерное время изменения концентрации внутри капли будет $\lambda aU^{-1}P^{n/(n+1)}$, где числовой коэффициент $\lambda = O(1)$ будет указан позже. Это время в дальнейшем взято в качестве масштаба при введении безразмерного времени τ.

В безразмерных переменных краевая задача для определения концентраций c и c_k^+ вне и внутри капель может быть записана в виде

$$\frac{\varepsilon^n}{\lambda}\frac{\partial c}{\partial \tau} + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\left(\frac{\partial c}{\partial r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{\partial c}{\partial \theta}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) = \tag{1.1}$$
$$= \varepsilon^{n+1}\left\{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial c}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial c}{\partial \theta}\right)\right\}$$

$$r_k = 1, \quad c = c_k^+(\tau); \quad r \to \infty, \quad c \to 1; \quad \tau = 0, \quad c = c^*(r, \theta)$$

$$\frac{dc_k^+}{d\tau} = \frac{3\varepsilon\lambda}{4\pi} I_k = \frac{3}{2}\lambda\int_0^\pi \varepsilon\left[\frac{\partial c}{\partial r_k}\right]_{r_k=1} \sin\theta_k\, d\theta_k \tag{1.2}$$

$$c_k^+(0) = 0; \quad \varepsilon = P^{-1/(n+1)}, \quad n = 1, 2; \quad k = 1, 2, \ldots, M$$

Здесь r, θ — сферическая система координат, связанная с центром некоторой фиксированной капли, а характерными масштабами являются: радиус капли a и ее скорость U, время $\lambda aU^{-1}\varepsilon^{-n}$, концентрация C_0; функция тока ψ считается известной из решения соответствующей задачи о гидродинамическом обтекании. Начальное условие для концентрации $c^*(r,\theta)$ задается решением стационарного ($\partial / \partial\tau = 0$) уравнения конвективной диффузии (1.1) при условии полного поглощения растворенного в жидкости вещества на поверхностях капель $c_1^+ = c_2^+ = \ldots = c_M^+ = 0$.

Задача (1.1) подробно исследовалась в стационарном случае и $c_1^+ = = c_2^+ = \ldots = c_M^+ = \mathrm{const}$ при $n = 1$ в работах [1, 2], а при $n = 2$ — в [3,4]. Методом сращиваемых асимптотических разложений по малому параметру ε было показано, что в потоке вблизи каждой капли существуют несколько характерных областей с различным механизмом массопереноса. Это внешняя область e, область диффузионного пограничного слоя $d = \{r - 1 < O(\varepsilon), O(\varepsilon) < \theta\}$ (выражение в фигурных скобках указывает порядок характерных размеров рассматриваемой области, индекс k

у сферических координат опущен) и диффузионный след W, который в свою очередь состоит из четырех подобластей: конвективно-погранслойной области $W^{(1)} = \{O(\varepsilon) < r - 1 < O(\varepsilon^{-1}), O(\varepsilon^{n+1}) < \psi < O(\varepsilon^n)\}$, внутренней области диффузионного следа $W^{(2)} = \{O(\varepsilon) < r - 1 < O(\varepsilon^{-1}), \psi < O(\varepsilon^{n+1})\}$, окрестности задней критической точки $W^{(3)} = \{r - 1 < O(\varepsilon), \theta < O(\varepsilon)\}$ и области смешения $W^{(4)} = \{O(\varepsilon^{-1}) < r - 1, \psi < O(\varepsilon^n)\}$.

Как уже отмечалось, в стационарном случае концентрация быстро меняется вблизи поверхности капли (в пределах погранслоя) и $[\partial c / \partial r_k]_{r_k=1} \sim \varepsilon^{-1}$. Поэтому величина интеграла в правой части уравнения (1.2) имеет порядок единицы.

В нестационарной задаче (1.1), (1.2) при $\varepsilon \to 0$, так же как и в стационарном случае, величина конвективного члена $(v\nabla) c$ в областях d, $W^{(3)}$ пропорциональна $O(\varepsilon^{n-1}) c$, а в областях $W^{(1)}$, $W^{(2)}$, $W^{(4)}$ она пропорциональна $O(1) c$; при этом порядок правой части уравнения (1.1) в соответствующих областях будет следующим: в d, $W^{(3)}$ — $\varepsilon^{n-1}c$, в $W^{(1)}$ — εc, а в $W^{(2)}$ и $W^{(4)}$ — $O(1) c$. Поэтому, проводя последовательную процедуру нахождения уравнений и граничных условий в характерных областях, аналогично тому как это делалось в [1–4], получаем, что в главном члене разложения по малому параметру ε для концентраций $c_1^+, c_2^+, \ldots, c_k^+$; c член $\varepsilon^n \partial c / \partial \tau$ в уравнении (1.1) несуществен, а уравнения для концентраций внутри капель (1.2) остаются полностью в силу того, что $\varepsilon [\partial c / \partial r_k]_{r_k=1} \sim O(1)$.

Таким образом, решение исходной задачи (1.1), (1.2) разбивается на два последовательных этапа: 1) решение вспомогательной задачи

$$(1.3) \qquad (\mathbf{v}\nabla) c = \varepsilon^{n+1} \Delta c; \; r_k = 1, \; c = c_k^+; \; r = \infty, \; c = 1$$

при произвольных значениях c_k^+, куда время τ входит неявно как параметр и 2) решение автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(1.4) \qquad 4\pi \, dc_k^+ / d\tau = 3\varepsilon\lambda I_k, \; c_k^+(0) = 0 \; (k = 1, 2, \ldots, M)$$

в которой интегральный диффузионный поток I_k вычисляется, согласно (1.2), с использованием полученного решения задачи (1.3) для концентрации $c = c(r_k, \theta_k; c_1^+, \ldots, c_k^+)$. В силу начального условия для концентраций внутри капель $c_k^+(0) = 0$; таким образом, полученное решение автоматически удовлетворяет начальному условию при $\tau = 0$ в исходной задаче (1.1), (1.2).

Исследование вспомогательной задачи (1.3) может быть произведено аналогично [1–4]. Здесь ограничимся лишь изучением случая, когда безразмерное расстояние удовлетворяет следующему неравенству:

$$(1.5) \qquad O(1) < l < O(\varepsilon^{-1})$$

Левая часть неравенства для дальнейшего мало существенна и нужна лишь для придания конкретного вида функции тока вблизи поверхностей капель (при $1 \ll l$ в уравнении (1.3) приближенно может быть использована функция тока одиночной капли, см. п. 2). Правая часть неравенства существенна и означает, что диффузионный погранслой каждой капли взаимодействует с конвективно-погранслойной областью диффузионного следа впереди идущей капли [1–4].

В систему уравнений (1.4) входят полные потоки на поверхности капель, которые нужно находить из решения вспомогательной задачи (1.3). Для определения зависимости старшего члена разложения (по малому параметру ε) полного диффузионного потока I_k от концентраций c_1^+, $c_2^+, \ldots, c_k^+$ достаточно получить распределение концентрации в диффузионном пограничном слое k-й капли. Полученные выражения для интегральных потоков $I_k = I_k(c_1^+, c_2^+, \ldots, c_k^+)$ следует подставить в систему дифференциальных уравнений (1.4), описывающую изменение концентраций внутри капель во времени.

2. Решение вспомогательной задачи. Здесь будет получено решение более общей задачи, чем (1.3), (1.5). А именно, рассмотрим цепочку поглощающих сферических частиц равного радиуса, имеющих периодическую структуру поля обтекания [2,3]. В этом случае вблизи поверхности любой из частиц в сферической системе координат, связанной с ее центром, функцию тока можно представить в виде

$$\psi = (r-1)^n f(\theta),\ f \geqslant 0,\ n = 1, 2\ (r \to 1) \tag{2.1}$$

В частности, при выполнении условия (1.5) выражения $f = {}^1/_2 (1+\beta)^{-1} \sin^2\theta\ (n=1)$ и $f = {}^3/_4 \sin^2\theta\ (n=2)$ соответствуют стоксовому обтеканию капель умеренной ($\beta \leqslant O(1)$) и большой ($\beta > O(P^{1/3})$) вязкостей.

Распределение концентрации в диффузионном пограничном слое k-й сферы задается решением погранслойного уравнения с граничным условием постоянства концентрации на ее поверхности и условием натекания, которое определяется распределением концентрации в диффузионном следе $(k-1)$-й сферы [1–4]. Считая, что расстояние между сферами удовлетворяет неравенству $l < O(\varepsilon^{-1})$, получаем, что условие натекания определяется концентрацией в конвективно-погранслойной области диффузионного следа впереди идущей частицы.

Процедура получения уравнений, начальных и граничных условий для концентрации $c_k^{(d)}$ в диффузионном пограничном слое $(k-1)$-й частицы полностью аналогична [1–4] и приводит к следующей краевой задаче:

$$\begin{gathered}
\mathrm{L}_n(\xi, t)\, c_k^{(d)} = 0, \quad \mathrm{L}_n = \partial/\partial t - \xi^{1-n}\partial^2/\partial\xi^2 \\
c_k^{(d)}(0, t) = c_k^+, \qquad c_k^{(d)}(\infty, t) = 1 \quad (0 \leqslant t \leqslant t_0) \\
c_k^{(d)}(\xi, 0) = c_{k-1}^{(d)}(\xi, t_0), \quad c_0^{(d)} = 1; \quad t_0 = t(0) \\
t = t(\theta) = \frac{1}{n}\int_\theta^\pi \sin\theta f^{1/n}(\theta)\, d\theta, \quad \xi = \varepsilon^{-1}\psi^{1/n}, \quad k = 1, 2, \ldots, M
\end{gathered} \tag{2.2}$$

Задача (2.2) при $c_1^+ = c_2^+ = \ldots = c_k^+ = \mathrm{const}$ рассматривалась в [1–4]. Для получения решения (2.2) при произвольных значениях c_k^+ используем вспомогательную функцию (γ — неполная гамма-функция)

$$u(\xi, t) = \Gamma^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right)\gamma\left(\frac{1}{n+1}, \frac{\xi^{n+1}}{(n+1)^2 t}\right), \quad \Gamma(x) = \gamma(x, +\infty) \tag{2.3}$$

являющуюся решением задачи

$$\mathbf{L}_n(\xi, t)\, u = 0; \quad u(0, t) = 0, \quad u(\infty, t) = 1; \quad u(\xi, 0) = 1$$

С учетом свойств функции $u(\xi, t)$ по индукции можно доказать, что решение задачи (2.2) имеет вид

$$c_k^{(d)}(\xi, t) = c_k^+ + \sum_{\alpha=1}^{k} u(\xi, t + (k-\alpha)t_0)(c_{\alpha-1}^+ - c_\alpha^+) \tag{2.4}$$

$$c_0^+ = 1, \quad k = 1, 2, \ldots, M$$

При $c_1^+ = c_2^+ = \ldots = c_k^+ = 0$ из выражения (2.4) получаем результат $c_k^{(d)}(\xi, t) = u(\xi, t + (k-1)t_0)$ [1-4].

Для локальных и полных диффузионных потоков на поверхности частиц имеем

$$j_k(\theta) = [\partial c_k^{(d)} / \partial r]_{r=1} = \varepsilon^{-1} f^{1/n}(\theta)\, [\partial c_k^{(d)} / \partial \xi]_{\xi=0} = \tag{2.5}$$

$$= \varepsilon^{-1}\Gamma^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right)(n+1)^{(n-1)/(n+1)} f^{1/n}(\theta) \times$$

$$\times \sum_{\alpha=1}^{k} [t(\theta) + (k-\alpha)t_0]^{-1/(n+1)} (c_{\alpha-1}^+ - c_\alpha^+)$$

$$I_k = 2\pi \int_0^\pi j_k(\theta) \sin\theta\, d\theta = I \sum_{\alpha=1}^{k} a_{k\alpha}(c_{\alpha-1}^+ - c_\alpha^+)$$

$$I = 2\pi\varepsilon^{-1}\Gamma^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right)(n+1)^{2\sigma} t_0^{\sigma}, \quad c_0^+ \equiv 1$$

$$a_{k\alpha} = (k-\alpha+1)^\sigma - (k-\alpha)^\sigma, \quad \sigma = n/(n+1)$$

Полученные результаты с помощью [2,3] могут быть распространены на цепочки частиц произвольной формы в случае трехмерного обтекания и непериодической структуры поля течения (при наличии двух критических точек на поверхностях частиц). Для распределения концентраций в диффузионном погранслое и конвективно-погранслойной области диффузионного следа k-й частицы имеют место выражения

$$c_k^{(d)}(\xi, t) = c_k^+ + \sum_{\alpha=1}^{k} u\left(\xi, t + \sum_{\nu=\alpha}^{k-1} t_{\nu 0}\right)(c_{\alpha-1}^+ - c_\alpha^+) \tag{2.6}$$

$$c_k^{(1)}(\xi) = c_k^{(d)}(\xi, t_{k0}), \quad c_0^+ \equiv 1 \quad (0 \leqslant t \leqslant t_{k0}) \quad k = 1, 2, \ldots, M$$

в которых $\xi = \varepsilon^{-1}\Phi^{1/n}$ (Φ — аналог функции тока), а постоянные $t_{\nu 0}$ и переменная t определяются по локальному полю течения вблизи поверхностей частиц согласно [2,3]. Для полного диффузионного потока остается справедливой формула (2.5), в которой коэффициенты I и $a_{k\alpha}$ могут быть вычислены с помощью [2,3].

3. Зависимость изменения концентраций внутри капель от времени. Рассмотрим здесь осесимметричную цепочку капель с периодической структурой поля течения. Подставляя выражение (2.5) для I_k в уравнение (1.4) и выбирая коэффициент λ равным

$$\lambda = 4\pi(3\varepsilon I)^{-1} = {}^2/_3\, \Gamma(1/(n+1))\,(n+1)^{-2\sigma} t_0^{-\sigma} \tag{3.1}$$

$$(\lambda_1 = [\pi(\beta+1)/6]^{1/2}, \quad \lambda_2 = 8\Gamma(1/3)(81\pi)^{-2/3})$$

получаем следующую линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для концентраций внутри капель $c_1^+, c_2^+, \ldots, c_k^+$:

$$(3.2)\qquad \frac{dc_k^+}{d\tau} = \sum_{\alpha=1}^{k} a_{k\alpha}(c_{\alpha-1}^+ - c_\alpha^+), \quad c_0^+ = 1; \quad c_k^+(0) = 0$$

Коэффициенты λ_1 и λ_2 соответствуют цепочке сферических капель умеренной и большой вязкости в стоксовом режиме движения при выполнении условия (1.5), коэффициенты $a_{k\alpha}$ определены в выражении (2.5).

Система (3.2) может быть записана в виде

$$(3.3)\qquad dc_k^+/d\tau + c_k^+ = F_k(c_0^+, c_1^+, \ldots, c_{k-1}^+), \quad c_k^+(0) = 0$$

$$F_k = c_{k-1}^+ + \sum_{\alpha=1}^{k-1} a_{k\alpha}(c_{\alpha-1}^+ - c_\alpha^+), \quad c_0^+ = 1$$

Поэтому выражения для концентраций c_k^+ могут определяться последовательно, начиная с первой капли

$$(3.4)\qquad c_k^+(\tau) = e^{-\tau}\int_0^\tau e^\xi F_k(c_0^+, c_1^+(\xi), \ldots, c_{k-1}^+(\xi))\,d\xi$$

Используя (3.4), по индукции можно доказать, что имеет место следующее представление для концентраций внутри капель:

$$(3.5)\qquad c_k^+(\tau) = 1 - e^{-\tau} + e^{-\tau}P_{k-1}(\tau), \quad P_0 = 0$$

$$P_{k-1}(\tau) = \sum_{\beta=1}^{k-1} A_\beta^{(k)}\tau^\beta, \quad A_\beta^{(\beta)} = 0, \quad A_1^{(k)} = -1 + a_{k1}$$

$$A_\beta^{(k)} = \beta^{-1}\left\{A_{\beta-1}^{(k-1)} + \sum_{\alpha=\beta}^{k-1} a_{k\alpha}(A_{\beta-1}^{(\alpha-1)} - A_{\beta-1}^{(\alpha)})\right\}; \quad \beta = 2, \ldots, k-1$$

В частности, концентрация c_k^+ внутри первых трех капель меняется по следующему закону:

$$(3.6)\qquad c_1^+(\tau) = 1 - e^{-\tau}, \quad c_2^+ = 1 - e^{-\tau} - (2-2^\sigma)\tau e^{-\tau}$$

$$c_3^+(\tau) = 1 - e^{-\tau} - \{(1 + 2^\sigma - 3^\sigma)\tau + {}^1/_2(2 - 2^\sigma)^2\tau^2\}e^{-\tau}$$

Распределение концентраций в диффузионном пограничном слое и конвективно-погранслойной области диффузионного следа k-й капли определяется по формуле (2.4), где $c_1^+(\tau), \ldots, c_k^+(\tau)$ заданы выражениями (3.5). Прямая подстановка полученных таким образом значений для $c_k^{(d)}$ и $c_k^{(1)}$ в исходное уравнение (1.1) показывает, что наличие нестационарного члена в (1.1) не приводит к появлению неравномерности в полученных разложениях по малому параметру ε при $\tau \to \infty$ (что в принципе могло бы иметь место). Это служит дополнительным обоснованием возможности сведения полной задачи (1.1), (1.2) к последовательному решению уравнений (1.3) и (1.4).

Для полных диффузионных потоков на поверхности капель имеем

$$(3.7)\qquad I_k^\circ = e^{-\tau}\left\{a_{k1} - A_{k-1}^{(k)}\tau^{k-1} + \sum_{\beta=1}^{k-1}\sum_{\alpha=\beta+1}^{k} a_{k\alpha}(A_\beta^{(\alpha-1)} - A_\beta^{(\alpha)})\tau^\beta\right\}$$

$$I_k^\circ = \frac{dc_k^+}{d\tau} = \frac{I_k}{I}, \quad A_k^{(k)} = 0, \quad A_{k-1}^{(k)} = -\frac{(2-2^\sigma)^{k-1}}{(k-1)!}$$

где выражения для коэффициентов $A_{k-1}^{(k)}$ получены по индукции из (3.5).

Из формулы (3.7) видно, что $I_k^\circ \to a_{k1} = k^\sigma - (k-1)^\sigma$ при $\tau \to 0$, что соответствует стационарному случаю с условием полного поглощения на поверхностях капель [1-4], а при $\tau \to \infty$ имеем $I_k^\circ \to 0$, что соответствует «насыщению» капель ($c_k^+ \to 1$). При этом для полных диффузионных потоков имеют место следующие предельные соотношения:

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{I_k}{I_{k-1}} = \frac{k^\sigma-(k-1)^\sigma}{(k-1)^\sigma-(k-2)^\sigma}, \quad \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\frac{I_k}{I_{k-1}} = \frac{2-2^\sigma}{k-1}$$

из которых видно, что $I_k^\circ(0) - I_{k-1}^\circ(0) < 0$, а $I_k^\circ(\tau) - I_{k-1}^\circ(\tau) > 0$ при $\tau \gg 1$. Отсюда следует, что сначала интегральный поток на $(k-1)$-ю каплю больше, чем на идущую в ее диффузионном следе k-ю каплю, затем по истечении времени $\tau = \tau_{k,k-1}$ эти потоки сравниваются, а потом полный поток на k-ю каплю становится больше.

Для первых трех капель имеем

$$I_1^\circ = e^{-\tau}, \quad I_2^\circ = \{2^\sigma - 1 + (2-2^\sigma)\tau\}e^{-\tau} \tag{3.8}$$

$$I_3^\circ = \{3^\sigma - 2^\sigma + (5\cdot 2^\sigma - 2^{2\sigma} - 3^\sigma - 3)\tau + {}^1\!/_2\,(2-2^\sigma)^2\tau^2\}e^{-\tau}$$

Из выражений (3.8) видно, что диффузионные потоки на поверхности первых двух капель сравниваются при $\tau = \tau_{21} = 1$.

4. Дальнейшие обобщения. Здесь будет рассмотрен общий случай массообмена цепочки капель произвольной формы с непериодической структурой поля обтекания (поле течения считается стационарным). Диффузионная задача сводится к решению следующей безразмерной системы уравнений (в дальнейшем считается, что все характерные размеры капель одного порядка):

$$\varepsilon^n\lambda^{-1}\partial c/\partial\tau + (\mathbf{v}\nabla)c = \varepsilon^{n+1}\Delta c; \quad c\big|_{\Gamma_k} = c_k^+, \quad c\big|_{\Gamma_\infty} = 1 \tag{4.1}$$

$$V_k\frac{dc_k^+}{d\tau} = \lambda I_k = \varepsilon\lambda\iint_{\Gamma_k}\left[\frac{\partial c}{\partial n}\right]_{\Gamma_k} d\Gamma_k, \quad c_k^+(0) = 0 \tag{4.2}$$

Безразмерное время τ введено аналогично п. 1, Γ_k и V_k — поверхности и объемы капель; начальное условие для (4.1) задается решением соответствующей стационарной задачи с условиями полного поглощения на поверхностях капель.

Используя результаты работ [2, 3] и рассуждая аналогично п. 1, можно показать, что при $\varepsilon \to 0$ решение задачи (4.1), (4.2) сводится: 1) к решению стационарного уравнения (4.1) для произвольных значений c_k^+, 2) к использованию этого решения для вычисления полного диффузионного потока $I_k = I_k(c_1^+, c_2^+, \ldots, c_k^+)$, стоящего в правой части уравнения (4.2), и 3) решению таким образом полученной системы для концентраций c_k^+ (4.2).

Для вычисления главного члена разложения I_k по параметру ε достаточно знать распределение концентрации в диффузионном погранслое каждой капли. Считая, что расстояние между каплями меньше характерной длины соответствующей им конвективно-погранслойной области диффузионного следа, для вычисления полного потока I_k воспользуемся замечанием п. 2 и формулой (2.6). В общем случае использование формулы (2.6) для определения правой части уравнения (4.2) приводит к следующей системе уравнений для концентраций внутри капель:

$$\frac{dc_k^+}{d\tau} = \sum_{\alpha=1}^{k}\gamma_{k\alpha}(c_{\alpha-1}^+ - c_\alpha^+), \quad c_0^+ = 1; \quad c_k^+(0) = 0 \tag{4.3}$$

где $\gamma_{k\alpha} > 0$ — некоторые, вообще говоря, произвольные коэффициенты, которые могут быть вычислены согласно (2.6) и [2, 3].

Если не учитывать конкретные значения коэффициентов $a_{k\alpha}$ в (2.5), то полученная система (4.3), с точностью до переобозначений, совпадает с уравнением (3.2). Значения концентраций c_k^+ могут быть получены последовательно, начиная с первой

$$c_k^+(\tau) = \exp(-\gamma_{kk}\tau)\int_0^\tau \exp(\gamma_{kk}\xi)\, F_k^*(c_0^+, c_1^+(\xi), \ldots, c_{k-1}^+(\xi))\, d\xi \tag{4.4}$$

$$F_k^* = \gamma_{kk}c_{k-1}^+ + \sum_{\alpha=1}^{k-1} \gamma_{k\alpha}(c_{\alpha-1}^+ - c_\alpha^+), \quad c_0^+ = 1$$

$$c_k^+(\tau) = 1 + \sum_{\alpha=1}^{s(k)} \exp(-\gamma_{\alpha\alpha}^*\tau)\, E_\alpha^{(k)}(\tau) \tag{4.5}$$

$$E_\alpha^{(k)}(\tau) = \sum_{\beta=0}^{r_\alpha-1} B_{\alpha\beta}^{(k)}\tau^\beta, \quad 1 + \sum_{\alpha=1}^{s(k)} B_{\alpha 0}^{(k)} = 0$$

Формула (4.5) указывает вид решения (4.3); $s(k)$ — число различных по величине коэффициентов $\gamma_{\alpha\alpha}^*$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, s(k))$ в наборе величин γ_{nn} $n \leqslant k$, $r_\alpha = r_\alpha(k)$ — кратность корня $\gamma_{\alpha\alpha}^*$. При $\gamma_{11} = \gamma_{22} = \ldots = \gamma_{kk} = 1$ коэффициенты $B_{\alpha\beta}^{(k)} = 0$, $\alpha \geqslant 2$; $B_{1\beta}^{(k)} = A_\beta^{(k)}$, где $A_\beta^{(k)}$ определяются по формулам (3.5) после соответствующей замены $a_{k\alpha}$ на $\gamma_{k\alpha}$. Другим предельным случаем является $\gamma_{kk} \neq \gamma_{nn}$, $k \neq n$, что приводит к следующим соотношениям в (4.5):

$$r_\alpha = 1, \quad s(k) = k, \quad \gamma_{\alpha\alpha}^* = \gamma_{\alpha\alpha}, \quad E_\alpha^{(k)}(\tau) = B_{\alpha 0}^{(k)} = \text{const} \tag{4.6}$$

Отметим, что показатели $\gamma_{\alpha\alpha}^*$ в выражениях (4.5) могут быть получены из решения системы уравнений, соответствующей случаю отсутствия диффузионного взаимодействия между каплями (система капель, в которой имеется лишь одна поглощающая капля, в то время как остальные капли нейтральны и не поглощают растворенное в потоке вещество, что соответствует следующему граничному условию на их поверхностях $[\partial c / \partial n]_{\Gamma_k} = 0$), т. е. системы (4.3), в которой должно быть положено $\gamma_{k\alpha} = 0$ при $\alpha \neq k$ и $c_{k-1}^+ = 1$.

В качестве примера рассмотрим цепочку сферических капель разного радиуса $a(k)$, $k = 1, 2, \ldots, M$, $a(k)/a(1) = O(1)$, движущихся одна за другой в стоксовом режиме с одинаковой скоростью U и удовлетворяющих условию (1.5). Выбирая за масштаб длины радиус первой капли и определяя коэффициенты I и λ по формулам (2.5) и (3.1), получаем следующие значения для показателей $\gamma_{\alpha\alpha}$ в (4.6):

$$\gamma_{\alpha\alpha} = [a(1) / a(\alpha)]^{(2n+1)/(n+1)}; \quad n = 1, 2 \tag{4.7}$$

Используя формулы (2.6) и (4.2) и результаты [2,3], укажем значения коэффициентов $\gamma_{k\alpha}$ в уравнениях (4.3) и приведем окончательные выражения для полных диффузионных потоков I_k° на поверхности первых двух капель $(\varkappa \neq 1)$ $\varkappa = a(2)\, a^{-1}(1)$

$$\gamma_{11} = 1, \quad \gamma_{22} = \varkappa^{-(2n+1)/(n+1)}, \quad \gamma_{21} = [(\varkappa^{(n+2)/n} + 1)^\sigma - 1]\, \varkappa^{-3} \tag{4.8}$$

$$I_1^\circ = e^{-\tau}, \quad I_2^\circ = \varkappa^3(1 - \gamma_{21})(1 - \gamma_{22}^{-1})^{-1}[e^{-\tau} - e^{-\gamma_{22}\tau}] + \varkappa^3\gamma_{21}e^{-\tau}$$

Отметим, что хотя формула (4.8) для I_2° получена при $\varkappa \neq 1$, она переходит в (3.8) при $\varkappa \to 1$ и $\tau = \text{const} > 0$.

5. Обсуждение результатов. Выражения для концентраций (3.5) и (4.5) показывают, что при $\tau \to \infty$ происходит «насыщение» капель и $c_k^+ \to 1$, при этом полные диффузионные потоки на их поверхности I_k стремятся к нулю. В случае цепочки сферических капель равного радиуса влияние процесса насыщения на взаимодействие диффузионных погранслоев и следов частиц приводит к тому, что сначала полный диффузионный поток на первую каплю будет больше чем на вторую, а в результате насыщения концентрация внутри первой капли становится больше чем во второй. Это, в свою очередь, ослабляет диффузионный след первой (т. е. уменьшается разность между концентрацией в натекающем потоке и концентрацией в следе) и, как следует из результатов п. 3, в момент времени

$$t = [{}^1/_6\pi(\beta + 1)P]^{1/2}aU^{-1}, \quad \beta \leqslant O(1) \quad (n = 1)$$

$$t = 8\Gamma({}^1/_3)(81\pi)^{-2/3}P^{1/3}aU^{-1}, \quad \beta > O(P^{1/3}) \quad (n = 2)$$

диффузионные потоки на поверхности первых двух капель сравниваются; и затем вторая капля начинает поглощать растворенного вещества больше чем первая. Потом, через некоторое время после этого, становятся равными интегральные потоки на вторую и третью капли и т. д.

Общий случай цепочек непериодической структуры поля обтекания проанализируем сначала на примере двух капель разного радиуса. Для этого исследуем знак функции

$$\Delta_{21}(\tau) = e^{\tau}\{I_2^{\circ}(\tau) - I_1^{\circ}(\tau)\} =$$
$$= \varkappa^3(1 - \gamma_{21})(1 - \gamma_{22}^{-1})^{-1}[1 - \exp\{(1 - \gamma_{22})\tau\}] + \varkappa^3\gamma_{21} - 1$$

где зависимости коэффициентов γ_{21} и γ_{22} от радиусов капель приведены в (4.8). Так как $d\Delta_{21}(\tau)/d\tau$ не меняет знака при $\tau \geqslant 0$, то уравнение $\Delta_{21}(\tau) = 1$ имеет не больше одного корня. При этом возможны следующие три случая: 1) при $\varkappa > \varkappa_2 = (2^{1/\sigma} - 1)^{n/(n+2)}$, $\Delta_{21}(\tau) > 0$, т. е. полный диффузионный поток на вторую каплю будет всегда больше, чем на первую: 2) при $\varkappa < \varkappa_1$, где $\varkappa_1$ — корень уравнения

$$\Omega(\varkappa_1) = 0, \quad \Omega(\varkappa) = \varkappa^3 - 1 + [1 - \varkappa^3\gamma_{21}(\varkappa)]\,\gamma_{22}^{-1}(\varkappa)$$

$\Delta_{21}(\tau) < 0$, т. е. полный диффузионный поток на первую каплю в процессе насыщения всегда больше чем на вторую; 3) при $\varkappa_1 < \varkappa < \varkappa_2$ сначала интегральный диффузионный поток на первую каплю больше чем на вторую, потом при некотором времени $\tau_{21} = \tau_{21}(\varkappa)$, $\Delta_{21}(\tau_{21}) = 0$ они сравниваются, а при $\tau > \tau_{21}$ полный поток на вторую становится больше. Имеют место следующие соотношения: $0 < \varkappa_1 < 1 < \varkappa_2 < 2$ и $\tau_{21}(1) = 1$; $\tau_{21}(\varkappa_2) = 0$; $\varkappa \to \varkappa_1$, $\tau_{21} \to \infty$.

Исследуем теперь поведение отношения полных диффузионных потоков I_2°/I_1° при $\tau \to \infty$. Используя выражения (4.8), получаем

$$\varkappa \geqslant 1, \quad \lim_{\tau \to +\infty} I_2^{\circ}/I_1^{\circ} = +\infty$$

$$\varkappa < 1, \quad \lim_{\tau \to +\infty} I_2^{\circ}/I_1^{\circ} = \varkappa^3[1 - \gamma_{21}(\varkappa)\gamma_{22}^{-1}(\varkappa)][1 - \gamma_{22}^{-1}(\varkappa)]^{-1}$$

Предельные выражения показывают, что когда радиус первой капли меньше радиуса второй, то при достаточно больших временах полный диффузионный поток на первую будет пренебрежимо мал по сравнению с потоком на вторую. В случае, когда радиус первой капли больше радиуса второй, полные диффузионные потоки на их поверхности одного порядка при $\tau \to \infty$.

Для цепочки капель $k = 1, 2, \ldots, M$ разного радиуса при достаточно большом времени τ основной вклад в суммарный диффузионный поток (на все капли цепочки) вносят капли с порядковыми номерами $k_m \leqslant k \leqslant M$, где номер k_m соответствует капле максимального радиуса. Это означает, что капля максимального радиуса определяет закон уменьшения полных диффузионных потоков со временем для всех капель, движущихся в ее диффузионном следе, и при $\tau \to \infty$ полными диффузионными потоками капель, идущими перед ней, можно пренебречь.

Имеют место законы сохранения

$$\int_0^{\infty} I_k^{\circ}(\tau)\,d\tau = a^3(k), \quad a(1) = 1; \quad k = 1, 2, \ldots, M$$

Автор благодарит Ю. П. Гупало и Ю. С. Рязанцева за полезное обсуждение.

Поступила 5 IX 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Рязанцев Ю. С.* О диффузии к цепочке капель (пузырей) при больших числах Пекле. Изв. АН СССР, МЖГ, 1978, № 1.
2. *Полянин А. Д.* О диффузионном взаимодействии капель в жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1978, № 2.
3. *Полянин А. Д.* О диффузионном взаимодействии твердых частиц при больших числах Пекле. ПММ, 1978, т. 42, вып. 2.
4. *Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Рязанцев Ю. С.* О массообмене частиц, расположенных на оси потока, при больших числах Пекле. Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 2.
5. *Левич В. Г.* Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959.