Прикладная математика и механика. Том 43, 1979

УДК 532.591

О ДИФРАКЦИИ ПОВЕРХНОСТНОЙ ГРАВИТАЦИОННОЙ ВОЛНЫ НА МАЛОЙ НЕРОВНОСТИ ДНА

С. Ф. Доценко, Л. В. Черкесов

(Севастополь)

В рамках общей линейной теории безвихревых волн в жидкости конечной глубины рассмотрены плоская и пространственная задачи о дифракции плоской гравитационной волны на неровности дна бассейна произвольной формы.

В постановке теории длинных волн такие исследования проводились численными методами [1–3], однако в общей линейной постановке их удается выполнить только для препятствий простейшего вида [4–6]. В данной работе предполагается, что высота неровности дна мала по сравнению со средней глубиной бассейна. Это позволяет получить асимптотические выражения для рассеянных волн и провести их анализ для широкого класса форм неровностей дна.

1. Пусть идеальная несжимаемая однородная тяжелая жидкость занимает область $-\infty < x, y < +\infty$, $-H(x, y) \leqslant z \leqslant 0$, где x, y — горизонтальные, z — вертикальная координаты, $H = H_0 - h(x, y)$, $H_0 = \text{const}$, $h \to 0$ при $R = \sqrt{x^2 + y^2} \to \infty$. В линейной постановке исследуем дифракцию плоской прогрессивной волны, распространяющейся из $x = -\infty$, на неровности дна, описываемой функцией h, считая движение жидкости безвихревым, а параметр $\varepsilon = h_0 H_0^{-1}$ малым ($h_0 = \max|h|$).

Потенциал скорости φ_0 и возвышение свободной поверхности ζ_0 падающей волны зададим в виде

$$\begin{aligned}
&\varphi_0 = \operatorname{Re}\{\Phi_0 \exp(-i\sigma t)\}, \quad \zeta_0 = \operatorname{Re}\{A_0 \exp[i(r_0 x - \sigma t)]\} \\
&\Phi_0 = -iA_0 g\sigma^{-1} \operatorname{ch} r_0(z + H_0) \operatorname{ch}^{-1} r_0 H \exp(ir_0 x) \\
&\sigma = (g r_0 \operatorname{th} r_0 H_0)^{1/2}
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь A_0, r_0 — известные величины, g — ускорение свободного падения.

Обозначим через φ и ζ потенциал скорости и возвышение свободной поверхности дифрагированной волны. Положим

$$\varphi = \varphi_0 + \operatorname{Re}\{\Phi \exp(-i\sigma t)\}, \quad \zeta = \zeta_0 + \operatorname{Re}\{A \exp(-i\sigma t)\}$$

и введем безразмерные переменные по формулам

$$\begin{aligned}
&\{x, y, z\} = H_0\{x', y', z'\}, \quad t = \sigma^{-1} t' \\
&\{\Phi_0, \Phi\} = A_0 g \sigma^{-1}\{\Phi_0', \varepsilon\Phi'\} \\
&\{\zeta_0, A\} = A_0\{\zeta_0', \varepsilon A'\}, \quad h = h_0 h', \quad r_0 = H_0^{-1} r_0' \\
&\sigma = g^{1/2} H_0^{-1/2} \sigma'
\end{aligned}$$

В безразмерных переменных для отыскания потенциала Φ' имеем задачу (в дальнейшем штрихи у безразмерных переменных опускаем)

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} = 0, \quad \Phi_z - \sigma^2\Phi = 0 \quad (z = 0) \tag{1.2}$$

$$\Phi_{0z} + \varepsilon(\Phi_z - h_x\Phi_{0x} - h_y\Phi_{0y}) - \varepsilon^2(h_x\Phi_x + h_y\Phi_y) = 0 \tag{1.3}$$
$$(z = -1 + \varepsilon h)$$

$$\Phi_0 = -i \operatorname{ch} r_0(z+1)\operatorname{ch}^{-1} r_0 \exp(ir_0x), \quad \sigma = \sqrt{r_0 \operatorname{th} r_0}$$

Также должно выполняться условие излучения, означающее, что потенциал рассеянных волн $\Phi \exp(-i\sigma t)$ описывает волны, распространяющиеся от неровности дна в бесконечность. Функция $A(x, y)$ находится по формуле $A = i\Phi(x, y, 0)$, вытекающей из интеграла Коши — Лагранжа.

Граничное условие (1.3) создает принципиальные математические трудности для получения точного решения задачи. Используя малость параметра ε, будем искать [7] решение задачи (1.2), (1.3) в виде $\Phi = \Phi_1 + \varepsilon\Phi_2 + \varepsilon^2\Phi_3 + \ldots$. Аналогично $A = A_1 + \varepsilon A_2 + \varepsilon^2 A_3 + \ldots$. Тогда $A_1 = i\Phi_1(x, y, 0)$, а Φ_1 удовлетворяет уравнению (1.2) и граничному условию

$$\Phi_{1z} = h_x\Phi_{0x} + h_y\Phi_{0y} - h\Phi_{0zz} \quad (z = -1) \tag{1.4}$$

Для нахождения Φ_n, A_n $(n \geqslant 2)$ можно вывести рекуррентную последовательность краевых задач. В дальнейшем ограничимся анализом дифракции волн в первом приближении. Нижние индексы у неизвестных Φ_1, A_1 для краткости опускаем.

2. Интегральное представление для Φ находится из (1.2), (1.4) с помощью преобразования Фурье по x, y. В полярных координатах

$$\Phi = (2\pi)^{-2}\int_c [\Delta \operatorname{sh} r(z+1) + (\sigma^2 \operatorname{th} r - r)\operatorname{ch} r(z+1)](r\Delta)^{-1} I\,dr \tag{2.1}$$

$$I = \int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\exp[irR\cos(\theta-\gamma)]\,d\theta \tag{2.2}$$

$$f(m, n) = ir_0 mF(m - r_0, n)\operatorname{ch}^{-1} r_0, \quad \Delta(r) = r \operatorname{th} r - \sigma^2$$

$$\{x, y\} = R\{\cos\gamma, \sin\gamma\}, \quad \{m, n\} = r\{\cos\theta, \sin\theta\}$$

Здесь $F(m, n)$ — преобразование Фурье функции $h(x, y)$, c — контур интегрирования в комплексной r-плоскости, идущий по лучу $\operatorname{Re} r \geqslant 0$ с обходом точки $r = r_0$ $(\Delta(r_0) = 0)$ по малой полуокружности снизу.

Рассмотрим асимптотическое поведение Φ и A при $R \to \infty$. Для этого применим к интегралу (2.2) метод стационарной фазы, затем главный член асимптотики подставим в (2.1), а полученный таким образом интеграл исследуем с помощью теории вычетов. Окончательно найдем

$$\operatorname{Re}\{\Phi\exp(-i\sigma t)\} = R^{-1/2}\operatorname{ch} r_0(z+1)\operatorname{ch}^{-1} r_0 B \times \tag{2.3}$$
$$\times \operatorname{Re}\{\Pi(\gamma)\exp[i(r_0R - \sigma t - \pi/4)]\} + O(R^{-1})$$

$$\operatorname{Re}\{A\exp(-i\sigma t)\} = R^{-1/2}B \operatorname{Re}\{\Pi(\gamma)\exp[i(r_0R - \sigma t + \tag{2.4}$$
$$+ \pi/4)]\} + O(R^{-1})$$

$$B = (2\pi)^{-1/2} r_0^{1/2} (r_0^2 - \sigma^4)(r_0^2 + \sigma^2 - \sigma^4)^{-1}$$
$$\Pi = \cos\gamma\, F\,(r_0(\cos\gamma - 1),\ r_0 \sin\gamma)$$

Для падающей волны, распространяющейся под углом γ_0 к положительному направлению оси x, рассеянные волны также описываются формулами (2.3), (2.4), но множитель Π заменяется на

$$\Pi_1 = \cos(\gamma - \gamma_0) F\,(m_1, n_1), \quad m_1 = r_0(\cos\gamma - \cos\gamma_0)$$
$$n_1 = r_0(\sin\gamma - \sin\gamma_0)$$

Зависимость амплитуды рассеянной волны от γ описывается функцией Π_1, определяемой двумерным преобразованием Фурье функции h. Функция Π_1 упрощается в следующих случаях:

(2.5) $$h = h_3([\alpha x^2 + \beta y^2]^{1/2})$$
$$\Pi_1 = \frac{2\pi}{\alpha\beta}\cos(\gamma - \gamma_0)\int_0^\infty R h_3(R)\, J_0(m_2 R)\, dR, \quad m_2 = \left(\frac{m_1^2}{\alpha} + \frac{n_1^2}{\beta}\right)^{1/2}$$

(2.6) $$h = h_1(x) h_2(y), \quad \Pi_1 = \cos(\gamma - \gamma_0) F_1(m_1) F_2(n_1)$$

Здесь $F_s(m)$, $s = 1, 2$ — одномерные преобразования Фурье функций h_s, $J_0(z)$ — функция Бесселя первого рода.

Случай $\alpha = \beta$ соответствует осесимметричной неровности дна.

3. Рассмотрим длинноволновую и коротковолновую асимптотики дальнего волнового поля рассеянных волн. Будем считать, что функция h зависит от параметра $\delta > 0$, $h = h(x/\delta, y/\delta)$, а волна распространяется под углом γ_0 к оси x. Тогда, обозначив через G множество точек (ξ, η), для которых $h(\xi, \eta) \neq 0$, имеем

(3.1) $$\Pi_1 = \delta^2 \cos(\gamma - \gamma_0)\Pi_2(\nu), \quad \nu = \delta r_0$$

(3.2) $$\Pi_2 = \iint_G h(\xi, \eta) \exp[-i\nu\Psi(\xi, \eta)]\, d\xi\, d\eta$$
$$\Psi = (\cos\gamma - \cos\gamma_0)\xi + (\sin\gamma - \sin\gamma_0)\eta$$

Длинноволновое приближение ($\nu \to 0$).

Разложив функцию Π_2 в степенной ряд по параметру ν, получаем

(3.3) $$\Pi_2 = \Lambda_0 - i\nu\,[(\cos\gamma - \cos\gamma_0)\Lambda_1 + (\sin\gamma - \sin\gamma_0)\Lambda_2] + O(\nu^2)$$
$$\Lambda_0 = \iint_G h(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \quad \Lambda_1 = \iint_G \xi h(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$
$$\Lambda_2 = \iint_G \eta h(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

Из формул (3.1), (3.3) следует, что при $\Lambda_0 \neq 0$ и $\nu \to 0$ зависимость от γ амплитуды возвышения свободной поверхности рассеянной волны близка к описываемой функцией $|\cos(\gamma - \gamma_0)|$. Поэтому в системе координат, ось x которой совмещена с лучом $\gamma = \gamma_0$, дальнее волновое поле при $\delta^2\Lambda_0 = \mathrm{const} \neq 0$ слабо зависит от γ_0 и формы неровности дна. При $\Lambda_0 = 0$, $\Lambda_1^2 + \Lambda_2^2 > 0$ распределение амплитуд волн по γ определяется постоянными $\Lambda_{1,2}$.

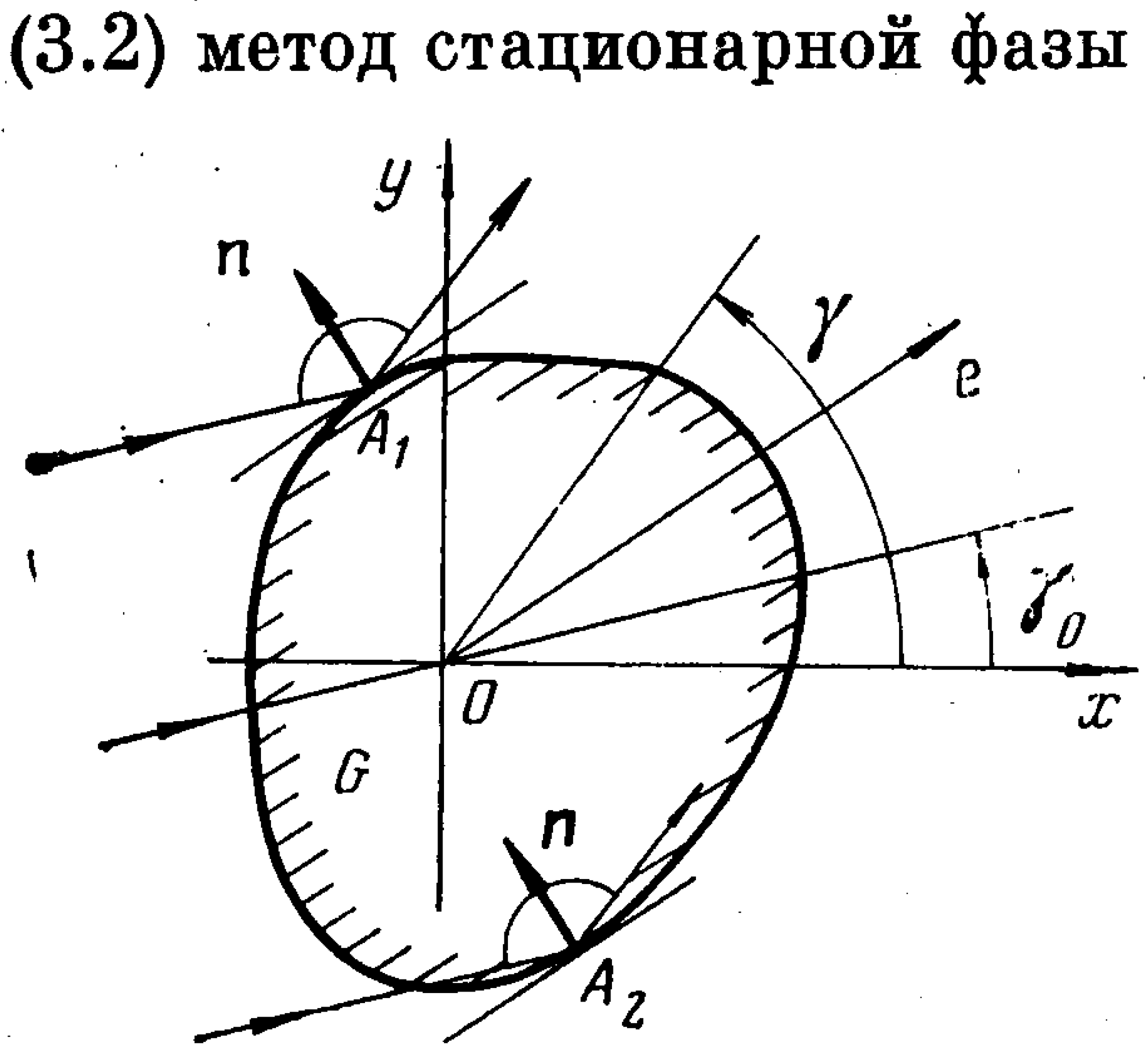
Формулы (2.3), (2.4), (3.1), (3.3) позволяют для рассеянной волны найти уравнения линий постоянной амплитуды возвышения свободной поверхности и компонентов вектора скорости по осям x, y и z (при z = const). В полярных координатах указанные уравнения соответственно имеют вид

$$R = c\cos^2\gamma_1,\quad R = c\cos^4\gamma_1,\quad R = c\sin^2 2\gamma_1,\quad R = c\cos^2\gamma_1$$

$$(\gamma_1 = \gamma - \gamma_0,\ c = \text{const})$$

Коротковолновая асимптотика ($\nu \to \infty$).

Рассмотрим асимптотическое поведение Π_1 при $\nu \to \infty$. Если $\gamma = \gamma_0$, то Π_2 от ν не зависит ($\Pi_2 = \Lambda_0$). Считая $\gamma \neq \gamma_0$, применим к интегралу (3.2) метод стационарной фазы для многомерных интегралов [8]. Поскольку $|\Delta\Psi(\xi, \eta)| \neq 0$, то интеграл Π_2 внутренних стационарных точек не имеет. Поэтому для достаточно гладкой функции h и $G = (-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty)$ интеграл Π_2, а значит, и амплитуда рассеянной волны имеют достаточно высокий порядок малости по параметру ν. В частности, $\Pi_2 = O(\nu^{-\infty})$, если $h \in C^\infty$.



Фиг. 1

Для ограниченной области G и достаточно гладкой функции h основной вклад в асимптотику интеграла Π_2 дают граничные точки области [9]. Можно показать, применяя к интегралу (3.2) интегрирование по частям (формула (1.3) работы [9]), что чем выше гладкость h в окрестности границы области, тем меньше амплитуда рассеянной волны в направлении $\gamma \neq \gamma_0$. Так, если на границе G выполняются условия $h = \partial h / \partial x = \ldots = \partial^n h / \partial x^n = 0\ (\gamma \neq \pm\gamma_0)$ или условия $h = \partial h / \partial y = \ldots = \partial^n h / \partial y^n = 0\ (\gamma \neq \gamma_0, \pi - \gamma_0)$, то $\Pi_2 = O(\nu^{-n-1})$.

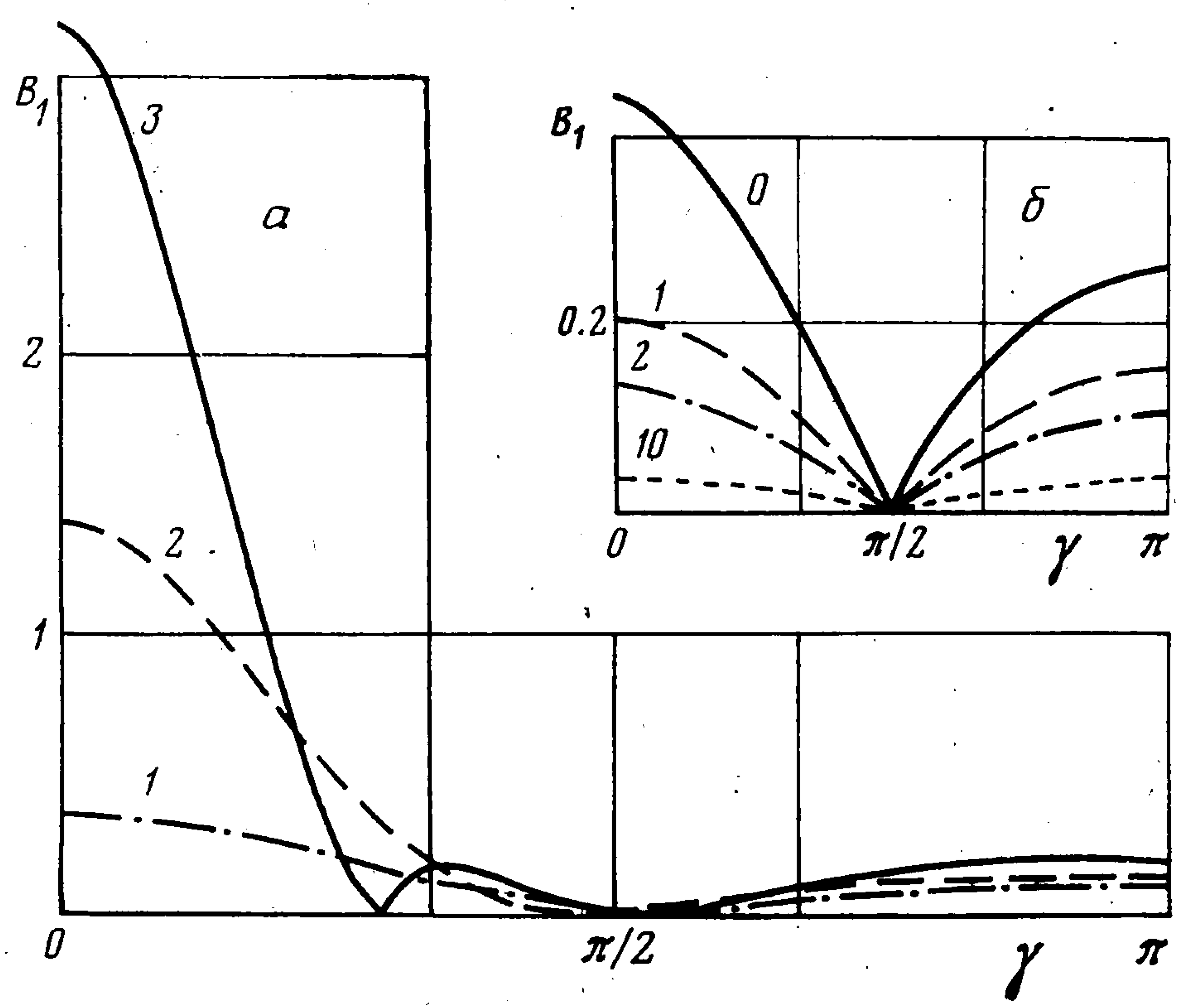
Рассмотрим неровность дна с вертикальной боковой границей ($h \neq 0$ на границе G). Основной вклад в асимптотику Π_2 при $\nu \to \infty$ дают те граничные точки, для которых орт нормали к границе параллелен вектору $\nabla\Psi$ [9], где $\nabla\Psi = (\cos\gamma_0 - \cos\gamma,\ \sin\gamma_0 - \sin\gamma)$. В этих точках ($A_1$ и A_2 на фиг. 1) угол падения волны равен углу отражения, причем отраженный луч направлен под углом γ к оси x. Можно показать, аналогично работе [9], что для гладкой границы вклад точек A_s в асимптотику Π_2 равен $O(\nu^{-(n_s+1)/n_s})$, где $n_s \geqslant 2$ — порядок соприкосновения касательной и границы области G в точке A_s. Если участок границы в окрестности точки A_s прямолинейный, то его вклад в асимптотику наибольший — $O(\nu^{-1})$.

4. Рассмотрим неровности дна конкретного вида.

Пусть h — функция типа (2.5). Для произвольной функции $h_3(u)$, $u = (\alpha x^2 + \beta y^2)^{1/2}$, интеграл Π_1 находится численным интегрированием. В ряде случаев он выражается через элементарные и специальные функции. Например ($\Gamma(z)$ — гамма-функция)

(4.1) $$h_3(u) = (1 - u^2 l^{-2})^{\mu} \quad (u \leqslant l), \quad h_3 = 0 \quad (u > l)$$
$$\Pi_1 = \pi 2^{\mu+1} (\alpha\beta)^{-1} l^2 \Gamma(\mu + 1) \cos(\gamma - \gamma_0) \xi^{-\mu-1} J_{\mu+1}(\xi)$$
$$h_3(u) = l^3 (l^2 + u^2)^{-3/2}, \quad \Pi_1 = 2\pi l^2 \cos(\gamma - \gamma_0) \exp(-\xi)$$
$$h_3(u) = \exp(-l^{-2} u^2), \quad \Pi_1 = \pi l^2 \cos(\gamma - \gamma_0) \exp(-{}^1/_4 \xi^2)$$
$$(\xi = m_2 l, \; u \geqslant 0, \; \mu \geqslant 0, \; l > 0)$$

Для h_3 вида (4.1) амплитуда рассеянной волны наибольшая при $\gamma = \gamma_0$. Отношение амплитуды волны при $\gamma = \gamma_0$ к ее значению при $\gamma = \gamma_0 + \pi$ тем больше, чем больше m_0 и больше l. Для $h_3 \in C^\infty$ амплитуда рассеянной волны равна нулю на лучах $\gamma = \gamma_0 \pm \pi / 2$, однако, если h_3



Фиг. 2

не является бесконечно дифференцируемой (первое выражение для h_3 в (4.1)), то при достаточно больших m_0 и l существуют другие направления γ со слабо выраженными дифракционными эффектами.

Распределение амплитуды рассеянной волны по γ описывается величиной $B_1 = B \mid \Pi_1 \mid$. Зависимости B_1 от $\gamma \in [0, \pi]$ для осесимметричной неровности дна

(4.2) $$h_3 = \cos^s(\pi R / 2l) \quad (R \leqslant l), \; h_3 = 0 \quad (R > l)$$

представлены на фиг. 2 ($\gamma_0 = 0$). В случае *а* варьируется полуширина l неровности дна ($r_0 = 1.5, s = 0$), в случае *б* — показатель степени s в формуле (4.2) ($r_0 = l = 1$). Значения параметров l и s указаны у соответствующих кривых.

Из сопоставления кривых фиг. 2 следует, что амплитуда рассеянной волны, вообще говоря, убывает при уменьшении ширины неровности дна и повышении ее гладкости.

Пусть h — функция вида (2.6). Такая неровность дна не является осесимметричной. Тем не менее, амплитуда рассеянной волны слабо зависит от формы неровности дна, если падающая волна достаточно длинная (см. п. 3).

Определим функции $h_s(u)$, $s = 1, 2$ по формулам

(4.3) $$h_s = 1 \quad (|u| \leqslant l_s), \quad h_s = 0 \quad (|u| > l_s)$$

(4.4) $$h_s = \cos k_s u \quad (|u| \leqslant l_s), \quad h_s = 0 \quad (|u| > l_s), \quad k_s = \pi (2l_s)^{-1}$$

(4.5) $$h_s = \exp(-3l_s^{-2}u^2)$$

Для таких h влияние формы неровности на дальнее волновое поле рассеянных волн имеет место при $m_0 \max \{l_1, l_2\} \geqslant 1$. Оно проявляется в зависимости значения B_1 при $\gamma = \gamma_0 + \pi$ от γ_0 и нарушении симметрии относительно луча $\gamma = \gamma_0$ распределения амплитуды рассеянной волны по углу.

На фиг. 3 даны зависимости B_1 от γ для четырех значений угла падения волны γ_0 и $r_0 = 0.1$, $l_1 = 0.1$, $l_2 = 10$. Кривые *1—3* относятся к неровностям дна, для которых функции h_s, $s = 1, 2$ заданы формулами (4.3) — (4.5) соответственно. Отсюда видно, что наибольшую амплитуду рассеянная волна имеет в окрестности луча $\gamma = \gamma_0$. Значение $B_1 |_{\gamma=\gamma_0} = B \mid F_1(0) \mid \mid F_2(0) \mid$ не зависит от γ_0. Как и в случае осесимметричной неровности дна, повышение гладкости неровности дна приводит, вообще говоря, к уменьшению амплитуды рассеянной волны.

5. Аналогично рассматривается задача о дифракции поверхностной волны на малой неровности дна вида $h = h(x)$.

Предположим, что падающая волна распространяется под углом γ_0 к оси x. Положим

(5.1) $$\begin{gathered} \varphi = \operatorname{Re} \{(\Phi_0 + \Phi) \exp [i(n_0 y - \sigma t)]\} \\ \zeta = \operatorname{Re} \{(A_0 \exp(i m_0 x) + A) \exp [i(n_0 y - \sigma t)]\} \\ \Phi_0 = -iA_0 g \sigma^{-1} \operatorname{ch} r_0 (z + H_0) \operatorname{ch}^{-1} r_0 H_0 \exp(i m_0 x) \\ r_0 = (m_0^2 + n_0^2)^{1/2}, \quad \sigma = (g r_0 \operatorname{th} r_0 H_0)^{1/2} \end{gathered}$$

и введем безразмерные переменные по формулам п. 1. Для нахождения $\Phi(x, z)$ получим краевую задачу

(5.2) $$\begin{gathered} \Phi_{xx} + \Phi_{zz} - n_0^2 \Phi = 0 \\ \Phi_z - \sigma^2 \Phi = 0 \ (z = 0), \quad \Phi_z = h_x \Phi_{0x} - h \Phi_{0zz} \ (z = -1) \\ \Phi_0 = -i \operatorname{ch} r_0 (z + 1) \operatorname{ch}^{-1} r_0 \exp(i m_0 x), \quad \sigma = (r_0 \operatorname{th} r_0)^{1/2} \end{gathered}$$

Амплитуда рассеянной волны находится по формуле $A = i\Phi(x, 0)$. Интегральное представление для A выводится из задачи (5.2) с помощью преобразования Фурье по x $\quad (r = (m^2 + n_0^2)^{1/2}, \ \Delta = r \operatorname{th} r - \sigma^2)$

(5.3) $$\begin{gathered} A = \frac{1}{2\pi \operatorname{ch} r_0} \int\limits_c (m_0 m + n_0^2) F(m - m_0) \times \\ \times [(r - \sigma^2 \operatorname{th} r) \operatorname{ch} r - \Delta \operatorname{sh} r] r^{-1} \Delta^{-1} \exp(imx)\, dm \end{gathered}$$

Здесь c — контур интегрирования в комплексной m-плоскости, идущий по вещественной оси с обходом полюсов $m = -m_0$ и $m = m_0$ по малым полуокружностям сверху и снизу соответственно, $F(m)$ — преобразование Фурье функции $h(x)$.

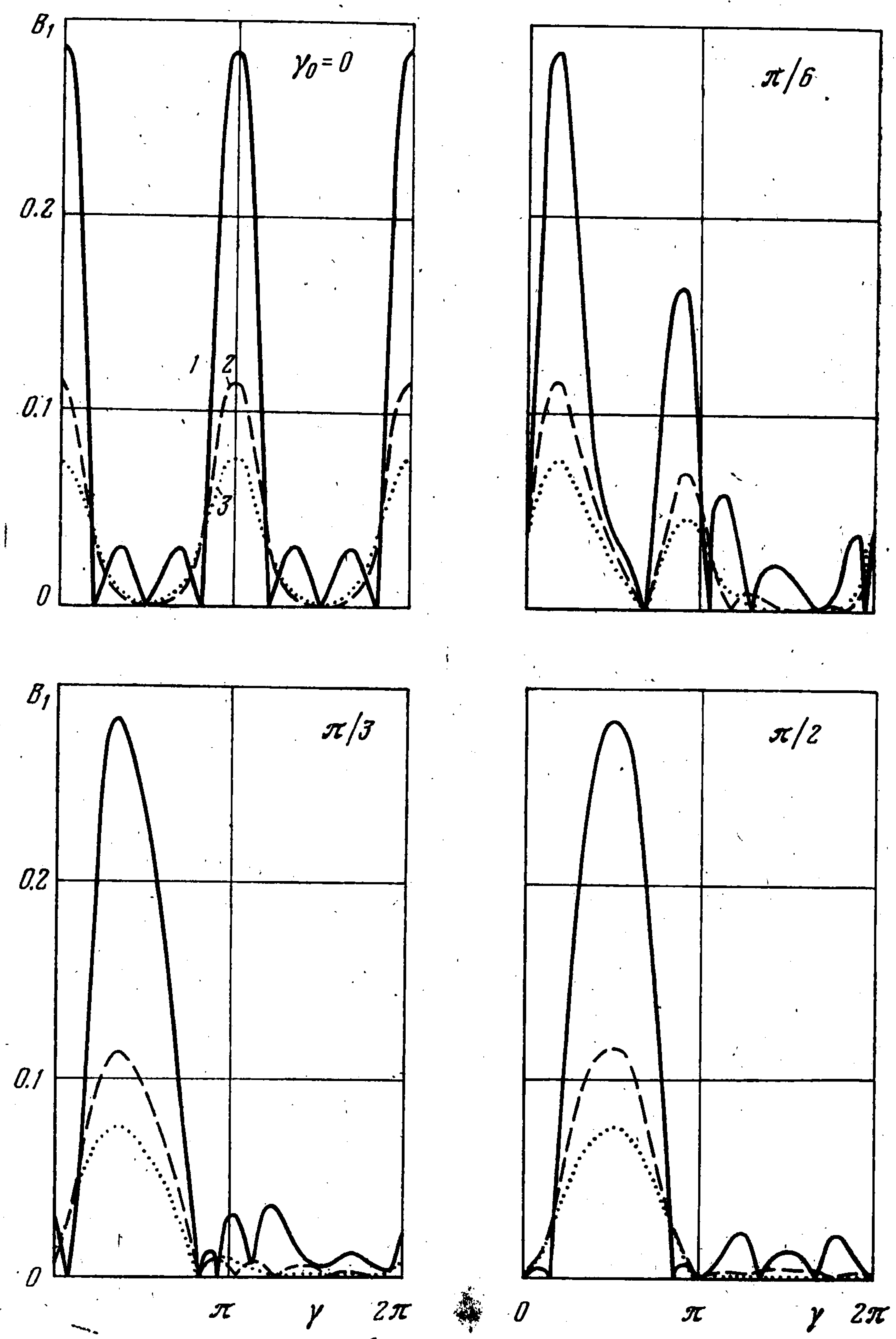
Интеграл (5.3) аналогичен рассмотренному в работе [10]. Его асимптотика при $|x| \to \infty$ имеет вид

(5.4) $$A = A_{\pm} \exp(\pm i m_0 x) + O(e^{-\delta|x|}) \quad (x \to \pm\infty,\ \delta > 0)$$

(5.5) $$A_+ = i\Psi(r_0) F(0) \sec\gamma_0, \quad \Psi = r_0 [1 + \operatorname{sh}(2r_0)(2r_0)^{-1}]^{-1}$$

(5.6) $$A_- = -i\Psi(r_0) F(-2r_0 \cos\gamma_0) \cos 2\gamma_0 \sec\gamma_0$$

Формулы (5.1), (5.4) показывают, что падающая волна генерирует поле рассеянных поверхностных волн, включающее отраженную и прошедшую волны, имеющие амплитуды порядка ε, а также локализованную в окрестности неровности дна систему волн с экспоненциально убывающей с ростом $|x|$ амплитудой. Последние волны при $n_0 \neq 0$ распространяются вдоль неровности, при $n_0 = 0$ представляют собой стоячие волны. Та-

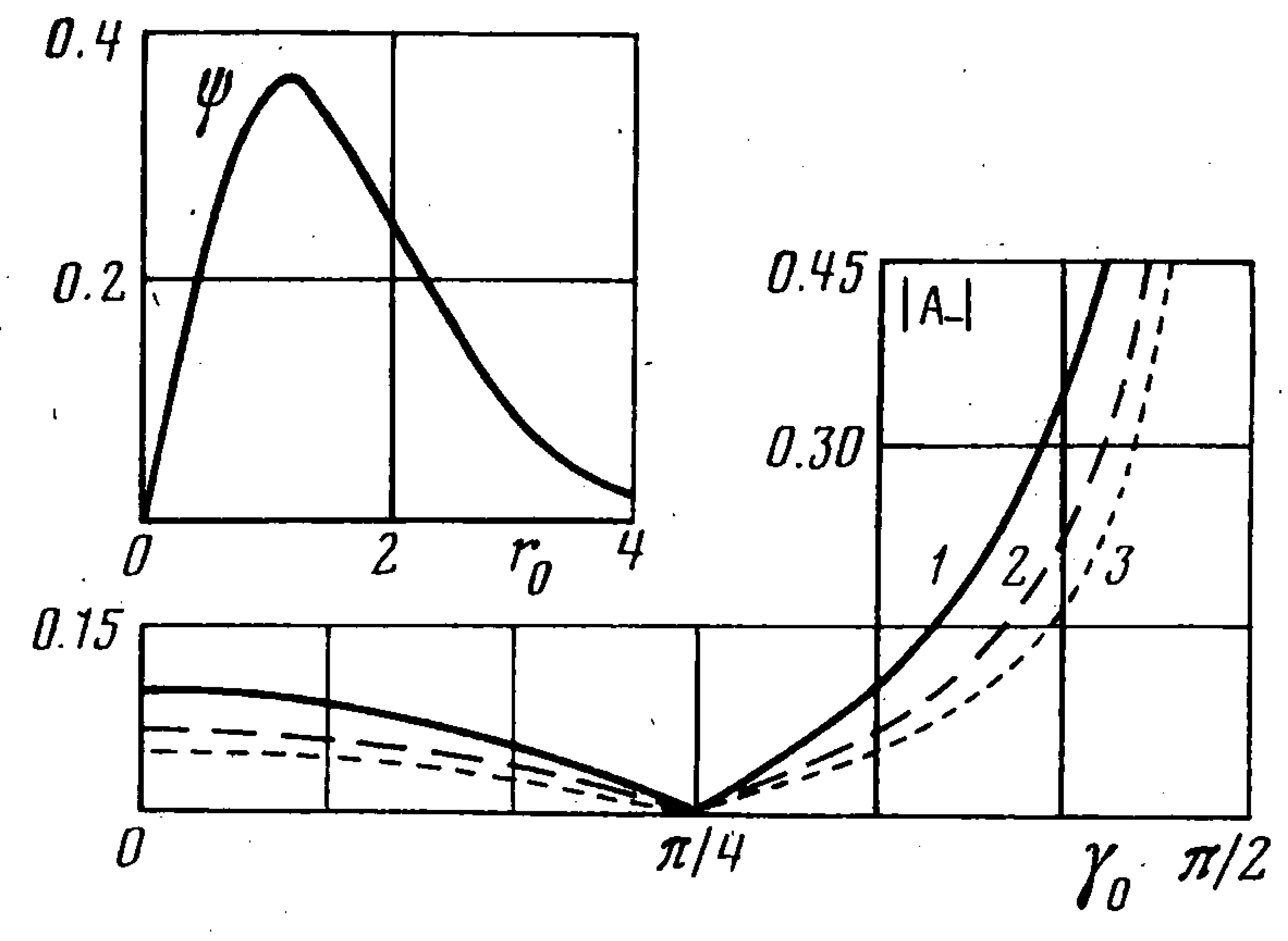


Фиг. 3

ким образом, неровность дна вида $h = h(x)$ обладает волноводными свойствами [11].

Из формул (5.4) следует, что амплитуда рассеянной волны одинакова для углов падения $\pm\gamma_0$ и является возрастающей функцией $\gamma_0 \in [0, \pi / 2)$. Как функция r_0, $|A_+|$ имеет единственный максимум, $\max_{r_0}|A_+| \approx 0.37\,|F(0)\sec\gamma_0|$, достигаемый при $r_0 \approx 1.2$ (фиг. 4).

Зависимость амплитуды отраженной волны от r_0 и γ_0 более сложная. При малых r_0 в соответствии с (5.5), (5.6) имеем $|A_-| \approx |A_+|\,|\cos 2\gamma_0|$, а поэтому $A_- = 0$



Фиг. 4

только при $\gamma_0 = \pi / 4$. Такой случай представлен на фиг. 4, где кривым *1* — *3* соответствуют функции $h(x)$ вида (4.3) — (4.5); $r_0 = 0.1$, $l = 1$. Если функция $F(\xi)$ осциллирующая, то при достаточно больших r_0 существует набор углов падения γ_0, для которых отраженная волна не генерируется. Увеличение r_0 и повышение гладкости неровности дна приводят, вообще говоря, к уменьшению $|A_-|$ при $\gamma_0 \in [0, \pi / 4)$.

При $\gamma_0 \to \pm\pi / 2$ предлагаемая приближенная трактовка задачи о рассеянии волны на неровности дна вида $h = h(x)$ неприменима.

Поступила 24 II 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Shaw R. P.* An outer boundary integral equation applied to transient wave scattering in an inhomogeneous medium. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1975, vol. 42, No. 1.
2. *Черкесов Л. В.* Гидродинамика поверхностных и внутренних волн. Киев, «Наукова думка», 1976.
3. *Bernard E. N.*, *Vastano A. C.* Numerical computation of tsunami response for island systems. J. Phys. Oceanogr., 1977, vol. 7, No. 3.
4. *Стокер Д. Д.* Волны на воде. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
5. *Войт С. С.* Дифракция от полуплоскости волн, образуемых на поверхности жидкости периодически действующим источником. ПММ, 1961, т. 25, вып. 2.
6. *Беляев В. А.*, *Селезов И. Т.* Дифракция поверхностных гравитационных волн на двух вертикальных препятствиях. Гидромеханика, вып. 35. Киев, «Наукова думка», 1977.
7. *Harband J.* Propagation of long waves over water of slowly varying depth. J. Eng. Math., 1977, vol. 11, No. 2.
8. *Федорюк М. В.* Метод стационарной фазы для многомерных интегралов. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, т. 2, № 1.
9. *Федорюк М. В.* Метод стационарной фазы в многомерном случае. Вклад от границы области. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1970, т. 10, № 2.
10. *Войт С. С.* Волны на поверхности жидкости, возникающие от перемещающейся периодической системы давлений. ПММ, 1957, т. 21, вып. 1.
11. *Лаврентьев М. А.*, *Шабат Б. В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. М., «Наука», 1977.