Прикладная математика и механика. Том 43, 1979

УДК 531.011;517.924

МЕТОД ТОЧНОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Л. М. Беркович

(Куйбышев)

Найдены необходимые и достаточные условия точной линеаризации нелинейных автономных дифференциальных уравнений второго порядка путем нелинейного преобразования функции и независимой переменной. В качестве приложений рассмотрены задача вариационного исчисления о нахождении траекторий при движении точки в консервативном поле, система Лотки — Вольтерра, описывающая динамику двух взаимодействующих биологических популяций, динамические системы с разделенными переменными, а также динамические системы типа Лиувилля.

1. Постановка задачи и общие результаты. Рассмотрим автономное нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$N(x) \equiv x^{\cdot\cdot} + f(x)x^{\cdot 2} + \varphi(x)x^{\cdot} + \psi(x) = 0 \tag{1.1}$$

Построим зависящий от двух произвольных функций класс уравнений типа (1.1), решения которых выражаются в квадратурах. Построение осуществляется, исходя из условия точной линеаризации в следующем смысле. Искомый класс уравнений типа (1.1) преобразованием зависимой и независимой переменных

$$x \to X = v^{-1}(x)x, \quad dt \to d\tau = u(x)dt \tag{1.2}$$

$$u(x(t))v(x(t)) \neq 0, \quad \forall t \in I = \{t \mid a \leqslant t \leqslant b\}$$

приводится к наперед заданному линейному автономному виду

$$X'' + b_1X' + b_0X + c = 0, \quad b_1, b_0, c = \text{const}, \quad (') = d / d\tau \tag{1.3}$$

В результате линеаризации исследование нелинейного уравнения типа (1.1) в плоскости переменных (x, t) сводится к рассмотрению линейного уравнения (1.3) в плоскости (X, τ) и применению преобразования, обратного к (1.2).

Линеаризация при помощи преобразования искомой функции применялась в [1], а путем преобразования независимой переменной — в [2–4]. Отдельные примеры типа (1.1) рассматривались в [5–8].

Теорема 1. Для того, чтобы уравнение (1.1) преобразованием (1.2) приводилось к виду (1.3), необходимо и достаточно, чтобы (1.1) могло быть представлено с помощью факторизации через дифференциальные операторы первого порядка в виде (здесь операторы в общем случае некоммутативны)

(1.4) $$\left(D-\frac{v^{\cdot}}{v}-r_2u-\frac{u^{\cdot}}{u}\right)\left(D-\frac{v^{\cdot}}{v}-r_1u\right)x+cu^2v=0,\quad D=\frac{d}{dt}$$

или, чтобы (1.1) могло быть факторизовано через коммутативные операторы, в виде

(1.5) $$(u^{-1}D-u^{-1}v^{-1}v^{\cdot}-r_2)(u^{-1}D-u^{-1}v^{-1}v^{\cdot}-r_1)x+cv=0$$

Здесь $v^{\cdot}=v^*x^{\cdot}$, $u^{\cdot}=u^*x^{\cdot}$, $(*)=d\,/\,dx, r_k$ — корни характеристического уравнения

(1.6) $$r^2+b_1r+b_0=0$$

Доказательство теоремы 1 проводится аналогично доказательству [9,10] соответствующей теоремы для линейных неавтономных дифференциальных уравнений с использованием метода факторизации дифференциальных операторов.

Необходимость. Пусть применение (1.2) к (1.1) приводит к выражению (1.3), которое запишем в виде

(1.7) $$(D_\tau-r_2)(D_\tau-r_1)X+c=0,\quad D_\tau=d\,/\,d\tau$$

Умножая (1.7) слева на u^2v, используя преобразование (1.2) и применяя к полученному выражению операторное тождество

$$(u^{-1}D-r_k)\,u^{1-k}v^{-1}=u^{-k}v^{-1}L_k$$

$$L_k=D-\frac{v^{\cdot}}{v}-r_ku-(k-1)\frac{u^{\cdot}}{u},\quad k=1,2$$

придем к (1.4).

Достаточность. Применим (1.2) к (1.4) и воспользуемся тождеством

$$L_ku^{k-1}v=u^kv\,(D_\tau-r_k),\quad k=1,2$$

Тогда (1.4) преобразуется к виду

$$u^2v\,(D_\tau-r_2)(D_\tau-r_1)X+cu^2v=0$$

откуда следует (1.3). Для перехода от разложения (1.4) к (1.5) следует последовательно применять операторное тождество

$$u^{-k}L_k=(u^{-1}D-(vu)^{-1}v^{\cdot}-r_k)u^{-k-1}$$

Коммутативность операторов $u^{-1}D-(vu)^{-1}v^{\cdot}-r_k$ проверяется непосредственно. Для доказательства теоремы остается лишь заметить, что условие (1.5), как и (1.4), является не только необходимым, но и достаточным.

Доказанная теорема указывает на аналогию между линеаризуемыми нелинейными автономными уравнениями типа (1.1) и алгебраическими уравнениями (1.6). Ранее [9,10] метод факторизации позволил найти аналогию и для линейных неавтономных дифференциальных уравнений, приводимых к уравнениям с постоянными коэффициентами.

Лемма 1. Если (1.1) линеаризуется с помощью (1.2), то имеет место разложение

(1.8) $$EN(x) \equiv Ex^{\cdot\cdot} - Fx^{\cdot 2} + Gx^{\cdot} + H$$
$$v \neq ax, \quad E = 1 - v^{-1}v^{*}x, \quad F = (2v^{-1}v^{*} + u^{-1}u^{*})E + xv^{-1}v^{**}$$
$$G = b_1 uE, \quad H = b_0 u^2 x + cvu^2$$

Для доказательства достаточно перемножить дифференциальные операторы в выражении (1.4).

Лемма 2. Общее решение нелинейного автономного уравнения второго порядка

(1.9) $$v^{**} - 2v^{-1}v^{*2} + (2x^{-1} - u^{-1}u^{*} - f)v^{*} + x^{-1}(u^{-1}u^{*} + f)v = 0$$
$$f = f(x), \quad v \neq ax + b$$

имеет вид (α, β — произвольные постоянные)

(1.10) $$v(x) = x\left[\alpha + \beta \int u \exp\left(\int f dx\right) dx\right]^{-1}$$

Доказательство. Подстановкой $v = V^{-1}$ уравнение (1.9) приводится к линейному неавтономному виду

(1.11) $$V^{**} + \left(\frac{2}{x} - \frac{u^{*}}{u} - f\right)V^{*} - \frac{1}{x}\left(\frac{u^{*}}{u} + f\right)V = 0$$

Уравнение (1.11) допускает факторизацию

$$\left(D_x + \frac{1}{x} - \frac{u^{*}}{u} - f\right)\left(D_x + \frac{1}{x}\right)V = 0, \; D_x = \frac{1}{x}$$

Следовательно, общее решение (1.11) имеет вид

$$V = \frac{1}{x}\left[\alpha + \beta \int u \exp\left(\int f dx\right) dx\right]$$

Здесь α, β — произвольные постоянные и, следовательно, $v(x)$ удовлетворяет соотношению (1.10).

Теорема 2. Для того, чтобы уравнение (1.1) могло быть линеаризовано преобразованием (1.2), необходимо и достаточно, чтобы (1.1) было представимо в одном из следующих видов:

(1.12) $$x^{\cdot\cdot} + fx^{\cdot 2} + b_1\varphi x^{\cdot} + \Lambda_1(\varphi, x) = 0$$
$$\Lambda_1(\varphi, x) = \varphi \exp\left(-\int f dx\right)\left[b_0 \int \varphi \exp\left(\int f dx\right) dx + \frac{c}{\beta}\right]$$

(1.13) $$x^{\cdot\cdot} - \left(\frac{2a}{ax+b} + \frac{\varphi^{*}}{\varphi}\right)x^{\cdot 2} + b_1\varphi x^{\cdot} + \Lambda_2(\varphi, x) = 0$$
$$\Lambda_2(\varphi, x) = \varphi^2 (ax + b)b^{-1}[b_0 x + c(ax + b)]$$

Уравнения (1.12) и (1.13) приводятся к (1.3) соответственно преобразованиями

$$X_1(x) = \beta \int \varphi \exp\left(\int f dx\right) dx, \quad d\tau = \varphi(x)dt$$
$$X_2(x) = x / (ax + b), \quad b \neq 0, \quad d\tau = \varphi(x)dt$$

Доказательство. Запишем (1.9) в виде

$$[(2v^{-1}v^{*} + u^{-1}u^{*})(1 - v^{-1}v^{*}x) + xv^{-1}v^{**}] / (1 - v^{-1}v^{*}x) = f$$

Полагая в формуле (1.10) $\alpha = 0$, $\varphi \equiv u(x)$ и подставляя выражение X_1 в (1.8), получим уравнение (1.12). Уравнение (1.13) соответствует подстановке в (1.8) выражения

$$(1.14) \qquad v = ax + b, \quad b \neq 0$$

Следствие 1. Общие решения уравнений (1.12), (1.13) можно представить в параметрическом виде

$$(1.15) \qquad \begin{aligned} &r_1 \neq r_2 \neq 0, \quad X_i = C_1 \exp(r_1\tau) + C_2 \exp(r_2\tau) - c/b_0 \\ &r_1 = r_2 = -b_1/2 \neq 0, \quad X_i = \exp(-b_1\tau/2)(C_1\tau + C_2) - c/b_0 \\ &r_1 = 0, \quad r_2 \neq 0, \quad X_i = C_1 + C_2 \exp(-b_1\tau) - cb_1^{-1}\tau \\ &r_1 = r_2 = 0, \quad X_i = C_1 + C_2\tau - \frac{c}{2}\tau^2 \\ &b_1 = 0, \quad b_0 > 0, \quad X_i = A\sin(\sqrt{b_0}\,\tau + B) - c/b_0 \\ &b_1 = 0, \quad b_0 < 0, \quad X_i = A\,\mathrm{sh}(\sqrt{-b_0}\,\tau + B) - c/b_0 \\ &i = 1, 2; \quad t = \int \frac{d\tau}{\varphi(x(\tau))} \end{aligned}$$

Здесь C_1, C_2, A, B — произвольные постоянные.

Отметим, что общие решения уравнений (1.12), (1.13), полученные исключением параметра τ из уравнений (1.15), являются нелинейными функциями двух произвольных постоянных.

Следствие 2. Если $c = 0$, уравнения (1.12), (1.13) допускают однопараметрические решения ($k = 1, 2$)

$$(1.16) \qquad r_k t + C_k^{(1)} = I_1, \quad I_1 = \int \frac{\exp\lambda(x)\,dx}{\beta^{-1}X_1(x)}, \quad \lambda(x) = \int f\,dx$$

$$(1.17) \qquad r_k t + C_k^{(2)} = I_2, \quad I_2 = b\int \frac{dx}{x(ax+b)\varphi}$$

Здесь $C_k^{(i)}$ — произвольная постоянная, удовлетворяющая для $i = 1, 2$ соответственно уравнениям первого порядка

$$(1.18) \qquad x^{\cdot} - r_k \exp\left(-\int f\,dx\right)\int \varphi \exp\left(\int f\,dx\right)dx = 0$$

$$(1.19) \qquad x^{\cdot} - r_k b^{-1} x(ax+b)\varphi = 0$$

Здесь r_k — простые характеристические корни (1.6), а при кратных корнях (1.6) — решения вида

$$(1.20) \qquad -\frac{b_1}{2}t + (k-1)\int \frac{dt}{\tau(t)} + C_k^{(i)} = I_i, \quad i = 1, 2$$

Здесь $\tau(t)$ — обращение интеграла для t в (1.15).

Доказательство. Уравнения (1.12), (1.13) эквивалентны факторизации (1.5) при $c = 0$, которой при $r_1 \neq r_2$ соответствует система уравнений первого порядка

$$(1 - v^{-1}v^*x)x^{\cdot} - r_k ux = 0, \quad k = 1, 2$$

Отсюда при $u \equiv \varphi$ в силу (1.10) (соответственно (1.14) приходим к уравнениям (1.18), (1.19)). Пусть теперь $r_1 = r_2 = -b_1/2$. Тогда справедливы соотношения

$$(1.21) \qquad \exp(-b_1/2)\tau^{k-1} = X_i(x), \quad \tau = \int \varphi(x)\,dt, \quad k = 1, 2$$

Отсюда следуют формулы (1.20).

Рассмотрим два иллюстративных примера.

Пример 1. Рассмотрим встречающееся при изучении однозначных функций, определяемых дифференциальными уравнениями второго порядка, уравнение [11]

(1.22) $$x^{\cdot\cdot} + 3xx^{\cdot} + x^3 = 0$$

Оно относится к классу (1.12), где $f(x) = 0$, $\varphi(x) = x$, $b_1 = 3$, $c = 0$, $\beta = 2$, $b_0 = 2$ и допускает факторизацию

$$(D - r_2 x)(D + x^{\cdot} / x - r_1 x)\, x \equiv 2\,(x^{\cdot\cdot} + 3xx^{\cdot} + x^3)$$

полученную из (1.8) при $v = x^{-1}$, $u = x$ (r_1, r_2 суть корни характеристического уравнения $r^2 + 3r + 2 = 0$). Пусть $r_1 = -2$, $r_2 = -1$. Тогда однопараметрические решения уравнения (1.22) в силу (1.16) имеют вид

(1.23) $$x = 1 / (t + c), \quad x = 2 / (t + c)$$

Заметим, что решение (1.23) в [11] не было указано.

Уравнение (1.22) преобразованием $x^2 = X$, $d\tau = x dt$ приводится к линейному виду $X'' + 3X' + 2X = 0$, откуда на основании (1.15) имеем ($C_1 C_2$ — произвольные постоянные)

(1.24) $$x = \pm [C_1 \exp(-2\tau) + C_2 \exp(-\tau)]^{1/2}, \quad t = \int \frac{d\tau}{x}$$

Пусть $C_2 \neq 0$. Тогда

$$x = \pm \exp(-\tau)(C_1 + C_2 \exp \tau)^{1/2}, \quad t = \pm 2C_2^{-1} (C_1 + C_2 \exp \tau)^{1/2} - k$$

Здесь k — произвольная постоянная. Исключив параметр τ и обозначив $2k = b$, $k^2 - 4C_1 / C_2^2 = c$, придем к двухпараметрическому семейству решений $x = (2t + b) / (t^2 + bt + C)$. При $C_2 = 0$ из (1.24) вновь получим формулу (1.23).

Пример 2. Одномерное движение частицы вдоль оси.

Пусть M — масса центрального тела, m — масса частицы. Уравнение одномерного невозмущенного движения частицы и интеграл энергии имеют вид

(1.25) $$x^{\cdot\cdot} + x^{\cdot 2} / 2x + h_k / x = 0, \quad h_k = k^2 / x - x^{\cdot 2} / 2$$

G — гравитационная постоянная, h_k — кеплеровская энергия, $k^2 = G(M + m)$.

Уравнение (1.25) имеет особенность при $x = 0$. Преобразованием $x = \sqrt{xy}$, $d\tau = x^{-1}dt$ уравнение (1.25) приводится к виду линейного гармонического осциллятора $y'' + h_k y / 2 = 0$.

Таким образом, метод точной линеаризации позволяет регуляризировать дифференциальные уравнения. Более громоздким путем линеаризация уравнения (1.25) осуществлена в [12].

Следствие 3. Общие решения уравнений (1.12) и (1.13) (при $b_1 = 0$) соответственно представлены в виде следующих соотношений между t и x:

(1.26) $$t = \pm \frac{\beta}{\sqrt{|b_0|}} \int \frac{\exp[\lambda(x)]\, dx}{[A_1 \mp (c/b_0 + X_1(x))^2]^{1/2}} + A_2$$

$$t = \pm \frac{b_0}{\sqrt{|b_0|}} \int \frac{dx}{\varphi(ax + b)^2 [A_1 \mp (c / b_0 + X_2(x))^2]^{1/2}} + A_2$$

Здесь A_1, A_2 — произвольные постоянные; в подкоренных выражениях знак плюс соответствует $b_0 > 0$ и знак минус — $b_0 < 0$.

Доказательство. Решения (1.26) уравнений (1.12), (1.13) получаются исключением параметра τ из трех последних соотношений (1.15).

Теорема 3. 1) Ядро $u(x(t))$ и множитель $v(x(t))$ преобразования (1.2), линеаризирующего уравнение (1.12), удовлетворяют соответственно уравнениям

$$u^{\cdot\cdot} + E(\Phi)u^{\cdot 2} + b_1 uu^{\cdot} + \Phi^{*-1}\Delta_1(u, \Phi) = 0$$
$$v^{\cdot\cdot} + E(F)v^{\cdot 2} + b_1\varphi(F)v^{\cdot} + F^{*-1}\Lambda_1(\varphi(F), F) = 0$$
$$E(y) = y^{*-1}y^{**} + f(y)y^*$$

Здесь в первом уравнении $(*) = d / du$, $x = \Phi(u)$ — функция, обратная по отношению $u = \varphi(x)$, во втором $(*) = d / dv$, $x = F(v)$ — обращение выражения

$$v(x) = x\left[\beta\int\varphi\exp\left(\int f\,dx\right)dx\right]^{-1}$$

2) Ядро $u(x(t))$ и множитель $v(x(t))$ преобразования (1.2), линеаризирующего уравнение (1.13), удовлетворяют соответственно уравнениям

$$u^{\cdot\cdot} + \left(\Phi^{*-1}\Phi^{**} - \frac{2a\Phi^*}{a\Phi + b} - \frac{1}{u}\right)u^{\cdot 2} + b_1 uu^{\cdot} + \Phi^{*-1}\Lambda_2(u, \Phi) = 0$$
$$v^{\cdot\cdot} - \left(\frac{2}{v} + \frac{\varphi^*}{\varphi}\right)v^{\cdot 2} + b_1\varphi v^{\cdot} + a\Lambda_2\left(\varphi, \frac{(v-b)}{a}\right) = 0$$

Доказательство. 1) получается подстановками $x = \Phi(u)$ и $x = F(v)$ в уравнение (1.12), а доказательство 2) — подстановками $x = \Phi(u)$ и $x = (v - b) / a$ — в уравнение (1.13).

Следующая теорема, доказываемая непосредственной подстановкой, показывает, что в уравнениях (1.12), (1.13) всегда можно избавиться от члена с квадратом производной.

Теорема 4. Уравнения (1.12), (1.13) преобразованиями

$$x = s(y), \quad s^* = \exp\left(-\int f(s)\,ds\right)$$
$$s^* = (as + b)^2\varphi(s), \quad (*) = d / dy$$

приводятся соответственно к уравнениям типа Льенара

$$y^{\cdot\cdot} + b_1\varphi(s)y^{\cdot} + \varphi(s)\left(\frac{c}{\beta} + b_0\int\varphi(s)\,dy\right) = 0$$
$$y^{\cdot\cdot} + b_1\varphi(s)y^{\cdot} + \varphi(s)\left(\frac{b_0 s}{b(as + b)} + \frac{c}{\beta}\right) = 0$$

2. Линеаризация некоторых классов динамических систем

1°. Рассмотрим класс уравнений

$$x^{\cdot\cdot} - \varphi^*\varphi^{-1}x^{\cdot 2} + b_1\varphi x^{\cdot} + \varphi^2(b_0 x + c / \beta) = 0$$

Этот класс допускает линеаризацию при преобразовании независимой переменной. Соответствующее преобразование имеет вид $X = \beta x$, $d\tau = \varphi dt$.

2°. Рассмотрим классы динамических систем типа (1.1), эквивалентных (1.12), у которых в качестве произвольных приняты функции $f(x)$ и $\psi(x)$ или $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ соответственно.

Пусть $f(x)$ и $\psi(x)$ — произвольные функции. Соответствующий класс динамических систем описывается уравнением

$$x^{\cdot\cdot} + fx^{\cdot 2} + b_1\Omega + b_0\psi = 0, \quad b_0 \neq 0 \tag{2.1}$$
$$\Omega = \psi\exp(\lambda(x))[2\textstyle\int\psi\exp(2\lambda(x))\,dx]^{-1/2}$$

линеаризуемым преобразованием (здесь $\lambda(x)$ определено в (1.17))

(2.2) $$X = [2\int \psi \exp(2\lambda(x))\,dx]^{1/2}, \quad d\tau = \Omega dt$$

Еще один класс динамических систем с произвольными $f(x)$, $\psi(x)$ дает уравнение

(2.3) $$x^{\cdot\cdot} + fx^{\cdot 2} + b_1\psi \exp\left(\int f dx\right) x^{\cdot} + c\beta^{-1}\psi = 0$$

линеаризуемое преобразованием

$$X = \beta \int \psi \exp\left(\int f\,dx\right) dx, \quad d\tau = \psi \exp\left(\int f\,dx\right) dt$$

Наконец, класс динамических систем с произвольными $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ описывается уравнением

$$x^{\cdot\cdot} + \left(b_0 \frac{\varphi^2}{\psi} - \frac{\psi^*}{\psi} + \frac{\varphi^*}{\varphi}\right) x^{\cdot 2} + b_1\varphi x^{\cdot} + \psi = 0$$

которое линеаризуется преобразованием

$$X = \exp\left(b_0 \int \frac{\varphi^2}{\psi}\,dx\right), \quad d\tau = \varphi\,dt$$

3°. Важный класс динамических систем представляется уравнением вида

(2.4) $$x^{\cdot\cdot} + fx^{\cdot 2} \pm a^2\psi = 0$$

Преобразованием (2.2) оно приводится к линейному уравнению

(2.5) $$X'' \pm a^2 X = 0$$

В силу следствий 3 и 1 (см. п. 1) уравнение (2.4) имеет первые интегралы

(2.6) $$x^{\cdot 2} = a^2\left(C \mp 2\int \psi \exp\left(2\int f\,dx\right) dx\right) \exp\left(-2\int f\,dx\right)$$

и, кроме того, допускает однопараметрические решения

(2.7) $$\int \frac{\Omega}{\psi}\,dx = \pm\sqrt{\mp a^2}\,t + C$$

Здесь C — произвольная постоянная, Ω определено соотношением (2.1).

Пример 3 [13]. Найдем первые интегралы и однопараметрические семейства решений уравнения

(2.8) $$x^{\cdot\cdot} + \frac{1}{nx(1-x^2)} x^{\cdot 2} + \frac{nx^2 - 1}{nx} = 0$$

Согласно (2.6) и (2.7), получим первые интегралы и однопараметрические решения уравнения (2.8) в виде

$$x^{\cdot 2} = 1 - x^2 + C(x^{-2} - 1)^{1/n}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{-1}\sqrt{1-x^2}} = \pm\sqrt{-1}\,t + C$$

Следовательно, уравнение (2.8) обладает периодическими решениями

$$x = \sin(t + C), \quad x = \cos(t + C)$$

4°. К частному случаю уравнения (2.4) приводит задача вариационного исчисления о нахождении траекторий при движении точки в консервативном поле, для которых уравнение Эйлера приводится к виду

$$y'' + f(y)\,y'^2 + f(y) = 0$$

5°. Допускают линеаризацию также специальные случаи динамических систем вида

$$x_1^{\cdot} = P(x_1, x_2), \quad x_2^{\cdot} = Q(x_1, x_2)$$

которые путем исключения переменных сводятся или к уравнениям вида (1.12), (1.13), или к уравнениям (2.1) — (2.3), эквивалентным (1.12). Для исключения переменных (разделения движений) в нелинейных системах применим метод результанта дифференциальных многочленов.

Например, система Лотки — Вольтерра [14]

$$x_i^{\cdot} = \alpha_i x_i + \beta_i x_i x_{i+1}, \quad \alpha_i, \ \beta_i = \text{const}, \quad i = 1, \ 2, \quad i+1 \equiv 0 \pmod 2$$

описывающая динамику двух взаимодействующих биологических популяций, сводится к системе уравнений второго порядка, принадлежащих к классу (1.12):

$$x_i^{\cdot\cdot} - x_i^{-1} x_i^{\cdot 2} - (\alpha_{i+1} + \beta_{i+1} x_i) x_i^{\cdot} + \alpha_i x_i (\alpha_{i+1} + \beta_{i+1} x_i) = 0, \quad i = 1, \ 2 \tag{2.9}$$

Для вывода (2.9) рассмотрим вспомогательную систему

$$x_{i+1}^{\cdot} - (\alpha_{i+1} + \beta_{i+1} x_i) x_{i+1} = 0$$
$$\beta_i x_i x_{i+1} + \alpha_i x_i - x_i^{\cdot} = 0$$
$$\beta_i x_i x^{\cdot}_{i+1} + \beta_i x_i^{\cdot} x_{i+1} + \alpha_i x_i^{\cdot} - x_i^{\cdot\cdot} = 0$$

откуда следует выражение (2.9) для результата.

6°. Особый класс динамических систем, разрешаемых в квадратурах, образуют системы с разделенными переменными, для которых кинетическая и потенциальная энергия имеют вид (q_i — обобщенные координаты)

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_i(q_i) q_i^{\cdot 2}, \quad U = -\sum_{i=1}^{n} d_i(q_i)$$

Уравнения Лагранжа таких систем преобразуются к уравнениям с разделенными переменными вида

$$q_i^{\cdot\cdot} + \frac{1}{2} \frac{a_i^*}{a_i} q_i^{\cdot 2} + \frac{1}{a_i} d_i^* = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \quad (^*) = \frac{d}{dq_i} \tag{2.10}$$

Преобразованиями

$$Q_i = \sqrt{2d_i}, \quad d\tau = d_i^* (2a_i d_i)^{-1/2} dt$$

система (2.10) приводится к системе линейных уравнений $Q_i'' + Q_i = 0$, $(') = d / d\tau$, принадлежащих к виду (2.5). Воспользовавшись формулой (2.6) для первых интегралов, найдем следующие зависимости q_i от t:

$$dt = \pm a_i^{1/2} (c_i - 2d_i)^{-1/2} dq_i$$

3. Линеаризация лиувиллевых систем. Рассмотрим лиувиллевы системы [15, 16], для которых кинетическая и потенциальная энергии имеют соответственно вид

$$T = \frac{1}{2} b(q) \sum_{i=1}^{n} a_i(q_i) q_i^{\cdot 2}, \quad U = -\sum_{i=1}^{n} \frac{d_i(q_i)}{b(q)}, \quad b(q) = \sum_{i=1}^{n} b_i(q_i)$$

В силу уравнений Лагранжа и с учетом интеграла энергии $T - U = h$ получим систему дифференциальных уравнений

$$q_i^{\cdot\cdot} + \left(\frac{1}{2} q_i^{\cdot} a_i^{-1} \frac{da_i}{dq_i} + b^{-1} \frac{db}{dt} \right) q_i^{\cdot} - b^{-2} a^{-1} \frac{d}{dq_i} (hb_i - d_i) = 0 \tag{3.1}$$

Если коэффициенты при $q^{\cdot}_i$ в уравнениях (3.1) рассматривать как функции от t, то левую часть каждого из уравнений (3.1) можно рассматривать как сумму двух выражений, одно из которых является линейным неавтономным $q_i^{\cdot\cdot} + ({}^1/{}_2 q_i^{\cdot} a_i^{-1} da_i / dq_i + b^{-1} db / dt)$, а другое — нелинейным — $b^{-2} a_i^{-1} d (hb_i - d_i) / dq_i$.

Применим к (3.1) метод автономизации [17]. Преобразования

$$(3.2)\qquad d\tau_i = b^{-1}(q)\,a_i^{-1/2}(q_i)\,dt$$

сводят систему (3.1) к относящейся к классу (2.4) системе уравнений

$$(3.3)\qquad d^2q_i \,/\, d\tau_i^2 - d\,(hb_i - d_i) \,/\, dq_i = 0$$

Преобразования

$$Q_i = \sqrt{2(hb_i - d_i)},\quad d\tau_i = -\frac{d}{dq_i}\sqrt{2(hb_i - d_i)}\,ds$$

приводят ее к линейной системе

$$Q_i'' - Q_i = 0,\quad (') = d \,/\, ds$$

Решения (3.3) в силу (2.6) описываются формулами

$$(3.4)\qquad d\tau_i = \pm[2\,(c_i + hb_i - d_i)]^{-1/2}dq_i$$

Из (3.2) и (3.4) получим также известную систему первых интегралов

$$\frac{1}{2}b^2 a_i \dot{q}_i^2 = hb_i - d_i + c_i,\quad i = 1, \ldots, n,\quad \sum_{i=1}^{n} c_i = 0$$

и придем к известным соотношениям

$$\frac{\sqrt{a_1}\,dq_1}{\sqrt{2(c_1 + hb_1 - d_1)}} = \ldots = \frac{\sqrt{a_n}\,dq_n}{\sqrt{2(c_n + hb_n - d_n)}}$$

В заключение отметим, что метод точной линеаризации допускает распространение на скалярные и векторные дифференциальные нелинейные уравнения второго и высших порядков, как автономные, так и неавтономные.

Автор благодарит В. В. Румянцева, на семинаре которого докладывались основные результаты работы, а также Г. Н. Дубошина, указавшего автору на работу [8].

Поступила 23 VII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Painlevé P.* Sur les équations différentielles du second ordre et d'ordre supérieure dont l'intégrale générale est uniforme. Acta Math., 1902, vol. 25, p. 1—85.
2. *Чаплыгин С. А.* К теории движения неголономных систем. Теорема о приводящем множителе. Избр. тр. М., «Наука», 1976, с. 376—384.
3. *Levi-Civita T.* Sur la résolution qualitative du probléme restreint des trois corps. Acta Math., 1906, vol. 30, p. 305—327.
4. *Sundman K. F.* Mémoire sur le problème des trois corps. Acta Math., 1912, vol. 36, p. 105—179.
5. *Бондарь Н. Г.* Некоторые автономные задачи нелинейной механики. Киев, «Наукова думка», 1969.
6. *Dasarathy B. V., Srinivasan P.* Study of a class of non-linear systems. AIAA Journal, 1968, vol. 6, No. 4, p. 736—737.
7. *Klamkin M. S., Reid J. L.* Non-linear differential equations equivalent to solvable nonlinear equatuins. SIAM Journal, 1976, vol. 7, No. 3, p. 305—310.
8. *Magiros D. G.* Linearization of non-linear models of the phenomens. General electric company. Re-entry and environmental systems division, Philadelphia, Pa. USA, 1976.
9. *Беркович Л. М.* О факторизации обыкновенных линейных дифференциальных опе-

раторов, преобразуемых в операторы с постоянными коэффициентами. Изв. вузов. Сер. матем., 1965, № 4.
10. *Беркович Л. М.* О факторизации обыкновенных линейных дифференциальных операторов, преобразуемых в операторы с постоянными коэффициентами. Изв. вузов. Сер. матем., 1967, № 12.
11. *Голубев В. В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.— Л., Гостехиздат, 1950.
12. *Штифель Е., Шейфеле Г.* Линейная и регулярная небесная механика. М., «Наука», 1975.
13. *Utz W. R.* A second order differential equation of T. Otsuki. Proc. Amer. Math. Soc., 1977, vol. 64, No. 2, p. 238—240.
14. *Вольтерра В.* Математическая теория борьбы за существование. М., «Наука», 1976.
15. *Liouville J.* Mémoire sur l'intégration des équations différentielles du mouvement d'un nombre quelconque des points matérieles. J. Math. pures et appl., 1849, vol. 14, p. 257—299.
16. *Уиттекер Е. Т.* Аналитическая динамика. М.— Л., Гостехиздат, 1937.
17. *Беркович Л. М.* Преобразования обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения, 1971, т. 7, № 2.