Прикладная математика и механика. Том 43, 1979

УДК 531.36 + 62—50

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ

И. П. Смирнов

(Дзержинск)

Рассматривается задача оптимального управления линейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений со случайными начальными данными и неоднородными членами, когда функционалом качества управления служит интегральный квадратичный функционал. Выбор параметра управления в каждый момент времени производится на основании наблюдения реализовавшихся значений заданной совокупности случайных параметров системы. Выводятся явные выражения для оптимальных управляющих функций и производится сравнение полученных результатов с известными ранее результатами.

1. Постановка задачи. Рассмотрим управляемую систему

$$x^{\cdot} = A(t)x + B(t)u(t, \omega) + f(t, \omega), \quad x(0) = \xi(\omega) \tag{1.1}$$

$$(x \equiv \operatorname{col}\{x_1, \ldots, x_n\}, \quad u(t, \omega) \equiv \operatorname{col}\{u_1(t, \omega), \ldots, u_m(t, \omega)\})$$

где x — «состояние» системы, $u(t, \omega)$ — управляющая вектор-функция. Предполагается, что $A(t)$, $B(t)$ — матрицы размера $n \times n$, $n \times m$ соответственно с детерминированными (т. е. не зависящими от случая ω), равномерно ограниченными на отрезке управления $[0, T]$ измеримыми компонентами. Случайные вектор начальных данных $\xi(\omega)$ и вектор-функция неоднородных членов $f(t, \omega)$ считаются заданными на полном вероятностном пространстве (Ω, F, P) и удовлетворяют ограничению

$$M\left\{\xi'(\omega)\xi(\omega) + \int_0^T f'(s, \omega) f(s, \omega)\, ds\right\} < \infty \tag{1.2}$$

Здесь M — знак интегрирования по мере P (математическое ожидание), штрих — операция транспонирования.

В качестве функционала потерь рассмотрим функционал

$$J(u) = \frac{1}{2} M \int_0^T [x_u'(s, \omega) C(s) x_u(s, \omega) + u'(s, \omega) D(s) u(s, \omega)]\, ds \tag{1.3}$$

где $x_u(s, \omega)$ — решение системы (1.1), отвечающее управлению $u(s, \omega)$. Предполагается, что $C(s)$ — симметрическая, неотрицательно-определенная матрица размера $n \times n$, а $D(s)$ — симметрическая, положительно-определенная матрица размера $m \times m$. Элементы матриц $C(s)$, $D(s)$

$D^{-1}(s)$ — неслучайные, измеримые, равномерно ограниченные при $s \in [0, T]$ функции.

Введем понятие класса допустимых управлений U. Обозначим через F_t минимальную σ-подалгебру σ-алгебры F, относительно которой измеримы в совокупности случайные векторы $\xi(\omega)$, $f(s, \omega)$, $s \leqslant t$. Семейство $\{F_t\}$ монотонно не убывает по параметру t, т. е. образует поток σ-алгебр. Пусть $\{E_t\}$ — произвольный подпоток этого потока ($E_t \subset F_t$, $t \in [0, T]$), BE — σ-алгебра прогрессивно измеримых относительно потока $\{E_t\}$ подмножеств произведения $[0, T] \times \Omega$. Пусть далее L_2 (BE) — гильбертово пространство BE-измеримых функций со скалярным произведением

$$(\varphi, \psi) = M \int_0^T \varphi'(s, \omega) D(s) \psi(s, \omega)\, ds \tag{1.4}$$

Допустимым управлением назовем тогда всякий элемент пространства L_2 (BE), т. е. положим $U \equiv L_2$ (BE).

Поясним физический смысл введенного определения: σ-алгебра E_t интерпретируется здесь как совокупность тех случайных событий, связанных с системой регулирования, которые могут наблюдаться к моменту времени t; требование BE-измеримости управления $u(t, \omega)$ означает при этом, что величина $u_t(\omega)$ допустимого управления в каждый момент времени t выбирается с учетом информации о поведении случайных параметров системы, содержащейся в σ-алгебре E_t.

Практически совокупность наблюдаемых событий может быть задана, например, указанием множества наблюдаемых случайных параметров системы

$$E_t = \sigma[\xi_i(\omega),\ i = i_1, \ldots, i_l;\ f_k(s, \omega),\ k = k_1, \ldots, k_j,\ s \in S(t) \subset [0, t]]$$

В этом случае (см. [1], стр. 31) E_t-измеримая случайная величина $u_t(\omega)$ допускает представление

$$u_t(\omega) = g_t(\xi_{i_1}(\omega), \ldots, \xi_{i_l}(\omega);\ f_{k_1}(\cdot, \omega), \ldots, f_{k_j}(\cdot, \omega))$$

где $g_t(\cdot)$ — некоторое измеримое (неслучайное) отображение пространства «траекторий» $\{y_1, \ldots, y_l;\ z_1(\cdot), \ldots, z_j(\cdot)\}$ в пространство R^m, наглядно демонстрирующее явную зависимость управляющей функции от результатов наблюдений.

Заметим, что выбором потока $\{E_t\}$ можно задать самые разнообразные классы управляющих функций. Так, в случае $E_t \equiv \{\varnothing, \Omega\}$ получаем класс детерминированных управлений (программное управление), в случае $E_t \equiv F_{t-\delta}$, $\delta > 0$ — управление по запаздывающей информации и т. д.

Данная работа посвящена задаче минимизации функционала (1.3) на введенном выше классе допустимых управлений U. Близкие задачи изучались ранее в ряде работ (см., например, [2]) при дополнительном предположении о марковском свойстве процесса f.

2. Существование оптимального управления. Следуя [3], решением системы (1.1) назовем измеримую случайную вектор-функцию $x_u(t, \omega)$, которая при каждом $t \in [0, T]$ почти наверное удовлетворяет соответствующей (1.1) системе интегральных уравнений.

Лемма 1 [3]. В условиях п. 1 система (1.1) при любом допустимом управлении имеет единственное (с точностью до модификации) BF-измеримое решение

$$x_u(t,\omega)=\Phi_0(t)\left\{\xi(\omega)+\int_0^t\Phi_0^{-1}(s)\left[B(s)u(s,\omega)+f(s,\omega)\right]ds\right\} \tag{2.1}$$

где $\Phi_0(t)$ — фундаментальная матрица решений однородной системы $x^{\cdot} = A(t)x$.

Лемма 2. В условиях п. 1 в классе допустимых управлений существует оптимальный элемент u°: $J(u^\circ)\leqslant J(u)$, $u\in U$.

Доказательство. Имеем в силу (1.2): $J(0)=c<\infty$. Рассмотрим минимизирующую последовательность $\{u_k\}\subset U$: $u_1\equiv 0$, $J(u_k)\downarrow \inf J(u)$, $u\in U$. Из (1.3) и (1.4) имеем

$$\|u_k\|^2=(u_k,u_k)\leqslant J(u_k)\leqslant c,\quad k\geqslant 1$$

Так как шар пространства $L_2(\text{B}E)$ слабо компактен, то из последовательности $\{u_k\}$ можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность: $u_l\to u^\circ\in L_2(\text{B}E)$. Заметим, что поскольку $L_2(\text{B}E)\subset L_2(\text{B}F)$, то последовательность $\{u_l\}$ — слабо сходящаяся также и в пространстве $L_2(\text{B}F)$. Из формулы (2.1) вытекает поэтому слабая сходимость в $L_2(\text{B}F)$ последовательности x_{u_l} к x_{u°. Так как интегрант функционала (1.3) — выпуклая (вниз) функция своих аргументов, то из результатов работы [4] следует, что функционал J полунепрерывен снизу относительно последовательности $\{u_l\}$

$$\inf_{u\in U}J(u)=\lim_{l\to\infty}J(u_l)\geqslant\varliminf_{l\to\infty}\inf J(u_l)\geqslant J(u^\circ)$$

Но, с другой стороны, поскольку $u^\circ\in U$, то $J(u^\circ)\geqslant\inf\limits_{u\in U}J(u)$.

3. Критерии оптимальности. *Лемма 3.* Для того чтобы допустимое управление u° было оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы оно удовлетворяло следующему интегральному принципу минимума:

$$\min_{u\in U}H(u)=H(u^\circ) \tag{3.1}$$

$$H(u)\equiv(\varphi_0,u),\quad \varphi_0(t,\omega)\equiv D^{-1}(t)B'(t)\theta_0(t,\omega)+u^\circ(t,\omega)$$

$$\theta_0(t,\omega)\equiv M\left\{(\Phi_0'(t))^{-1}\int_t^T\Phi_0'(s)C(s)x^\circ(s,\omega)\,ds\,|\,E_t\right\},\quad x^\circ\equiv x_{u^\circ}$$

($M\{\eta\mid E_t\}$ — условное математическое ожидание случайной величины η относительно σ-алгебры E_t).

Доказательство. Необходимость (3.1) вытекает из результатов работ [5, 6]. Чтобы доказать достаточность этого условия, предположим, что $u^\circ\in U$ удовлетворяет (3.1), а u — произвольное допустимое управление. Имеем

$$2J(u)=M\int_0^T\left[(x_u-x^\circ)'C(x_u-x^\circ)+(u-u^\circ)'D(u-u^\circ)\right]ds+ \tag{3.2}$$

$$+2M\int_0^T\left[(x^\circ)'Cx_u+(u^\circ)'Du\right]ds-2J(u^\circ)\equiv J_1+J_2-2J(u^\circ)$$

В силу свойств матриц C и D имеем $J_1\geqslant 0$, причем равенство $J_1=0$ достигается лишь при условии, что $u(t,\omega)=u^\circ(t,\omega)$ для почти всех t, ω. Преобразуем J_2, используя (2.1) и (3.1). Имеем, меняя порядки интегрирования и учитывая свойства условного математического ожидания

$$J_2=2M\int\limits_0^T(x^\circ)'C\Phi_0\left[\xi+\int\limits_0^s\Phi_0^{-1}(Bu+f)\,d\tau\right]ds+2(u^\circ,u)=$$

$$=2\left\{M\int\limits_0^T(x^\circ)'C\Phi_0\left(\xi+\int\limits_0^s\Phi_0^{-1}f\,d\tau\right)ds\right\}+2M\int\limits_0^T\left(\int\limits_s^T(x^\circ)'C\Phi_0\,d\tau\right)\times$$

$$\times\,\Phi_0^{-1}Bu\,ds+2(u^\circ,u)\equiv2\{\alpha_1\}+2(\varphi_0,u)=2\alpha_1+2H(u)$$

Аналогично получаем

$$2J(u^\circ)=\alpha_1+H(u^\circ)\tag{3.3}$$

Поэтому из (3.2) вытекает в силу (3.1), (3.3)

$$2J(u)\geqslant\alpha_1+H(u^\circ)+2(H(u)-H(u^\circ))\geqslant2J(u^\circ)$$

что и означает оптимальность управления u°. Заметим, что отсюда же в силу сделанного выше замечания о величине J_1 выводится утверждение о единственности оптимального управления.

Лемма 4. Для того чтобы допустимое управление u° было оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы для почти всех t, ω выполнялось равенство

$$\varphi_0(t,\omega)=0\tag{3.4}$$

Доказательство. Достаточность условия (3.4) следует непосредственно из предыдущей леммы. Пусть далее $u^\circ\in U$ — оптимальное допустимое управление. Предположим, что (3.4) нарушается на множестве положительной меры, т. е. $\|\varphi_0\|>0$. Положим $u_1\equiv\gamma\varphi_0$, где γ — положительное число. Используя допустимость u°, легко проверить допустимость управления u_1. Но тогда

$$H(u_1)=\gamma\|\varphi_0\|^2<H(u^\circ)$$

при $\gamma<H(u^\circ)\|\varphi_0\|^{-2}$, что противоречит в силу (3.1) оптимальности управления u°.

Объединим результаты лемм 1— 4 в следующей теореме.

Теорема. Поставленная в п. 1 задача оптимального управления имеет единственное решение. Оптимальная управляющая функция (и только она) удовлетворяет для почти всех t, ω соотношению (3.4).

4. Вспомогательные результаты. Следующие предложения будут неоднократно использованы в дальнейшем.

Лемма 5. Пусть числовые функции $\eta_1(t,\omega)$, $\eta_2(t,\tau,\omega)$; $t,\tau\in[0,T]$, $\omega\in\Omega$ измеримы по совокупности переменных относительно σ-алгебр $B\times F$, $B\times B\times F$ (B — σ-алгебра борелевских подмножеств отрезка $[0,T]$) и интегрируемы по (t,ω), (t,τ,ω) соответственно. Пусть далее $\{C_t\}$ — произвольный поток полных по мере P σ-подалгебр σ—алгебры F. Тогда существует такой выбор вариантов условных математических ожиданий, что а) функция $\eta_3(t,\omega)\equiv M\{\eta_1(t,\omega)\mid C_t\}$ прогрессивно измерима относительно потока $\{C_t\}$ и интегрируема по совокупности переменных (t,ω); б) для почти всех t, ω

$$M\left\{\int\limits_0^T\eta_2(t,\tau,\omega)d\tau\,|\,C_t\right\}=\int\limits_0^TM\{\eta_2(t,\tau,\omega)|C_t\}\,d\tau$$

Доказательство леммы непосредственно вытекает из близких результатов работ [1,7].

Лемма 6. Пусть $Y(t, \omega)$ — решение (в смысле п. 2) системы интегральных уравнений

$$Y(t) = \alpha(t, \omega) + \int_0^t P(s) Y(s)\,ds$$

где $P(s)$ — матрица размера $n \times n$ с равномерно ограниченными на $[0, T]$ измеримыми компонентами, $\alpha(t, \omega)$ — измеримая случайная вектор-функция с интегрируемыми траекториями. Тогда при каждом $t \in [0, T]$ почти наверное

$$Y(t, \omega) = \alpha(t, \omega) + \Psi(t) \int_0^t \Psi^{-1}(s) P(s) \alpha(s, \omega)\,ds$$

Здесь $\Psi(t)$ — фундаментальная матрица системы $x^{\cdot} = P(t)x$.

Доказательство следует из формулы Коши, если учесть, что $Y = K + \alpha$, где K — решение системы $K^{\cdot} = PK + P\alpha$, $K(0) = 0$.

5. Построение оптимального управления. Будем искать оптимальное управление в виде

$$u^\circ(t, \omega) = -D^{-1}(t) B'(t) [G(t) M\{x^\circ(t, \omega) \mid E_t\} + h(t, \omega)] \tag{5.1}$$

Здесь $x^\circ(t, \omega)$ — как и ранее, решение системы (1.1), отвечающее управлению $u^\circ(t, \omega)$, а $G(t)$, $h(t, \omega)$ — неизвестные пока матрица размера $n \times n$ с детерминированными, равномерно ограниченными на $[0, T]$ измеримыми компонентами и ВE-измеримая интегрируемая вектор-функция соответственно. Подставляя (5.1) в формулу (2.1), получим

$$z^\circ(t, \omega) = \alpha(t, \omega) + \int_0^t P(s) z^\circ(s, \omega)\,ds$$

$$z^\circ(t, \omega) \equiv \Phi_0^{-1}(t) M\{x^\circ(t, \omega) \mid E_t\}, \quad P(t) \equiv -\Phi_0^{-1}(t) \Gamma(t) G(t) \Phi_0(t),$$

$$\Gamma(t) \equiv B(t) D^{-1}(t) B'(t), \quad \alpha(t, \omega) \equiv M\left\{\xi(\omega) - \int_0^t \Phi_0^{-1}[\Gamma h - f]\,ds \mid E_t\right\}$$

Применяя лемму 6, имеем отсюда

$$z^\circ(t, \omega) = \alpha(t, \omega) + \Psi(t) \int_0^t \Psi^{-1}(s) P(s) \alpha(s, \omega)\,ds$$

Используя эту формулу, можно установить, что при $s > t$

$$M\{z^\circ(s, \omega) \mid E_t\} = \Psi(s) \Psi^{-1}(t) z^\circ(t, \omega) + M\{\beta(t, s, \omega) \mid E_t\} \tag{5.2}$$

$$\beta(t, s, \omega) \equiv \alpha(s, \omega) - \Psi(s) \Psi^{-1}(t) \alpha(t, \omega) + \Psi(s) \int_t^s \Psi^{-1} P \alpha\,d\tau$$

Поскольку u° — оптимальное управление, то в силу теоремы оно удовлетворяет соотношению (3.4). Используя (5.2), получаем из (3.4)

$$u^\circ(t, \omega) = -D^{-1}(t) B'(t) [I_1(t) z^\circ(t, \omega) + I_2(t, \omega)] \tag{5.3}$$

$$I_1(t) \equiv (\Phi_0'(t))^{-1} \int_t^T \Phi_0'(s) C(s) \Phi_0(s) \Psi(s) ds \Psi^{-1}(t),$$

$$I_2(t, \omega) \equiv (\Phi_0'(t))^{-1} \int_t^T \Phi_0'(s) C(s) \Phi_0(s) M\{\beta(t, s, \omega) \mid E_t\} ds$$

Сравнивая (5.1) с (5.3), потребуем, чтобы при каждом t почти наверное удовлетворялись следующие равенства:

(5.4) $$I_1(t) = G(t)\Phi_0(t), \quad I_2(t, \omega) = h(t, \omega)$$

Дифференцируя первое из этих равенств по t, получаем известное матричное уравнение Риккати для определения матрицы $G(t)$

(5.5) $$G^{\cdot} + (GA + A'G) - G\Gamma G + C = 0, \quad G(T) = 0$$

В условиях п. 1 его решением служит симметрическая, неотрицательно-определенная матрица (см., например, [1,2]).

Пусть всюду далее $G(t)$ — решение системы (5.5). Используя (5.2) и лемму 5, преобразуем второе уравнение (5.4) к эквивалентному

(5.6) $$M\left\{\int_t^T \Phi_0'(s) G(s) [\Gamma(s) h(s, \omega) - f(s, \omega)] ds + \Phi_0'(t) h(t, \omega) \mid E_t\right\} = 0$$

Пусть измеримая случайная вектор-функция $h_1(t, \omega)$ обращает в нуль (при каждом t почти наверное) выражение, стоящее в (5.6) под знаком условного математического ожидания. Тогда ВE-измеримая вектор-функция $h(t, \omega) \equiv M\{h_1(t, \omega) \mid E_t\}$ (см. лемму 5) удовлетворяет системе (5.6). В этом можно убедиться непосредственной подстановкой в (5.6), если учесть, что при $s > t$ почти наверное

$$M\{h(s, \omega) \mid E_t\} = M\{h_1(s, \omega) \mid E_t\}$$

Для определения функции $h_1(t, \omega)$ получаем систему дифференциальных уравнений

$$h_1^{\cdot} + (A' - G\Gamma)h_1 + Gf = 0, \quad h_1(T, \omega) = 0$$

интегрируя которую, находим

(5.7) $$h(t, \omega) = M\left\{\Psi_0(t) \int_t^T \Psi_0^{-1}(s) G(s) f(s, \omega) ds \mid E_t\right\}$$

Здесь $\Psi_0(t)$ — фундаментальная матрица системы $x^{\cdot} = (G\Gamma - A')x$. Повторяя предыдущие рассуждения, можно установить теперь, что допустимое управление, удовлетворяющее соотношению (5.1), где $G(t)$, $h(t, \omega)$ — решения первой и второй систем (5.4) соответственно, удовлетворяет также и соотношению (3.4), т. е. оптимально.

Покажем, что такое управление действительно существует и найдем его в явном виде. Имеем из (5.1) и (2.1) уравнение для u°

(5.8) $$u^\circ(t, \omega) = -D^{-1}(t) B'(t) \Big[G(t) \Phi_0(t) \int_0^t \Phi_0^{-1}(s) B(s) u^\circ(s, \omega) ds + \gamma(t, \omega)\Big]$$

$$\gamma(t,\omega)\equiv M\left\{G(t)\Phi_0(t)\left[\xi(\omega)+\int_0^t\Phi_0^{-1}(s)f(s,\omega)ds\right]\mid E_t\right\}+h(t,\omega)$$

Предположим, что $\delta(t,\omega)$ — решение системы

$$\delta(t,\omega)=-\Gamma(t)[G(t)v(t,\omega)+\gamma(t,\omega)] \tag{5.9}$$

$$v(t,\omega)=\Phi_0(t)\int_0^t\Phi_0^{-1}(s)\,\delta(s,\omega)\,ds$$

Тогда функция

$$u^\circ(t,\omega)\equiv -D^{-1}(t)B'(t)[G(t)v(t,\omega)+\gamma(t,\omega)]$$

как можно убедиться непосредственной подстановкой, удовлетворяет системе (5.8). Систему (5.9) приведем к эквивалентной

$$v^\cdot-(A-\Gamma G)v+\Gamma\gamma=0,\quad v(0,\omega)=0$$

интегрируя которую, определим окончательное выражение для оптимального управления

$$u^\circ(t,\omega)=D^{-1}(t)\,B'(t)\left[G(t)(\Psi_0'(t))^{-1}\int_0^t\Psi_0'(s)\Gamma(s)\gamma(s,\omega)ds-\gamma(t,\omega)\right] \tag{5.10}$$

6. Примеры. Рассмотрим некоторые конкретные способы задания потока наблюдаемых событий $\{E_t\}$.

Программное управление. Пусть $E_t\equiv\{\varnothing,\Omega\}$. При этом всякое допустимое управление с вероятностью единица не зависит от случая. Управление осуществляется на основе априорных сведений о системе регулирования.

Из (5.7), (5.8) и (5.10) имеем почти наверное

$$\gamma(t,\omega)=\gamma(t)=G(t)\,\Phi_0(t)\left[M\xi+\int_0^t\Phi_0^{-1}(s)\,Mf(s)\,ds\right]+$$

$$+\Psi_0(t)\int_t^T\Psi_0^{-1}(s)\,G(s)\,Mf(s)\,ds$$

$$u^\circ(t,\omega)=u^\circ(t)=D^{-1}(t)\,B'(t)\left[G(t)(\Psi_0'(t))^{-1}\int_0^t\Psi_0'(s)\,\Gamma(s)\,\gamma(s)\,ds-\gamma(t)\right]$$

Марковский случай. Пусть начальные данные неслучайны: $\xi(\omega)\equiv\xi_0$, а вектор-функция $f(t,\omega)$ — марковский процесс, удовлетворяющий системе стохастических дифференциальных уравнений Ито

$$df=l(t,f)\,dt+m(t,f)\,dw,\quad f(0)=f_0 \tag{6.1}$$

где $w(t,\omega)$ — n-мерный винеровский процесс на (Ω,F,P), l — n-мерный вектор, m — матрица размера $n\times n$. Функции $l_i(t,x)$, $m_{ij}(t,x)$, $t\in[0,T]$, $x\in R^n$ предполагаются такими, что решение системы (6.1) обладает переходной плотностью вероятностей $p(t,x;\ s,y)$, удовлетворяющей обратному уравнению А. Н. Колмогорова (см. [3], стр. 96, 106).

Рассмотрим такой способ управления, когда осуществляется наблюдение всей траектории процесса f: $E_t\equiv\sigma[f(s,\omega),\ s\leqslant t]$. Имеем

$$M\{f(s,\omega)\mid E_t\}=M\{f(s,\omega)\mid f(t,\omega)\}= \tag{6.2}$$

$$=\int_{R^n}xp(t,f(t,\omega);\ s,x)\,dx\equiv a(s;\ t,f(t,\omega))$$

Функция $a(s; t, y)$ удовлетворяет (см. [3], стр. 105) уравнению (Tr — след матрицы)

$$a(s;\, t,\, y) = y + \int_t^s l'(\tau,\, y) \frac{\partial a}{\partial y}(s;\, \tau,\, y)\, d\tau + \tag{6.3}$$
$$+ \frac{1}{2}\operatorname{Tr} \int_t^s m(\tau,\, y)\, m'(\tau,\, y) \frac{\partial^2 a}{\partial y^2}(s;\, \tau,\, y)\, d\tau$$

Введем функцию

$$N(t,\, y) \equiv \Psi_0(t) \int_t^T \Psi_0^{-1}(s)\, G(s)\, a(s;\, t,\, y)\, ds$$

для которой, согласно (6.2) и (5.7), имеем

$$N(t,\, f(t,\, \omega)) = h(t,\, \omega) \tag{6.4}$$

Используя (6.3), можно показать, что эта функция удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial N}{\partial t} + (A' - G\Gamma)\, N + l'(t,\, y)\, \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{1}{2}\operatorname{Tr} m(t, y)\, m'(t, y)\, \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} = 0, \quad N(T, y) = 0$$

Учитывая, что решение x° в рассматриваемом примере согласовано с потоком $\{E_t\}$, получим из (5.1), (6.4) следующее удобное представление для оптимального управления

$$u^\circ(t,\, \omega) = -D^{-1}(t)\, B'(t)\, [G(t)\, x^\circ(t,\, \omega) + N(t,\, f(t,\, \omega))]$$

Отметим, что этот результат был известен ранее (см. [2], стр. 135).

Другое представление для оптимального управления можно получить из (5.10), если учесть, что в данном случае

$$\gamma(t,\, \omega) = G(t)\, \Phi_0(t) \left\{\xi_0 + \int_0^t \Phi_0^{-1}(s)\, f(s,\, \omega)\, ds\right\} + N(t,\, f(t,\, \omega))$$

Автор благодарит В. И. Плотникова за обсуждение работы.

Поступила 17 IV 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Статистика случайных процессов. М., «Наука», 1975.
2. *Параев Ю. И.* Введение в статистическую динамику процессов управления и фильтрации. М., «Сов. радио», 1976.
3. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения. Киев, «Наукова думка», 1968.
4. *Морозов С. Ф., Плотников В. И.* О необходимых и достаточных условиях непрерывности и полунепрерывности функционалов вариационного исчисления. Матем. сб., 1962, т. 57 (99), № 3.
5. *Морозов С. Ф., Смирнов И. П.* Об одной задаче оптимального управления стохастическим процессом. Дифференциальные уравнения, 1979, т. 15, № 5.
6. *Морозов С. Ф., Смирнов И. П.* Принципы минимума в задачах оптимального управления случайными процессами. ПММ, 1978, т. 42, вып. 2.
7. *Ершов М. П.* О представлении процессов Ито. Теория вероятностей и ее применения, 1972, т. 17, вып. 1.