Прикладная математика и механика. Том 43, 1979

УДК 531.36 + 62—50

СТАБИЛИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ВОЗМУЩЕНИЯМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ СОСТОЯНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ

Л. Б. Ряшко

(Свердловск)

Вопрос о стабилизируемости в среднем квадратическом линейной системы с несколькими шумами, действующими как в объекте, так и в канале управления, сводится к исследованию более простой системы с меньшим числом шумов. Получены необходимые и достаточные условия стабилизируемости и указана процедура отыскания стабилизирующего управления. Показано, как шумы различной структуры влияют на стабилизируемость системы и как в зависимости от этой структуры можно упростить сам порядок ее исследования.

1. Постановка задачи. Поведение систем, случайные возмущения в которых зависят от их состояния и управляющего воздействия, часто описывают стохастическими дифференциальными уравнениями

$$x^{\cdot} = Ax + Bu + \sum_{r=1}^{k} \sigma_r x \xi_r^{\cdot} + \sum_{r=1}^{l} \psi_r u \eta_r^{\cdot} \tag{1.1}$$

Здесь x — n-мерный вектор фазовых координат, u — m-мерное управление, A и σ_r — постоянные $n \times n$-матрицы, $\xi_r^{\cdot}(t)$ $(r = 1, 2, \ldots, k)$ — шумы в объекте, $\eta_r^{\cdot}(t)$ $(r = 1, 2, \ldots, l)$ — шумы в канале управления, при этом все $\xi_r(t)$ и $\eta_r(t)$ — независимые в совокупности стандартные винеровские процессы.

Вопросы устойчивости и стабилизации подобных систем рассматривались во многих работах (см., например, [1-12]).

В данной работе характер зависимости случайных возмущений от состояния и управления выбирается иным по сравнению с (1.1), т. е. рассматривается система $S_{k,l}$

$$S_{k,l}: x^{\cdot} = Ax + Bu + \sum_{r=1}^{k} \varphi_r \sqrt{x^* Q_r x}\, \xi_r^{\cdot} + \sum_{r=1}^{l} \vartheta_r \sqrt{u^* P_r u}\, \eta_r^{\cdot} \tag{1.2}$$

Здесь x, u, A, B, ξ_r и η_r — такие же, как в (1.1), φ_r и ϑ_r — постоянные n-векторы, Q_r и P_r — постоянные симметрические неотрицательно-определенные ($Q_r \geqslant 0$, $P_r \geqslant 0$) матрицы размерностей соответственно $n \times n$ и $m \times m$.

Если в (1.1) возмущение зависит от того, в какой точке фазового пространства находится система, то в (1.2) оно зависит скорее лишь от того, насколько удалена эта точка от начала координат, т. е. зависимость возмущений от состояния системы в (1.2) менее тонкая, нежели в (1.1). Оказывается, что исследование системы (1.2) во многих отношениях проще. Шумы системы (1.1) будем называть шумами первого типа, а шумы системы (1.2)— второго типа.

Необходимые и достаточные условия устойчивости в среднем квадратическом для обеих систем могут быть получены общими методами, связанными либо с исследованием соответствующих систем для вторых моментов, либо с уравнением Ляпунова. Стабилизируемость же эквивалентна резрешимости уравнения Беллмана для соответствующей стохастической задачи оптимизации. Эти общие методы нельзя признать достаточно эффективными.

Для весьма узкого, но важного класса систем с шумами первого типа были получены [3, 4, 9, 11, 12] более эффективные критерии устойчивости и стабилизируемости, сводящие задачу к исследованию некоторых свойств соответствующих детерминированных систем. Однако в более общих случаях такое сведение невозможно. В работе [10] исследование стабилизируемости системы с шумами первого типа, действующими как в объекте, так и в канале скалярного управления, удалось свести к решению некоторой задачи оптимизации для системы хотя и с шумами в объекте, но уже без шумов в канале управления. Ниже такой подход получает систематическое развитие.

2. Процедура последовательной стабилизации. В связи с системой $S_{k,l}$ рассмотрим $k+l+1$ систем

$$S_{0,0},\ S_{1,0},\ \ldots,\ S_{k,0},\ S_{k,1},\ \ldots,\ S_{k,l} \tag{2.1}$$

Каждая система в (2.1) получается отбрасыванием некоторого количества шумов в системе $S_{k,l}$.

Введем следующие множества стабилизирующих управлений:

$$U_{s,r} \overset{\Delta}{=} \{u = -Kx \mid u \text{ стабилизирует систему } S_{s,r}\}$$

Ясно, что $U_{s+1,r} \subset U_{s,r}$, $U_{s,r+1} \subset U_{s,r}$.

Сначала исследуем стабилизируемость систем $S_{s,0}$, $1 \leqslant s \leqslant k$, т. е. систем без шумов в канале управления.

Теорема 2.1. Пусть система $S_{s-1,0}$ стабилизируема ($U_{s-1,0} \neq \varnothing$). Тогда для стабилизируемости системы $S_{s,0}$ ($U_{s,0} \neq \varnothing$) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\inf\nolimits_{u \in U_{s-1,0}} I_s(u) < 1, \quad I_s(u) \overset{\Delta}{=} M \int_0^\infty x^* Q_s x\, dt \tag{2.2}$$

где $x(t)$ — решение системы $S_{s-1,0}$ при $x(0) = \varphi_s$. При этом стабилизировать систему $S_{s,0}$ будут те и только те управления $u \in U_{s-1,0}$, для которых $I_s(u) < 1$.

Доказательство. Необходимость. Пусть система $S_{s,0}$ с управлением $u = -Kx$ устойчива ($u \in U_{s,0}$). Тогда для всякой положительно-определенной матрицы G ($G > 0$) найдется матрица $M > 0$, удовлетворяющая уравнению Ляпунова

$$\Lambda_u(M) + \varphi_s^* M \varphi_s Q_s = -G \tag{2.3}$$

$$\Lambda_u(M) \overset{\Delta}{=} (A - BK)^* M + M(A - BK) + \sum_{r=1}^{s-1} \varphi_r^* M \varphi_r Q_r$$

Поскольку $u \in U_{s-1,0}$, то можно доказать существование обратного отрицательного оператора Λ_u^{-1}. Применив его к обеим частям уравнения (2.3), получим

$$(2.4) \qquad M + \varphi_s^* M \varphi_s \Lambda_u^{-1}(Q_s) = T_u(M) = -\Lambda_u^{-1}(G) > 0$$

$$\mathrm{T}_u(M) \overset{\Delta}{=} M - \Pi_u(M)$$

$$\Pi_u(M) \overset{\Delta}{=} -\varphi_s^* M \varphi_s \Lambda_u^{-1}(Q_s)$$

Оператор Π_u положительный и, согласно (2.4), удовлетворяет неравенству $\Pi_u(M) < M$.

Следовательно, по теореме 5.6 из [13] его единственное собственное значение $\lambda = \varphi_s^* \Lambda_u^{-1}(Q_s)\varphi_s$ удовлетворяет неравенству $\lambda < 1$ и по формуле Ито $I_s(u) < 1$.

Достаточность. Пусть для некоторого управления $u \in U_{s-1,0}$ выполняется неравенство $I_s(u) < 1$. Это означает, что единственное собственное значение $\lambda = I_s(u)$ оператора Π_u лежит внутри единичного круга. Отсюда следует, что оператор T_u имеет обратный, причем $\mathrm{T}_u^{-1}(C) = \Pi_u^{\circ}(C) + \Pi_u^1(C) + \ldots$, т. е. оператор T_u^{-1} — положительный. Это означает, что для $G > 0$ матрица $M \overset{\Delta}{=} \mathrm{T}_u^{-1}[-\Lambda_u^{-1}(G)] > 0$ удовлетворяет уравнению

$$M - \Pi_u(M) = -\Lambda_u^{-1}(G)$$

Отсюда в силу эквивалентности уравнений (2.3) и (2.4) следует, что уравнению (2.3) удовлетворяет матрица $M > 0$, т. е. система $S_{s,0}$ с управлением u устойчива. Следовательно, всякое управление $u \in U_{s-1,0}$, при котором $I_s(u) < 1$, будет стабилизировать систему $S_{s,0}$.

Итак, для исследования стабилизируемости системы $S_{k,0}$ возникает последовательная процедура, на шаге s которой ($s = 1, 2, \ldots, k$) решается задача оптимизации и проверяется неравенство (2.2). Если это неравенство выполняется, то система $S_{s,0}$ стабилизируема и нужно переходить к следующему шагу, т. е. выяснять стабилизируемость системы $S_{s+1,0}$, если же нет, то система $S_{s,0}$ не стабилизируема, а значит, не стабилизируема и система $S_{k,0}$.

Перейдем к исследованию стабилизируемости систем $S_{k,s}$ при $1 \leqslant s \leqslant l$, т. е. систем с шумами и в канале управления.

Теорема 2.2. Пусть система $S_{k,s-1}$ стабилизируема ($U_{k,s-1} \neq \varnothing$). Тогда для стабилизируемости системы $S_{k,s}$ ($U_{k,s} \neq \varnothing$) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\inf_{u \in U_{k,\, s-1}} J_s(u) < 1, \quad J_s(u) \overset{\Delta}{=} M \int_0^\infty u^* P_s u \, dt$$

где $x(t)$ — решение системы $S_{k,s-1}$ при $x(0) = \vartheta_s$. При этом стабилизировать систему $S_{k,s}$ будут те и только те управления $u \in U_{k,s-1}$, для которых $J_s(u) < 1$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.1.

Процедура последовательного исследования стабилизируемости, построенная на основе теоремы 2.1, очевидным образом, благодаря теореме 2.2, продолжается на системы с шумами и в канале управления. Реализация всей процедуры сводится к последовательному решению $k+l$ оптимальных задач. Сначала эти задачи решаются для систем $S_{s-1,0}$ с критериями $I_s(u)$ $(s = 1, 2, \ldots, k)$, а затем для систем $S_{k,s-1}$ с критериями $J_s(u)$ $(s = 1, 2, \ldots, l)$.

Такие задачи представляют и самостоятельный интерес. В детерминированном случае они уже рассматривались (см., например, [14]).

Замечание. Последовательность добавления шумов может быть произвольной. Тогда на каждом шаге процедуры нужно решать задачу оптимизации, выбирая функционал $I(u)$ или $J(u)$ в зависимости от того, является ли добавляемый шум шумом в объекте или в канале управления.

3. Решение вырожденных задач оптимизации и критерий стабилизируемости в предельной форме. Рассмотрим стохастические системы $S_{p+1,q}$, $S_{p,q+1}$.

Согласно замечанию из п. 2, выяснение стабилизируемости систем $S_{p+1,q}$ и $S_{p,q+1}$ связано с решением задач оптимизации

$$(3.1)\qquad I(u) \to \inf_{u\in U},\quad I(u) \overset{\Delta}{=} M\int_0^\infty x^* Q_{p+1} x\, dt$$

$$(3.2)\qquad J(u) \to \inf_{u\in U},\quad J(u) \overset{\Delta}{=} M\int_0^\infty u^* P_{q+1} u\, dt$$

$U \overset{\Delta}{=} \{u = -Kx \mid u$ — стабилизирует систему $S_{p,q}\}$. Здесь $x(t)$ — решение системы $S_{p,q}$.

Задачи (3.1) и (3.2) с вырожденными квадратичными критериями являются предельными случаями соответствующих невырожденных задач оптимальной стабилизации.

Начнем с задачи (3.1). Справедливо соотношение

$$(3.3)\qquad \inf_{u\in U} I(u) = \lim_{\varepsilon\searrow 0} \min_u I_\varepsilon(u)$$

$$I_\varepsilon(u) \overset{\Delta}{=} M\int_0^\infty [x^*(Q_{p+1}+\varepsilon G)x + \varepsilon u^* R u]\, dt,\quad G>0,\ R>0,\ \varepsilon>0$$

Если система $S_{p,q}$ стабилизируема, то

$$(3.4)\qquad \min_u I_\varepsilon(u) = I_\varepsilon(u_\varepsilon) = x^*(0) M_\varepsilon x(0)$$

$$(3.5)\qquad u_\varepsilon(x) = -[\varepsilon R + H(M_\varepsilon)]^{-1} B^* M_\varepsilon x$$

$$H(M) \overset{\Delta}{=} \sum_{r=1}^{q} \vartheta_r^* M \vartheta_r P_r,\quad F(M) \overset{\Delta}{=} \sum_{r=1}^{p} \varphi_r^* M \varphi_r Q_r$$

$M_\varepsilon > 0$ — единственное решение уравнения

$$(3.6)\qquad A^*M + MA + F(M) - MB[\varepsilon R + H(M)]^{-1} B^* M = -Q_{p+1} - \varepsilon G$$

Можно показать, что M_ε монотонно убывает при $\varepsilon \searrow 0$. Поэтому существует предел $M_0 = \lim_{\varepsilon\searrow 0} M_\varepsilon$. Тогда из (3.3) и (3.4) получаем, что

$$\inf_{u\in U} I(u) = x^*(0) M_0 x(0)$$

Теорема 3.1. Пусть система $S_{p,q}$ стабилизируема ($U \neq \varnothing$). Тогда для стабилизируемости системы $S_{p+1,q}$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $\varphi_{p+1}{}^* M_0 \varphi_{p+1} < 1$. При этом управление u_ε, найденное из (3.5), будет стабилизировать систему $S_{p+1,q}$, как только $\varphi_{p+1}{}^* M_\varepsilon \varphi_{p+1} < 1$.

Аналогично решается задача (3.2). Для формулировки соответствующей теоремы введем управление

$$u_\delta(x) = -[P_{q+1} + \delta R + H(D_\delta)]^{-1} B^* D_\delta x \tag{3.7}$$

где $D_\delta > 0$ — решение уравнения

$$A^*D + DA + F(D) - DB[P_{q+1} + \delta R + H(D)]^{-1} B^* D = -\delta G \tag{3.8}$$

$$(G > 0,\ R > 0,\ \delta > 0)$$

Положим $D_0 = \lim_{\delta \searrow 0} D_\delta$.

Теорема 3.2. Пусть система $S_{p,q}$ стабилизируема ($U \neq \varnothing$). Тогда для стабилизируемости системы $S_{p,q+1}$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $\vartheta_{q+1}{}^* D_0 \vartheta_{q+1} < 1$. При этом управление u_δ, найденное из (3.7), будет стабилизировать систему $S_{p,q+1}$, как только $\vartheta_{q+1}{}^* D_\delta \vartheta_{q+1} < 1$.

Укажем два возможных метода решения уравнений (3.6), (3.8). Эти методы весьма эффективны в вычислительном отношении. Первый метод основан на том, что решения алгебраических уравнений (3.6), (3.8) могут быть получены как стационарные решения соответствующих дифференциальных уравнений (см., например, [15, 16]). Второй метод, предложенный в [10, 17], интересен тем, что задача оптимальной стабилизации стохастической системы сводится к последовательному решению задач оптимальной стабилизации для соответствующей детерминированной системы.

Отметим, что, используя идеи п. 2 и 3, можно получать достаточные условия стабилизируемости систем с шумами первого типа.

4. Системы, в которых каждый шум действует лишь на одно уравнение. Пусть в системе (1.2) шумы таковы, что каждый действует лишь на одно уравнение. Это означает, что у векторов φ_r и ϑ_r лишь одна координата отлична от нуля. Будем считать, что эта координата равна единице. Тогда все шумы разбиваются на n классов, при этом i-й класс составляют шумы, действующие на i-е уравнение. Соответствующим образом разбивается на классы и все множество индексов как шумов в объекте, так и шумов в канале управления.

Положим

$$V_i = \{r \mid \varphi_r = e_i,\ 1 \leqslant r \leqslant k\},\quad W_i = \{r \mid \vartheta_r = e_i,\ 1 \leqslant r \leqslant l\}$$

где e_i — n-мерный вектор, у которого i-я координата равна единице, а остальные — нули.

Рассмотрим теперь $n + 1$ систем

$$S_0 : x^{\cdot} = Ax + Bu, \quad s = 0 \tag{4.1}$$

$$S_s\colon x^{\cdot} = Ax + Bu + \sum_{i=1}^{s} e_i \Big[\sum_{r \in V_i} \sqrt{x^* Q_r x}\, \xi_r^{\cdot} + \sum_{r \in W_i} \sqrt{u^* P_r u}\, \eta_r^{\cdot} \Big]$$

$$1 \leqslant s \leqslant n$$

Введем множество стабилизирующих управлений $U_s = \{u = -Kx \mid u$ стабилизирует систему $S_s\}$.

Теорема 4.1. Пусть система S_{s-1} стабилизируема ($U_{s-1} \neq \varnothing$). Для стабилизируемости системы S_s ($U_s \neq \varnothing$) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\inf_{u \in U_{s-1}} M \int_0^\infty [x^* G_s x + u^* R_s u]\, dt < 1$$

$$G_s = \sum_{r \in V_s} Q_r, \quad R_s = \sum_{r \in W_s} P_r$$

где $x(t)$ — решение системы S_{s-1} при $x(0) = e_s$. При этом стабилизировать систему S_s будут те и только те управления $u \in U_{s-1}$, для которых

$$M \int_0^\infty [x^* G_s x + u^* R_s u]\, dt < 1$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.1.

Теперь стабилизируемость системы (1.2) (S_n) может быть выяснена не за $k + l$, как в общем случае, а за n шагов, поскольку на каждом шаге исследуется влияние на стабилизируемость сразу всех шумов, действующих на одно уравнение. Кроме того, если $G_s > 0$ и $R_s > 0$, то на s-м шаге это исследование связано с решением традиционной задачи оптимальной стабилизации с невырожденным критерием.

5. Стабилизируемость систем с произвольными шумами в объекте. Конструктивно-алгоритмический характер метода, изложенного в п. 2 и 3, позволяет выяснить стабилизируемость системы лишь при конкретных параметрах. Однако общий подход, на котором основан этот метод, дает возможность получать и качественные результаты.

Теорема 5.1. Пусть система $S_{0,0}$ стабилизируема и Y — линейное подпространство фазового пространства X. Следующие утверждения эквивалентны.

1°. Система $S_{k,0}$ стабилизируема при любых шумах, действующих на Y (т. е. $\varphi_r \in Y$, Q_r — любые).

2°. Для $x(t)$ — решения системы $S_{0,0}$ с начальным условием $x(0) \in Y$ справедливо равенство

$$\inf_{u \in U_{0,0}} \int_0^\infty x^*(t)\, x(t)\, dt = 0$$

3°. $Y \subset \operatorname{Range} B$ ($\operatorname{Range} B$ — область значений матрицы B).

Доказательство. Эквивалентность первых двух утверждений можно получить по аналогии с доказательством теоремы 2.1. При доказательстве эквивалентности утверждений 2° и 3° будем исходить из соотношения

$$\inf_{u \in U_{0,0}} \int_0^\infty x^*(t)\, x(t)\, dt = x^*(0)\, M_0 x(0) \tag{5.1}$$

где $M_0 = \lim_{\varepsilon \searrow 0} M_\varepsilon$, M_ε — единственное решение уравнения (E — единичная матрица).

(5.2) $A^*M + MA - \varepsilon^{-2}MBB^*M = -E$

Из соотношения (5.1) получаем, что всякое пространство начальных значений Y, для которого справедливо утверждение 2°, принадлежит Y_0 — пространству всех решений уравнения $y^*M_0y = 0$, которое в силу симметричности матрицы M_0 эквивалентно уравнению

(5.3) $M_0y = 0$

Докажем, что $Y_0 = \text{Range } B$.

Умножив обе части соотношения (5.2) слева на y^* и справа на y, получаем

$$y^*A^*My + y^*MAy - \varepsilon^{-2}y^*MBB^*My = -y^*y$$

Отсюда и из (5.3) следует, что при некотором $\varepsilon > 0$ для всякого ненулевого $y \in Y_0$ выполняется неравенство

(5.4) $y^*M_\varepsilon BB^*M_\varepsilon y > 0$

Положим $Z \overset{\Delta}{=} M_\varepsilon Y_0$. Тогда из (5.4) получаем, что для всякого ненулевого $z \in Z$ выполняется неравенство $zBB^*z > 0$, следовательно, $r(B) \geqslant \dim Z$. Поскольку $M_\varepsilon > 0$, то $|M_\varepsilon| \neq 0$ и, следовательно, $\dim Z = \dim Y_0$. Таким образом, получаем, что

(5.5) $r(B) \geqslant \dim Y_0$

Далее, умножив обе части соотношения (5.2) на ε^2 и устремив $\varepsilon \searrow 0$, получаем $M_0BB^*M_0 = 0$, откуда следует равенство $M_0B = 0$, которое означает, что столбцы матрицы B — решения уравнения (5.3), т. е. $\text{Range } B \subset Y_0$. Сопоставляя это соотношение с неравенством (5.5), получаем, что $Y_0 = \text{Range } B$, откуда сразу следует эквивалентность утверждений 2° и 3°.

Следствие. Для стабилизируемости системы $S_{k,0}$ с любыми шумами (т. е. при любых φ_r и Q_r) необходимо и достаточно, чтобы матрица B имела размерность $n \times n$ и была невырожденной.

В работе [10] приведен неверный достаточный критерий стабилизируемости систем с произвольными шумами первого типа в объекте (теорема 3). Как видно из следствия, а оно справедливо и для шумов первого типа, полной управляемости для такой стабилизируемости недостаточно. Указание на эту ошибку было опубликовано в [15]. Отметим, что упомянутый неверный критерий из [10] не связан с основным ее содержанием, и изложение всего остального материала в [10] не опирается на этот критерий.

6. Пример. Рассмотрим систему

(6.1)
$$x_1^{\cdot} = x_2 + \alpha\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,\xi_1^{\cdot}, \quad \alpha > 0$$
$$x_2^{\cdot} = u + \sqrt{g_1^2x_1^2 + g_2^2x_2^2}\,\xi_2^{\cdot} + \beta\,|u|\,\eta^{\cdot}, \quad g_1 > 0, \quad g_2 > 0, \quad \beta > 0$$

Соответствующая детерминированная система

(6.2) $x_1^{\cdot} = x_2, \quad x_2^{\cdot} = u$

стабилизируема.

Сначала исследуем стабилизируемость системы

(6.3) $x_1^{\cdot} = x_2, \quad x_2^{\cdot} = u + \sqrt{g_1^2x_1^2 + g_2^2x_2^2}\,\xi_2^{\cdot} + \beta\,|u|\,\eta^{\cdot}$

Для этого, согласно теореме 4.1, нужно для системы (6.2) при $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 1$ решить задачу оптимизации

$$\min_u \int_0^\infty [g_1^2x_1^2 + g_2^2x_2^2 + \beta^2u^2]\,dt.$$

Отметим, что соответствующее алгебраическое уравнение Риккати

$$A^*M + MA - \beta^{-2}Mbb^*M = -G,\quad G = \begin{Vmatrix} g_1^2 & 0 \\ 0 & g_2^2 \end{Vmatrix} \tag{6.4}$$

в данном случае легко разрешимо и матрица M имеет элементы

$$m_{11} = g_1\sqrt{2\beta g_1 + g_2^2},\quad m_{12} = \beta g_1,\quad m_{22} = \beta\sqrt{2\beta g_1 + g_2^2} \tag{6.5}$$

Тогда для системы (6.3) получаем условие стабилизируемости

$$m_{22} = \beta\sqrt{2\beta g_1 + g_2^2} < 1$$

Взяв теперь $\beta = 0.2$, $g_1 = g_2 = 0.1$, выясним стабилизируемость системы (6.1).

Для этого, согласно теореме 2.1, нужно для системы (6.3) при $x_1(0) = \alpha$, $x_2(0) = 0$ решить вырожденную задачу оптимизации

$$\inf_{u\in U} M\int_0^\infty [x_1^2 + x_2^2]\,dt$$

где $U \overset{\Delta}{=} \{u = -k_1x_1 - k_2x_2 \mid u$ стабилизирует систему $(6.3)\}$.

Эта задача, согласно п. 3, связана с решением уравнения

$$A^*M + MA + \varphi^*M\varphi G - Mbb^*M\,/\,(\varepsilon + \vartheta^*M\vartheta) = -E \tag{6.6}$$

$$\varphi^*M\varphi = m_{22},\quad \vartheta^*M\vartheta = 0.04m_{22},\quad E = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

Уравнение (6.6) можно решать разными способами. В рассматриваемом случае, благодаря формулам (6.5), легко осуществить итерационный процесс

$$\begin{gathered} A^*M^{(s)} + M^{(s)}A - M^{(s)}bb^*M^{(s)}\,/\,(\varepsilon + \vartheta^*M^{(s-1)}\vartheta) = \\ = -E - \varphi^*M^{(s-1)}\varphi G\quad M^{(0)} = 0 \end{gathered} \tag{6.7}$$

Соотношение (6.7) при $\varepsilon > 0$ определяет последовательность матриц $M_\varepsilon^{(s)} > 0$ ($s = 1, 2, \ldots$), которая сходится (см. [17]) к матрице $M_\varepsilon > 0$, удовлетворяющей уравнению (6.6).

Таким способом можно найти M_ε при любом $\varepsilon > 0$, а затем и M_0. В рассматриваемом случае элементы матрицы M_0 с точностью до $0.5\cdot10^{-5}$ таковы: $m_{11}^\circ = 1.04125$, $m_{12}^\circ = 0.04165$, $m_{22}^\circ = 0.04335$. Согласно теореме 3.1, получаем условие стабилизируемости системы (6.1) при $\beta = 0.2$, $g_1 = g_2 = 0.1$

$$\varkappa < 1\,/\,\sqrt{m_{11}^\circ} = 0.97999$$

Автор признателен Г. Н. Мильштейну за внимание к работе и обсуждения.

Поступила 12 IV 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н., Лидский Э. А.* Аналитическое конструирование регуляторов в системах со случайными свойствами. I—III. Автоматика и телемеханика, 1961, т. 22, № 9—11.
2. *Красовский Н. Н.* О стабилизации систем, в которых помеха зависит от величины управляющего воздействия. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1965, № 2.
3. *Невельсон М. В., Хасьминский Р. З.* Об устойчивости линейной системы при случайных возмущениях ее параметров. ПММ, 1966, т. 30, вып. 2.

4. *Невельсон М. Б.* Критерий существования оптимального управления для одного класса линейных стохастических систем. ПММ, 1969, т. 33, вып. 3.
5. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М., «Наука», 1969.
6. *Wonham W. M.* Random differential equations in control theory. In; Probabilistic methods in Appl. Math., vol. 2. New York — London, Acad. Press. 1970, p. 131—212. (Рус. перев.: Математика. Сб. перев., 1973, 17 : 4, 17 : 5.)
7. *Haussmann U. G.* Optimal stationary control with state and control dependent noise. SIAM J. Control, 1971, vol. 9, No. 2.
8. *Мильштейн Г. Н.* Линейные функции Ляпунова для уравнений с положительными решениями и среднеквадратичная устойчивость. Докл. АН СССР, 1972, т. 204, № 3.
9. *Левит М. В., Якубович В. А.* Алгебраический критерий стохастической устойчивости линейных систем с параметрическим воздействием типа «белый шум». ПММ, 1972, т. 36, вып. 1.
10. *Мильштейн Г. Н., Ряшко Л. Б.* Оптимальная стабилизация линейных стохастических систем. ПММ, 1976, т. 40, вып. 6.
11. *Willems J. L., Willems J. C.* Feedback stabilizability for stochastic systems with state and control dependent noise. Automat. J. IFAC, 1976, vol. 12, No. 3.
12. *Казаринов Ю. Ф.* О стабилизации линейной стохастической системы, испытывающей параметрическое воздействие типа «белый шум». ПММ, 1977, т. 41, вып. 2.
13. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутицкий Я. Б., Стеценко В. Я.* Приближенное решение операторных уравнений. М., «Наука», 1969.
14. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. М., «Мир», 1977.
15. *Kalman R. E.* Contributions to the theory of optimal control. Boll. Soc. Mat. Mexicana, 1960, vol. 5, No. 1.
16. *Репин Ю. М., Третьяков В. Е.* Решение задачи об аналитическом конструировании регуляторов на электронных моделирующих устройствах. Автоматика и телемеханика, 1963, т. 24, № 6.
17. *Kleinman D. L.* Numerical solution of the state dependent noise problem. IEEE Trans. Automat. Control, 1976, vol. AC-21, No. 3.
18. *Мильштейн Г. Н.* Устойчивость и стабилизация периодических движений автономных систем. ПММ, 1977, т. 41, вып. 4.