Прикладная математика и механика. Том 43, 1979

УДК 53.011 : 534

ОБ АВТОКОЛЕБАНИЯХ В ДВУМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ, БЛИЗКИХ К ГАМИЛЬТОНОВЫМ

А. Д. Морозов, Е. Л. Федоров

(Горький)

Для класса уравнений

$$x^{\cdot\cdot} + \alpha x + \beta x^3 = \varepsilon f(x, x^{\cdot}),\ \varepsilon \ll 1$$

где f — многочлен, предлагается эффективный алгоритм приведения порождающего уравнения Пуанкаре — Понтрягина, определяющего периодические решения при малых возмущениях двумерных гамильтоновых систем, к специальной (стандартной) форме.

В качестве приложения рассматривается задача об оценке числа предельных циклов и, в частности, устойчивых периодических решений — режимов автоколебаний. Полученные результаты иллюстрируются на конкретном примере.

1. Рассматривается класс уравнений

$$x^{\cdot\cdot} + \alpha x + \beta x^3 = \varepsilon f(x, x^{\cdot})$$

или в эквивалентной форме — систем

$$x^{\cdot} = y,\ y^{\cdot} = -\alpha x - \beta x^3 + \varepsilon f(x, y) \tag{1.1}$$

$$f(x, y) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=0}^{n} a_{ij} x^i y^j$$

Здесь α, β — отличные от нуля параметры, ε — малый параметр, a_{ij} — постоянные коэффициенты.

Для систем (1.1) предлагается алгоритм приведения порождающего уравнения Пуанкаре—Понтрягина к некоторой специальной форме. Известно [1], что порождающее уравнение представимо в виде интеграла от некоторого выражения, зависящего от возмущения и периодического решения исходной невозмущенной системы. Интегрирование осуществляется вдоль замкнутой траектории невозмущенной системы, не содержащей особых точек (состояний равновесия).

Ниже исходная интегральная форма порождающего уравнения выражается через элементарные функции и полные эллиптические интегралы первого и второго рода. Несмотря на различие в поведении решений невозмущенной системы при различных комбинациях знаков α и β, порождающее уравнение приводится во всех случаях к одной и той же форме. Эту форму порождающего уравнения назовем стандартной. В конкретных задачах стандартная форма непосредственно вычислялась, например, в [2].

Укажем все возможные фазовые портреты невозмущенной системы $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -\alpha x - \beta x^3$. В случаях а) $\alpha > 0$, $\beta > 0$, б) $\alpha > 0$, $\beta < 0$ имеем одну ячейку, заполненную замкнутыми траекториями, а в случае в) $\alpha < 0$, $\beta > 0$ — три, в границу которых входят две петли сепаратрисы («восьмерка»). Случай г) $\alpha < 0$, $\beta < 0$ не представляет интереса.

В случае а) замкнутым траекториям $y^2 / 2 + \alpha x^2 / 2 + \beta x^4 / 4 = h$ соответствуют значения $h \in (0, \infty)$, в случае б) $h \in (0, -\alpha^2 / 4\beta)$, в)—$h \in (-\alpha^2 / 4\beta, \infty)$, причем значения $h \in (-\alpha^2 / 4\beta, 0)$ отвечают замкнутым траекториям, лежащим внутри восьмерки, а значения $h \in (0, \infty)$ — вне восьмерки.

Пусть $\Phi^{*(1)}_{nm}(h)$ — выражение для стандартной формы в случае $\beta > 0$, $h > 0$, $\Phi^{*(2)}_{nm}(h)$ — в случае $\alpha > 0$, $\beta < 0$, $\Phi^{*(3)}_{nm}(h)$ — при $\alpha < 0$, $\beta > 0$, $-\alpha^2 / 4\beta \leqslant h < 0$.

Теорема. Стандартная форма порождающего уравнения системы (1.1) имеет вид

$$\Phi^{*(s)}_{nm}(k(h)) = \sum_j \Phi^{(s)}_{nj}(k(h)) \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned}\Phi^{(s)}_{nj}(k(h)) = A^{(s)}_{nj}(k^2)\{P^{(s)}_{[n/2]+j}(k^2)\mathrm{K}(k) + \\ + Q^{(s)}_{[n/2]+j}(k^2)\mathrm{E}(k) + B^{(s)}_{nj}(k^2)\},\quad s = 1, 2, 3\end{aligned} \tag{1.3}$$

Здесь суммирование производится по нечетным j от единицы до m; $A^{(s)}_{nj}$, $B^{(s)}_{nj}$ — алгебраические функции, $B^{(1)}_{nj} \equiv B^{(2)}_{nj} \equiv 0$, $B^{(3)}_{nj}$ зависит только от коэффициентов $a_{2l+1,j}$, $l = 0, 1, 2, \ldots, [(n-1)/2]$, $n \geqslant 1$; $\mathrm{K}(k)$, $\mathrm{E}(k)$ — полные эллиптические интегралы соответственно первого и второго рода, $k = k(h)$ — модуль эллиптических интегралов, $P^{(s)}_{[n/2]+j}(k^2)$, $Q^{(s)}_{[n/2]+j}(k^2)$ — полиномы степени $[n/2] + j$ относительно k^2, зависящие от коэффициентов $a_{2l,j}$, $l = 0, 1, 2, \ldots, [n/2]$, $n \geqslant 0$, $[x]$ — целая часть числа x.

Доказательство теоремы проведено в п. 2; предлагается также алгоритм построения полиномов $P^{(s)}_{[n/2]+j}$, $Q^{(s)}_{[n/2]+j}$, не требующий вычисления интегралов.

2. Преобразуем (1.1) к более удобному виду. В областях G, заполненных замкнутыми траекториями невозмущенной системы и отделенных от сепаратрис, перейдем от переменных x, y к переменным действие I — угол θ:

$$I = \frac{1}{2\pi}\oint y(x, h)\,dx, \quad \theta = \frac{\partial S(x, I)}{\partial I}$$

$$S(x, I) = \int_{x_0}^{x} y(x, h(I))\,dx$$

$$y(x, h) = [2(h - \alpha x^2/2 - \beta x^4/4)]^{1/2}$$

Здесь интегрирование производится по замкнутой траектории невозмущенной системы, x_0 — координата x точки этой траектории.

Запишем преобразование $(x, y) \to (I, \theta)$ в виде

$$x = X(I, \theta), \quad y = Y(I, \theta) \tag{2.1}$$

Здесь функции X и Y периодичны по θ с периодом 2π. В результате замены (2.1) система (1.1) преобразуется к виду

$$
\begin{aligned}
&I^{\cdot} = \varepsilon\Phi(I, \theta), \quad \Phi(I, \theta) = f(X, Y)X_\theta' \\
&\theta^{\cdot} = \omega(I) + \varepsilon Q(I, \theta), \quad \omega(I) = dh(I) / dI \\
&Q(I, \theta) = -f(X, Y)X_I'
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Здесь Φ и Q — аналитические в G и периодические по θ с периодом 2π функции, $\omega(I)$ — частота движения на замкнутых траекториях невозмущенной системы. Заметим, что в областях G $\omega(I) > 0$. Раскладывая функцию Φ в ряд Фурье

$$\Phi(I, \theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi_k(I) \exp(ik\theta)$$

делая в (2.2) замену

$$I = u - \frac{i\varepsilon}{\omega} \sum_{k\neq 0} \frac{1}{k} \Phi_k(u) \exp(ik\theta)$$

и пренебрегая членами порядка ε^2, приходим к системе

$$u^{\cdot} = \varepsilon\Phi_0(u), \quad \theta^{\cdot} = \omega(u) + 0(\varepsilon) \tag{2.3}$$

$$\Phi_0(u) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(u, \theta)\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(X, Y) X_\theta'\, d\theta$$

Таким образом, задача исследования исходной системы с точностью до членов порядка ε^2 сводится к задаче исследования одного дифференциального уравнения

$$u^{\cdot} = \varepsilon\Phi_0(u) \tag{2.4}$$

Уравнение

$$\Phi_0(u) \equiv \Phi(u(h)) = 0 \tag{2.5}$$

определяющее состояния равновесия (2.4), является порождающим уравнением. При достаточно малых $\varepsilon \neq 0$ число предельных циклов в G не превышает числа действительных корней уравнения (2.5).

Как следует из (2.3), для вычисления $\Phi_0(h)$ необходимо знать решение невозмущенной системы

$$x^{\cdot} = y \equiv \frac{\partial H}{\partial y}, \quad y^{\cdot} = -\alpha x - \beta x^3 \equiv -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad H \equiv \frac{y^2}{2} + \frac{\alpha x^2}{2} + \frac{\beta x^4}{4}$$

Из интеграла $H = h$ следует

$$t - t_0 = \sqrt{2}\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{[\beta(x_1^2 - x^2)(x^2 - x_2^2)]^{1/2}} \tag{2.6}$$

Здесь x_1^2 и x_2^2 — корни уравнения

$$h - \alpha x^2 / 2 - \beta x^4 / 4 = 0$$

Полагая $t_0 = 0$, $x_0 = x_1$ при $\beta > 0$ и $x_0 = 0$ при $\alpha > 0$, $\beta < 0$, из (2.6) находим

$$
\begin{aligned}
(2.7)\qquad & \beta > 0,\ h > 0,\quad t = (2 / \beta)^{1/2}(x_1^2 - x_2^2)^{-1/2}F(\varphi, k)\\
& k = x_1 (x_1^2 - x_2^2)^{-1/2},\quad \cos\varphi = x / x_1\\
& \alpha > 0,\ \beta < 0,\quad t = (-2 / \beta)^{1/2}x_2^{-1}F(\varphi, k)\\
& k = x_1 / x_2,\quad \sin\varphi = x / x_1\\
& \alpha < 0,\quad \beta > 0,\quad -\alpha^2 / 4\beta < h < 0,\quad t = (2 / \beta)^{1/2}x_1^{-1}F(\varphi, k)\\
& k = (x_1^2 - x_2^2)^{1/2}x_1^{-1},\quad (1 - k^2 \sin^2\varphi)^{1/2} = x / x_1
\end{aligned}
$$

Здесь $F(\varphi, k)$ — неполный эллиптический интеграл первого рода. Используя известные соотношения для функций Якоби, из (2.7) находим (здесь $\theta = \omega t$)

$$
\begin{aligned}
(2.8)\qquad & \beta > 0,\ h > 0,\ x(\theta) = x_1 \operatorname{cn}(2\mathrm{K}\theta / \pi)\\
& \omega = \pi (\beta / 2)^{1/2} (x_1^2 - x_2^2)^{1/2} / (2\mathrm{K}),\ x_1 = [2\alpha k^2 / (\beta (1-2k^2))]^{1/2}\\
& \alpha > 0,\ \beta < 0,\ x(\theta) = x_1 \operatorname{sn}(2\mathrm{K}\theta / \pi)\\
& \omega = \pi (-\beta / 2)^{1/2}x_2 / (2\mathrm{K}),\quad x_1 = [-2\alpha k^2 / (\beta (1 + k^2))]^{1/2}\\
& \alpha < 0,\ \beta > 0,\ h < 0,\ x(\theta) = x_1 \operatorname{dn}(\mathrm{K}\theta / \pi)\\
& \omega = \pi (\beta / 2)^{1/2}x_1 / \mathrm{K},\quad x_1 = [-2\alpha / (\beta (2 - k^2))]^{1/2}
\end{aligned}
$$

В соответствии с (2.8) будем различать три случая:

$$
\begin{aligned}
& \Phi_0(u) = \Phi(k(h)) = \Phi_{nm}^{*(s)}(k),\quad s = 1, 2, 3\\
& \beta > 0,\ h > 0,\ s = 1;\quad \alpha > 0,\ \beta < 0,\ s = 2\\
& \alpha < 0,\ \beta > 0,\quad h < 0,\ s = 3
\end{aligned}
$$

Докажем теорему, используя выражение (2.3) для Φ_0. Рассмотрим сначала случай четного n, $j = 1$.

Пусть $\beta > 0$, $h > 0$. Согласно (2.3), имеем

$$
(2.9)\qquad \Phi_{n1}^{(1)}(k) = \frac{x_1^2}{2\pi}\left(\frac{\alpha}{1 - 2k^2}\right)^{1/2} \sum_{i=0}^{n} a_{i1} x_1^i I_{i1}
$$

$$
I_{i1} = \int_0^{4\mathrm{K}} [(1 - k^2) \operatorname{cn}^i\varphi + (2k^2 - 1) \operatorname{cn}^{i+2}\varphi - k^2 \operatorname{cn}^{i+4}\varphi]\, d\varphi
$$

Из свойств эллиптических функций следует, что $I_{i1} = 0$ при нечетном i. Применяя $l + 1$ раз рекуррентную формулу [3]

$$
\int_0^{4\mathrm{K}} \operatorname{cn}^{m+4}\varphi\, d\varphi = \frac{(m + 1)(1 - k^2)}{(m + 3) k^2} \int_0^{4k} \operatorname{cn}^m\varphi\, d\varphi -
$$

$$
- \frac{(m + 2)(1 - 2k^2)}{(m + 3) k^2} \int_0^{4\mathrm{K}} \operatorname{cn}^{m+2}\varphi\, d\varphi
$$

придем к выражению

$$
(2.10)\qquad I_{2l,1} = \frac{4}{k^{2l+2}} [(k^2 P_{2l+2}^{(1,1)}(k) - (1 - k^2)\, Q_{2l+2}^{(1,1)}(k))\, \mathrm{K}(k) + Q_{2l+2}^{(1,1)}(k)\, \mathrm{E}(k)]
$$

Здесь $P_{2l+2}^{(1,1)}(k)$, $Q_{2l+2}^{(1,1)}(k)$ — полиномы степени $2l+2$, содержащие лишь четные степени k. Поэтому далее будем обозначать

$$\rho = k^2, \quad P_{l+1}^{(1,1)}(\rho) \equiv P_{2l+2}^{(1,1)}(k), \quad Q_{l+1}^{(1,1)}(\rho) \equiv Q_{2l+2}^{(1,1)}(k)$$

Поскольку $\mathrm{K}(k)$, $\mathrm{E}(k)$ при $0 \leqslant k < 1$ представимы в виде степенных рядов, содержащих лишь четные степени k, то $\mathrm{K} = \mathrm{K}(\rho)$, $\mathrm{E} = \mathrm{E}(\rho)$.

Вычисление $I_{2l,1}$ дает следующий алгоритм построения полиномов $P_{l+1}^{(1,1)}(\rho)$, $Q_{l+1}^{(1,1)}(\rho)$:

(2.11) $$P_{i+1}^{(1,1)} = \frac{2l-(2i-1)}{2l-(2i-3)}(1-\rho)\,Q_i^{(1,1)}$$

$$Q_{i+1}^{(1,1)} = \rho P_i^{(1,1)} - \frac{2l-(2i-2)}{2l-(2i-3)}(1-2\rho)\,Q_i^{(1,1)}, \quad i = 1, 2, \ldots, l$$

$$P_1^{(1,1)}(\rho) = 2(1-\rho)/(2l+3), \quad Q_1^{(1,1)}(\rho) = (2\rho-1)/(2l+3)$$

Из (2.10) находим

(2.12) $$I_{2l,1} = (4/\rho^{l+1})\,[P_{l+2}^{(1,2)}(\rho)\,\mathrm{K} + Q_{l+1}^{(1,2)}(\rho)\,\mathrm{E}]$$

$$P_{l+2}^{(1,2)}(\rho) = \rho P_{l+1}^{(1,1)}(\rho) - (1-\rho)\,Q_{l+1}^{(1,1)}(\rho), \quad Q_{l+1}^{(1,2)}(\rho) = Q_{l+1}^{(1,1)}(\rho)$$

Полиномы $P_{l+2}^{(1,2)}$, $Q_{l+1}^{(1,2)}$ обладают следующими свойствами.

1°. $p_0 + q_0 = 0$, где p_0, q_0 — свободные члены полиномов $P_{l+2}^{(1,2)}$ и $Q_{l+1}^{(1,2)}$ соответственно.

Это свойство вытекает из (2.12).

2°. $p_{l+2} = 0$, где p_{l+2} коэффициент при старшем члене в полиноме $P_{l+2}^{(1,2)}$.

Доказательство. Из (2.12) получаем $p_{l+2} = p_{l+1}^{(1)} + q_{l+1}^{(1)}$, где $p_{l+1}^{(1)}$, $q_{l+1}^{(1)}$ — коэффициенты при старших членах в полиномах $P_{l+1}^{(1,1)}$, $Q_{l+1}^{(1,1)}$ соответственно. Из (2.11) следует $p_1^{(1)} + q_1^{(1)} = 0$ $(l = 0)$. Далее проведем доказательство по индукции. Пусть условие $p_{l+2} = 0$ выполнено для $l = i - 1$, т. е. $p_i^{(1)} + q_i^{(1)} = 0$. Покажем, что тогда $p_{l+1}^{(1)} + q_{l+1}^{(1)} = 0$ $(i \leqslant n/2)$. Воспользовавшись (2.11), получаем

$$p_{i+1}^{(1)} + q_{i+1}^{(1)} = -q_i^{(1)}\frac{2l-(2i-1)}{2l-(2i-3)} + p_i^{(1)} + 2\,\frac{2l-(2i-2)}{2l-(2i-3)}\,q_i^{(1)} = 0$$

Свойство 2 доказано.

В силу свойства 2 ниже будем писать $P_{l+1}^{(1,2)}$ вместо $P_{l+2}^{(1,2)}$.

3°. $P_{l+1}^{(1,2)}(1) = 0$. Это свойство вытекает из (2.11), (2.12).

Из (2.12) и (2.9) находим

(2.13) $$\Phi_{n1}^{(1)}(\rho) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{2}{\beta}\right)^{(n+2)/2}\left(\frac{\alpha}{1-2\rho}\right)^{(n+3)/2} F_{n1}^{(1)}(\rho)$$

$$F_{nj}^{(s)}(\rho) = P_{n/2+j}^{(s)}(\rho)\,\mathrm{K}(\rho) + Q_{n/2+j}^{(s)}(\rho)\,\mathrm{E}(\rho)$$

$$\{P_{n/2+j}^{(s)}, Q_{n/2+j}^{(s)}\} = \sum_{l=0}^{n/2} a_{2l,j} Z_s^{n/2-l}\,\{U_{l+j}^{(s)}, V_{l+j}^{(s)}\}$$

$$U_{l+j}^{(1)} = P_{l+j}^{(1,2)}(\rho), \quad V_{l+j}^{(1)} = Q_{l+j}^{(1,2)}(\rho)$$

$$U_{l+j}^{(2)} = P_{l+j}^{(2,2)}(\rho), \quad V_{l+j}^{(2)} = Q_{l+j}^{(2,2)}(\rho)$$

$$U_{l+j}^{(3)} = P_{l+j}^{(3,1)}(\rho), \quad V_{l+j}^{(3)} = Q_{l+j}^{(3,1)}(\rho)$$

$$Z_1 = \beta(1-2\rho)/(2\alpha), \quad Z_2 = -\beta(1+\rho)/(2\alpha), \quad Z_3 = -\beta(2-\rho)/(2\alpha)$$

Во втором случае, когда $\alpha > 0$, $\beta < 0$, используя (2.8), аналогично находим

$$\Phi_{nl}^{(2)}(\rho) = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{2}{\beta}\right)^{(n+2)/2}\left(\frac{\alpha}{1+\rho}\right)^{(n+3)/2} F_{nl}^{(2)}(\rho) \tag{2.14}$$

$$P_{l+1}^{(2,2)}(\rho) = \rho P_{l+1}^{(2,1)}(\rho) + Q_{l+1}^{(2,1)}(\rho), \quad Q_{l+1}^{(2,2)}(\rho) = -Q_{l+1}^{(2,1)}(\rho)$$

Полиномы $P_l^{(2,1)}(\rho)$, $Q_{l+1}^{(2,1)}(\rho)$, $l = 0, 1, \ldots, n/2$ определяются с помощью рекуррентных формул

$$P_i^{(2,1)} = -\frac{2l-(2i-1)}{2l-(2i-3)} Q_i^{(2,1)}, \quad i = 1, 2, \ldots, l \tag{2.15}$$

$$Q_{i+1}^{(2,1)} = \rho P_{i-1}^{(2,1)}(\rho) + \frac{2l-(2i-2)}{2l-(2i-3)}(1+\rho) Q_i^{(2,1)}$$

$$P_0^{(2,1)}(\rho) = 2/(2l+3), \quad Q_1^{(2,1)}(\rho) = -(1+\rho)/(2l+3)$$

Из (2.15) следует, что полиномы $P_{l+1}^{(2,2)}$, $Q_{l+1}^{(2,2)}$ обладают свойствами 1 и 3. Тогда, согласно (2.13), этими свойствами обладают и полиномы $P_{n/2+1}^{(2)}$, $Q_{n/2+1}^{(2)}$.

В третьем случае, когда $\alpha < 0$, $\beta > 0$, $-\alpha^2/4\beta \leqslant h < 0$, находим

$$\Phi_{nl}^{(3)}(\rho) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2}{\beta}\right)^{(n+2)/2}\left(-\frac{\alpha}{2-\rho}\right)^{(n+3)/2} \times$$

$$\times \left[2F_{nl}^{(3)}(\rho) \pm \pi\sqrt{Z_3(\rho)}\, R_{n/2+1}(\rho)\right]$$

$$R_{n/2+1}(\rho) = \sum_{l=0}^{n/2-1} a_{2l+1,1} Z_3^{n/2-(l+1)}(\rho)\left(P_{l+1}(\rho) + \frac{2-\rho}{2} Q_{l+1}(\rho)\right)$$

Здесь знак плюс соответствует области, лежащей внутри правой петли сепаратрисы ($x > 0$), а знак минус — области внутри левой петли сепаратрисы ($x < 0$). Полиномы $P_{l+1}^{(3,1)}(\rho)$, $Q_{l+1}^{(3,1)}(\rho)$ определяются с помощью рекуррентных формул

$$P_{i+1}^{(3,1)} = \frac{2l-(2i-1)}{2l-(2i-3)}(\rho-1) Q_i^{(3,1)}, \quad i = 1, 2, \ldots, l$$

$$Q_{i+1}^{(3,1)} = P_i^{(3,1)} + \frac{2l-(2i-2)}{2l-(2i-3)}(2-\rho) Q_i^{(3,1)}$$

$$P_1^{(3,1)}(\rho) = 2(\rho-1)/(2l+3), \quad Q_1^{(3,1)}(\rho) = (2-\rho)/(2l+3)$$

и обладают свойствами 1 и 3.

Полиномы $P_{l+1}(\rho)$, $Q_{l+1}(\rho)$ в выражении для $R_{n/2+1}(\rho)$ определяются из рекуррентных соотношений

$$P_{i+1} = \frac{l-i+1}{l-i+2}(\rho-1) Q_i$$

$$Q_{i+1} = P_i + \frac{2(l-i)+3}{2(l-i)+4}(2-\rho) Q_i, \quad i = 1, 2, \ldots, l$$

$$P_1(\rho) = (\rho-1)/(l+2), \quad Q_1(\rho) = (2-\rho)/2(l+2)$$

Вывод выражений для стандартной формы при $j > 1$ принципиально не отличается от случая $j = 1$. Приведем окончательный результат.

В случае $\beta > 0$, $h > 0$ имеем

$$\Phi_{nj}^{(1)}(\rho) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{2}{\beta}\right)^{(n+j+1)/2}\left(\frac{\alpha}{1-2\rho}\right)^{(n+2j+1)/2} F_{nj}^{(1)}(\rho) \tag{2.16}$$

$$\{P_{l+j}^{(1,2)}(\rho), Q_{l+j}^{(1,2)}(\rho)\} = \sum_{r,k=0}^{(j+1)/2} f_{rk}\{P_b^{(1,1)}(\rho), Q_{b-1}^{(1,1)}(\rho)\} + \tag{2.17}$$
$$+\{L_{lj}+M_{lj}, N_{lj}+S_{lj}\}, \quad b = l+r+k, \ b \geqslant 2$$
$$f_{rk} = (-1)^r C_{(j+1)/2}^r C_{(j+1)/2}^k \rho^{(j+1)/2-r}(1-\rho)^{(j+1)/2-k}$$
$$L_{lj} = \delta_{l0}[(1+j-2j\rho)\rho^{(j-1)/2}(1-\rho)^{(j+1)/2}/2]$$
$$N_{lj} = \delta_{l0}[(1+j)(2\rho-1)\rho^{(j-1)/2}(1-\rho)^{(j-1)/2}/2]$$
$$M_{lj} = \delta_{l1}[-\rho^{(j+1)/2}(1-\rho)^{(j+3)/2}], \quad S_{lj} = \delta_{l1}[\rho^{(j+1)/2}(1-\rho)^{(j+1)/2}]$$
$$P_b^{(1,1)}(\rho) = \rho P_{b-1}^{(1,3)}(\rho) - (1-\rho) Q_{b-1}^{(1,3)}(\rho), \quad Q_{b-1}^{(1,1)}(\rho) \equiv Q_{b-1}^{(1,3)}(\rho)$$

Здесь δ_{li} — символ Кронекера. Выражения для $P_{b-1}^{(1,3)}(\rho)$, $Q_{b-1}^{(1,3)}(\rho)$ определяются с помощью рекуррентных формул

$$P_{i+1}^{(1,3)} = \frac{2b-(2i+3)}{2b-(2i+1)}(1-\rho)Q_i^{(1,3)}, \quad b > 2$$
$$Q_{i+1}^{(1,3)} = \rho P_i^{(1,3)} - \frac{2b-(2i+2)}{2b-(2i+1)}(1-2\rho)Q_i^{(1,3)}, \quad i = 1, 2, \ldots, b-2$$
$$P_1^{(1,3)}(\rho) = \frac{2b-3}{2b-1}(1-\rho), \quad Q_1^{(1,3)}(\rho) = \frac{2b-2}{2b-1}(2\rho-1)$$

Отсюда следует способ видоизменения полученных выше формул для $j = 1$ в случае $j > 1$. Так, при $\alpha > 0$, $\beta < 0$ имеем

$$\Phi_{nj}^{(2)}(\rho) = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{2}{\beta}\right)^{(n+j+1)/2}\left(\frac{\alpha}{1+\rho}\right)^{(n+2j+1)/2} F_{nj}^{(2)}(\rho) \tag{2.18}$$

При $\alpha < 0$, $\beta > 0$, $h < 0$ имеем

$$\Phi_{nj}^{(3)}(\rho) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2}{\beta}\right)^{(n+j+1)/2}\left(-\frac{\alpha}{2-\rho}\right)^{(n+2j+1)/2} \times \tag{2.19}$$
$$\times [2F_{nj}^{(3)} \pm \pi\sqrt{Z_3(\rho)}R_{n/2+j}(\rho)]$$

Обозначая $B_{nj}^{(3)}(\rho) \equiv \pm\pi\sqrt{Z_3(\rho)}R_{n/2+j}(\rho)$, получим из (2.16), (2.18) и (2.19) формулу (1.3). При j четном имеем $\Phi_{nj}^{(s)}(\rho) \equiv 0$, $s = 1, 2, 3$. Полиномы $P_{n/2+j}^{(s)}$, $Q_{n/2+j}^{(s)}$, $s = 1, 2, 3$ также обладают свойствами 1 и 3.

Случай нечетного n рассматривается аналогично. Для этого достаточно, сохранив обозначения $\Phi_{nj}^{(s)}$, $A_{nj}^{(s)}$, $B_{nj}^{(s)}$, $s = 1, 2, 3$, заменить в соответствующих выражениях n на $n - 1$, причем в $R_{(n-1)/2+j}$ суммирование производится по l от 0 до $(n-1)/2$.

Теорема доказана.

3. В соответствии с (2.16) и (2.18) задача получения оценки числа вещественных корней порождающего уравнения $\Phi_{nj}^{(s)}(\rho) = 0$, $s = 1, 2$ сводится к оценке числа N действительных корней уравнения

$$F_{nj}^{(s)}(\rho) = 0, \quad 0 \leqslant \rho < 1, \quad s = 1, 2 \tag{3.1}$$

В случае $s = 3$ задача сводится к оценке числа действительных корней уравнений

$$2F_{nj}^{(3)}(\rho) \pm \pi\sqrt{Z_3(\rho)}R_{n/2+j}(\rho) = 0 \tag{3.2}$$

В частности, при $a_{2l+1,j} = 0$, $l = 0, 1, 2, \ldots, n/2-1$ уравнение (3.2) принимает вид $F_{nj}^{(3)}(\rho) = 0$, а при $a_{2l,j} = 0$, $l = 0, 1, 2, \ldots, n/2$

сводится к алгебраическому $R_{n/2+j}(\rho) = 0$. В последнем случае $N \leqslant n/2 + j$.

Оценим число N_1 двойных корней уравнения $F_{nj}^{(s)}(\rho) = 0$, $0 < \rho < 1$, $s = 1, 2, 3$. Заметим, что функция $F_{nj}^{(s)}$ — аналитическая при $0 \leqslant \rho < 1$. Дифференцируя $F_{nj}^{(s)}(\rho)$, находим

$$d^m F_{nj}^{(s)}(\rho) / d\rho^m = P_c^{(s)} \mathrm{K} + Q_c^{(s)} \mathrm{E}, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{3.3}$$

$$P_c^{(s)} \equiv \frac{dP_{c+1}^{(s)}}{d\rho} - \frac{1}{2\rho}\left(P_{c+1}^{(s)} + Q_{c+1}^{(s)}\right)$$

$$Q_c^{(s)} \equiv \frac{dQ_{c+1}^{(s)}}{d\rho} + \frac{1}{2\rho}\left(\frac{1}{1-\rho} P_{c+1}^{(s)} + Q_{c+1}^{(s)}\right)$$

$$c = n/2 + j - m$$

Двойные корни уравнения $F_{nj}^{(s)}(\rho) = 0$, $s = 1, 2, 3$ удовлетворяют системе

$$F_{nj}^{(s)}(\rho) = 0, \quad F_{n,\,j-1}^{(s)}(\rho) = 0 \tag{3.4}$$

Умножая первое уравнение этой системы на $P_{n/2+j-1}^{(s)}$, а второе — на $P_{n/2+j}^{(s)}$ и вычитая из второго уравнения первое, придем к системе

$$F_{nj}^{(s)}(\rho) = 0, \quad P_{n/2+j}^{(s)}(\rho)\, Q_{n/2+j-1}^{(s)}(\rho) - P_{n/2+j-1}^{(s)}(\rho)\, Q_{n/2+j}^{(s)}(\rho) = 0 \tag{3.5}$$

Число вещественных ненулевых корней системы (3.4) не превышает числа вещественных ненулевых корней системы (3.5). В силу свойств 1,3 и соотношений (3.3) выражения для $P_{n/2+j-1}^{(s)}$, $Q_{n/2+j-1}^{(s)}$ являются полиномами степени $n/2 + j - 1$. Поэтому второе уравнение системы (3.5) — полином степени $n + 2j - 1$.

Из (2.13) и (2.17) следует

$$2p + q = 0, \quad p_0^{(s)} q_{01}^{(s)} - p_{01}^{(s)} q_0^{(s)} = 0 \tag{3.6}$$

Здесь p, q — коэффициенты при старших членах в полиномах $P_{n/2+j}^{(1)}$, $Q_{n/2+j}^{(1)}$ соответственно, $p_0^{(s)}$, $q_0^{(s)}$ — свободные члены полиномов $P_{n/2+j}^{(s)}$, $Q_{n/2+j}^{(s)}$, $p_{01}^{(s)}$, $q_{01}^{(s)}$ — свободные члены полиномов $P_{n/2+j-1}^{(s)}$, $Q_{n/2+j-1}^{(s)}$ соответственно, $s = 2, 3$. В силу (3.6) при $s = 1$ коэффициент при старшем члене второго уравнения (3.5) равен нулю, а при $s = 2, 3$ равен нулю свободный член. Таким образом, справедлива оценка $N_1 \leqslant n + 2\,(j - 1)$. Отсюда при $s = 1, 2$ получаем оценку $N \leqslant 2N_1 + 1$. В квазилинейном случае, когда $\beta = 0$, имеем $N \leqslant n/2 + j - 1$.

Заметим, что $d\Phi_{nj}^{(s)}(\rho_*) / d\rho = F_{n,\,j-1}^{(s)}(\rho_*)$, где ρ_* — корень порождающего уравнения. Если $\varepsilon F_{n,\,j-1}^{(s)}(\rho_*)\,(d\rho / dI) > 0$ (< 0), то состояние равновесия $u = u(\rho_*)$ уравнения (2.4) неустойчиво (устойчиво).

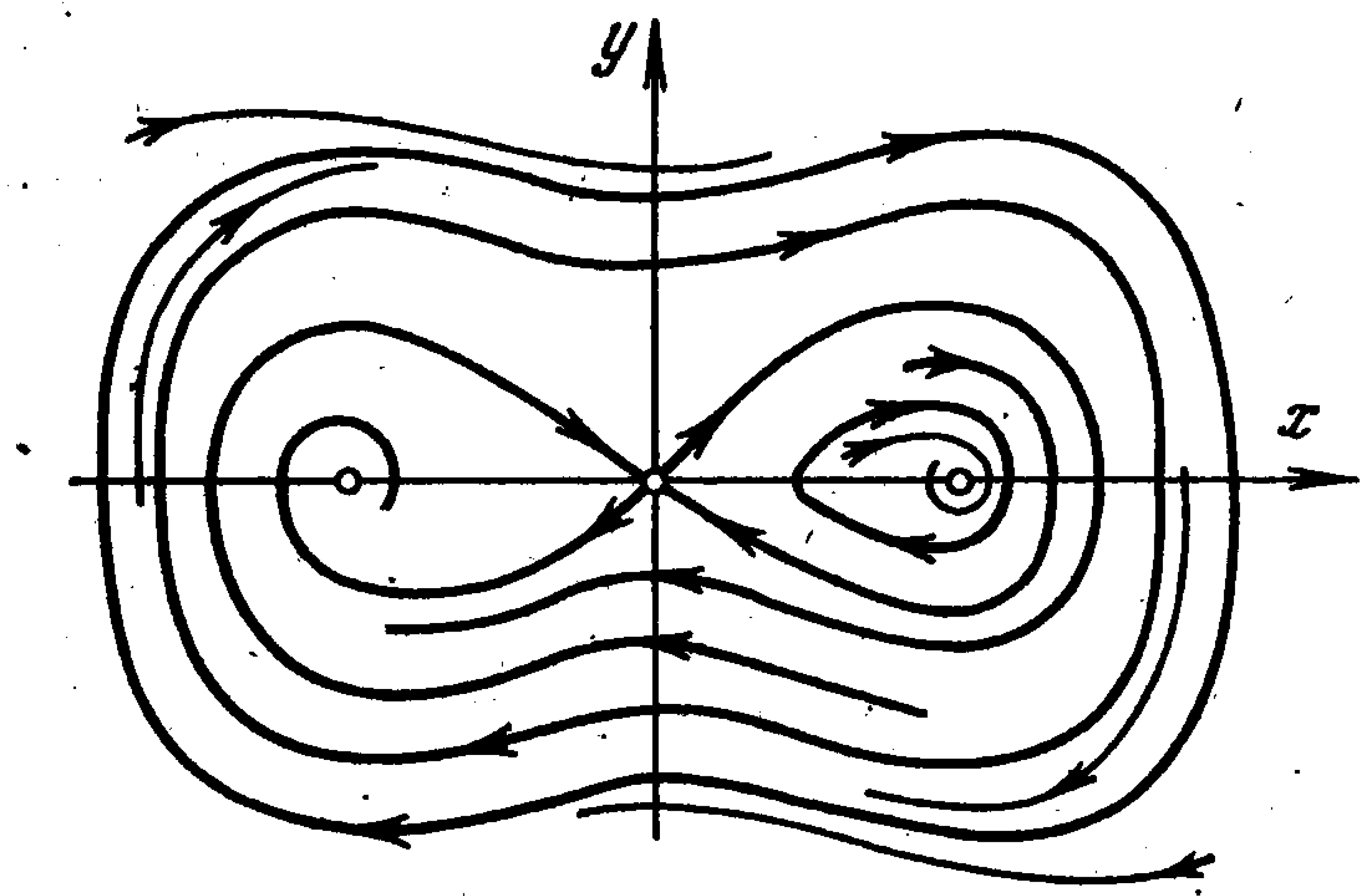
В качестве примера рассмотрим уравнение

$$x^{\cdot\cdot} + \alpha x + \beta x^3 = \varepsilon\,(a_{01} + a_{11} x + a_{21} x^2)\, x^{\cdot} \tag{3.7}$$

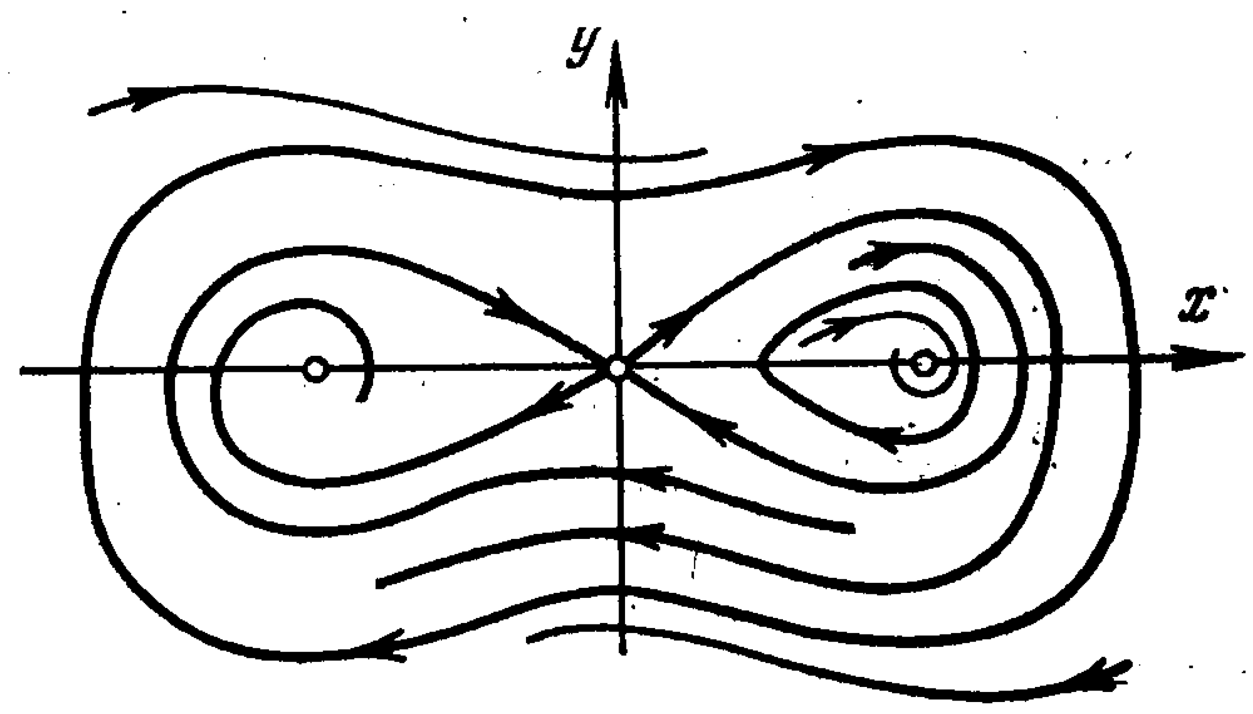
С помощью выражений для $\Phi_{21}^{(s)}$, $s = 1, 3$ и исследования поведения решений в окрестности сепаратрисы невозмущенной системы установим глобальную топологическую структуру поведения решений уравнения (3.7) при $\alpha < 0$, $\beta > 0$. Будем полагать $a_{11} \neq 0$, $a_{01} = 1$, $\alpha = -1$, $\beta = 1$. Случай $a_{11} = 0$ при $\alpha > 0$ рассматривался в [4], а при произвольных $\alpha \neq 0$ — в [5, 6]. Запишем (3.7) в виде

$$x^{\cdot} = P(x, y) = y, \quad y^{\cdot} = Q(x, y, \varepsilon) \tag{3.8}$$
$$Q = x - x^3 + \varepsilon(1 + a_{11}x + a_{21}x^2)y$$

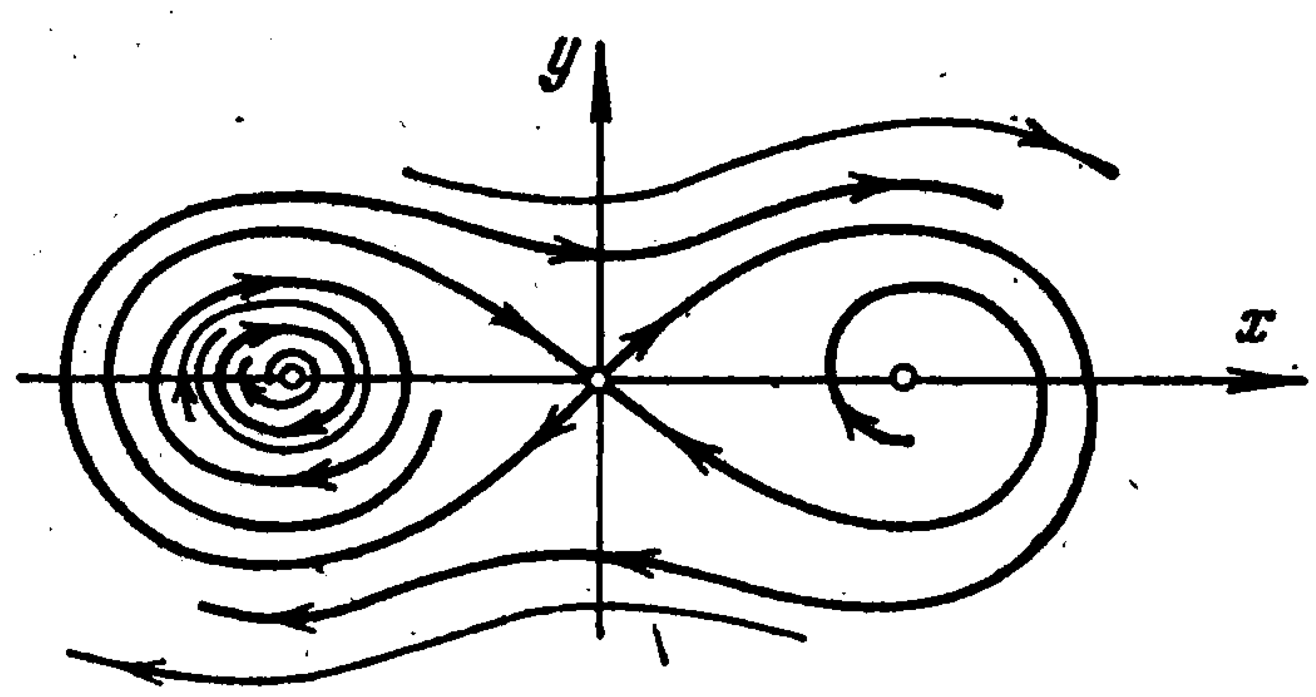
Исследуем поведение решений в малой окрестности невозмущенной сепаратрисы. Заметим, что седловая величина $\sigma_c \equiv P_x' + Q_y' |_{x=y=0} = \varepsilon \neq 0$ и, следовательно, из петли сепаратрисы при любом фиксированном $\varepsilon \neq 0$ может родиться не более одного



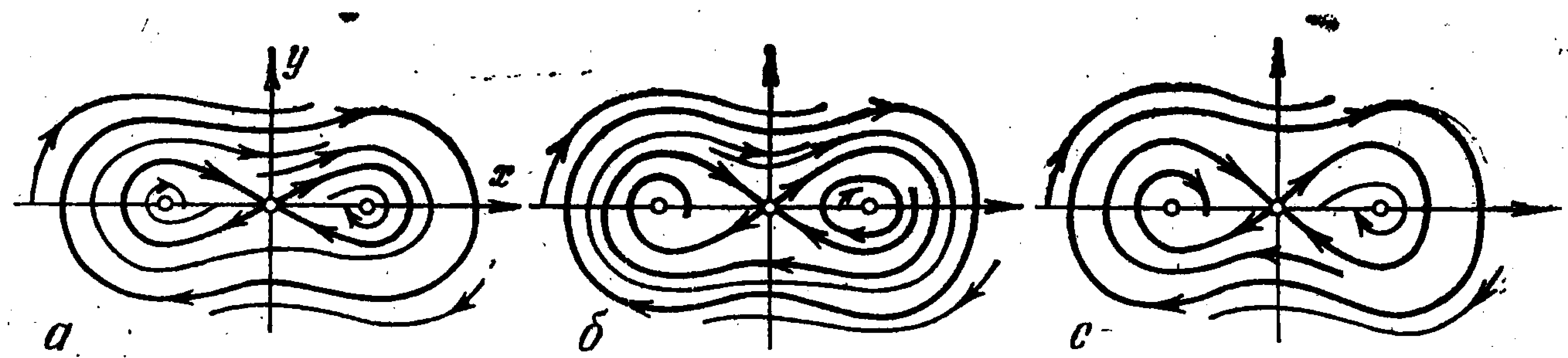
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

предельного цикла [7]. Для решения вопроса о взаимном расположении сепаратрис воспользуемся результатами работы [8]. Обозначим через $\varepsilon\Delta_1^+$ величину, характеризующую с точностью до членов порядка ε^2 расстояние между соответствующей устойчивой и неустойчивой сепаратрисами в области $x > 0$, а через $\varepsilon\Delta_1^-$ — в области $x < 0$. Согласно [8], имеем

$$\Delta_1^{\pm} = \int_{-\infty}^{\infty} [1 + a_{11}x_0(t) + a_{21}x_0^2(t)]\, y_0^2(t)\, dt$$

Здесь $x_0(t)$, $y_0(t)$ — решение невозмущенной системы на сепаратрисе.

Из (2.8) следует $x_0(t) = \pm\sqrt{2}\,(1 / \operatorname{ch} t)$, $y_0(t) = \mp(\operatorname{sh} t / \operatorname{ch}^2 t)$, $k_{\scriptscriptstyle\blacktriangle} = 1$. Отсюда следует

$$\Delta_1^{\pm} = 2\left[\frac{2}{3} \pm \frac{\pi}{8}\sqrt{2}\, a_{11} + \frac{8}{15}\, a_{21}\right]$$

Из уравнений $\Delta_1^{\pm} = 0$ определяем значения

$$a_{11}^{+} = -a_{11}^{-} = -16\,(5 + 4a_{21})\,/\,(15\pi\sqrt{2})$$

При $a_{11} = a_{11}^{+} + O(\varepsilon)$ решения системы (3.8) имеют правую петлю сепаратрисы, при $a_{11} = a_{11}^{-} + O(\varepsilon)$ — левую.

Исследование поведения решений в областях, лежащих внутри невозмущенной сепаратрисы (восьмерки), проводится с помощью стандартной формы $\Phi_{21}^{(3)}$, а вне восьмерки — с помощью $\Phi_{21}^{(1)}$.

Действительные корни уравнений $\Phi_{21}^{(s)}(\rho) = 0$, $s = 1,3$, определяющие значения h и соответствующие замкнутые кривые невозмущенной системы, от которых при малых $\varepsilon \neq 0$ появляются предельные циклы, зависят от параметров a_{11}, a_{21}. Поэтому можно построить разбиение плоскости a_{11}, a_{21} на области, соответствующие разному числу предельных циклов в возмущенной системе. Для уравнения (3.7) установлено, что максимальное число предельных циклов равно трем.

Бифуркационные границы, построенные, вообще говоря, с точностью до членов порядка ε, разбивают плоскость a_{11}, a_{21} на 32 области. На фиг. 1—3 приведены наиболее характерные грубые фазовые портреты системы (3.8). Часть негрубых топологических структур представлена на фиг. 4.

Если в симметричном случае, когда $a_{11} = 0$, имеем $\Phi_{21}(1) = \Phi_{21}^{(3)}(1)$ и порождающее уравнение фактически определяет предельные циклы вплоть до сепаратрисы (восьмерка фиг. 4, *а*), то в несимметричном случае, когда $a_{11} \neq 0$, это не так, ибо $\Phi_{21}^{(1)}(1) \neq \Phi_{21}^{(3)}(1)$. При $a_{11} \neq 0$ предельный цикл родится от петли сепаратрисы возмущенной системы (фиг. 4, *б*). Этот факт невозможно установить методом малого параметра.

Фиг. 4, *с* отвечает негрубой структуре, имеющей петлю сепаратрисы и двойной предельный цикл. Переход от фиг. 1 к фиг. 2 осуществляется через негрубую структуру фиг. 4, *б* (4, *а*).

Поступила 24 IV 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Понтрягин Л. С.* О динамических системах, близких к гамильтоновым, ЖЭТФ, 1934, т. 4, вып. 9.
2. *Баутин Н. Н.* Об аппроксимациях и грубости пространства параметров динамической системы. ПММ, 1969, т. 33, вып. 6.
3. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., «Наука», 1971.
4. *Морозов А. Д., Шильников Л. П.* К математической теории синхронизации колебаний. Докл. АН СССР, 1975, т. 223, № 6.
5. *Арнольд В. И.* Потеря устойчивости автоколебаний вблизи резонанса и версальные деформации эквивариантных векторных полей. Функциональный анализ и его приложения, 1977, т. 11, вып. 2.
6. *Ильяшенко Ю. С.* О нулях специальных абелевых интегралов в вещественной области. Функциональный анализ и его приложения, 1977, т. 11, вып. 4.
7. *Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г.* Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М., «Наука», 1967.
8. *Мельников В. К.* Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях. Тр. Моск. матем. о-ва, 1963, т. 12.