

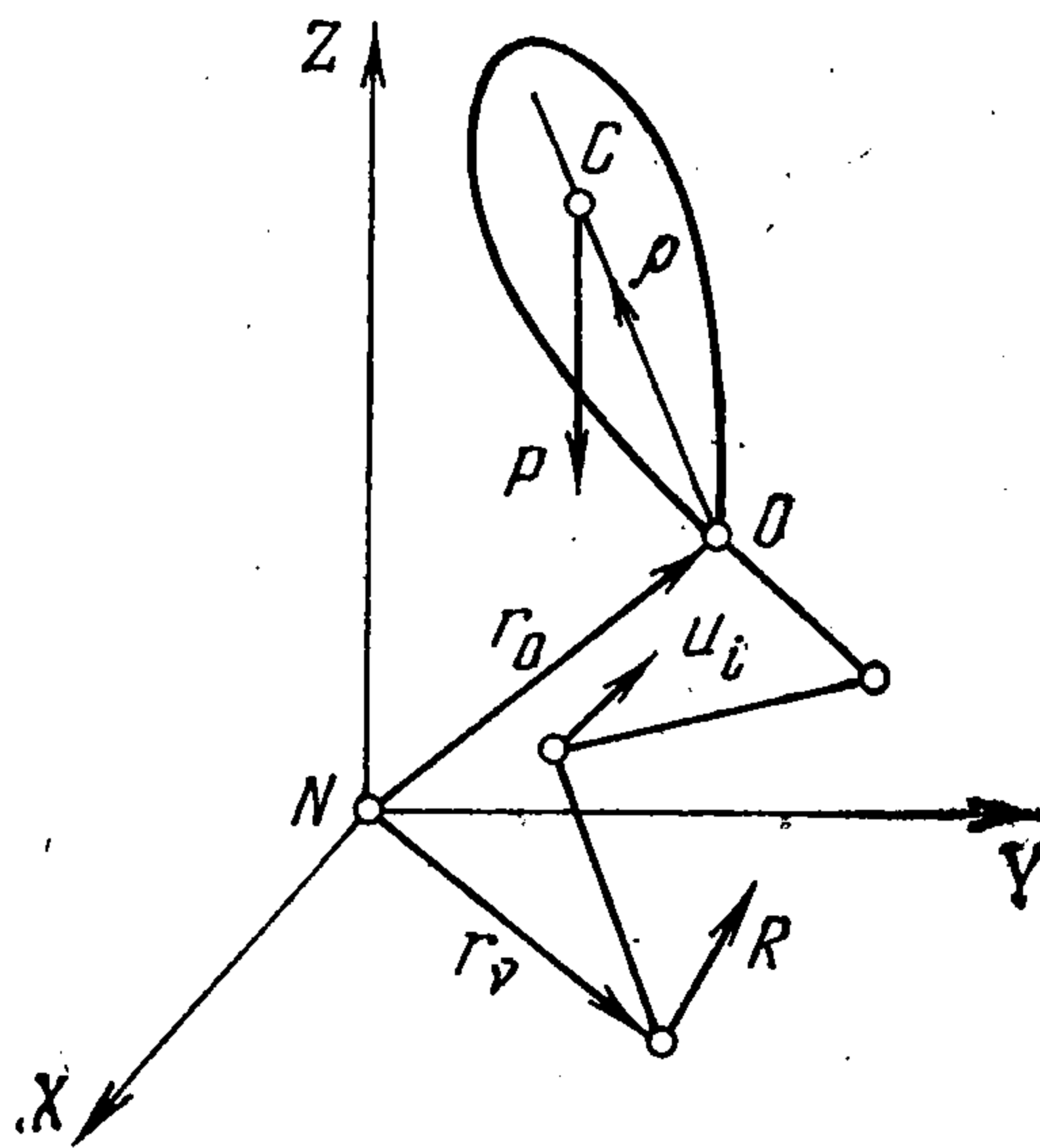
О ЗАДАЧЕ СТОЯНИЯ ШАГАЮЩЕГО АППАРАТА

В. В. Белецкий, Э. К. Лавровский

(Москва)

Исследуется специальный случай задачи двуногой ходьбы [1] — случай стояния на одной закрепленной ноге. Точнее, считаются фиксированными в пространстве опорная точка и точка подвеса ног. В этом предположении изучается динамика корпуса.

1. Уравнения движения. Рассмотрим движение корпуса на одной ноге. Введем (фиг. 1) неподвижную систему координат $NXYZ$, где N — начало координат, а ось Z направлена вертикально вверх. Рассмотрим тяжелое твердое тело веса $P = Mg$ (M — масса тела, g — ускорение силы тяжести); к точке O тела подвешены две многосвязные ноги, состоящие из невесомых неинерционных звеньев, соединенных трехстепенными суставами. Одна из них — опорная. Пусть C — центр тяжести тяжелого тела. Обозначим радиус-векторы, проведенные из N в центр масс тела, в точку подвеса O и в точку опоры соответственно как r_C, r_O, r_v ; ρ — радиус-вектор OC . Тогда $r_C = r_O + \rho$. Наконец, пусть P — вектор силы тяжести, а R — суммарный вектор силы реакции опоры, включающий в себя как нормальную составляющую реакции опоры, так и силу трения — сцепления.



Фиг. 1

Введем в рассмотрение e_x, e_y, e_z — репер единичных векторов по осям X, Y, Z и e_1, e_2, e_3 — репер единичных векторов по осям $Ox'y'z'$, жестко связанным с телом; будем предполагать, что эти оси совпадают с главными осями инерции тела в точке O . Взаимное положение осей определяется матрицей направляющих косинусов

$$(1.1) \quad e_x \cdot e_k = \alpha_k, \quad e_y \cdot e_k = \beta_k, \quad e_z \cdot e_k = \gamma_k \quad (k = 1, 2, 3)$$

Уравнения движения системы, представляющие собой теорему об изменении количества движения системы и теорему момента количества движения относительно точки O , могут быть записаны в виде [1]

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \mathbf{R} &= -\mathbf{P} + M \{ \mathbf{r}_O'' + \boldsymbol{\omega}' \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}] \} \\ J\boldsymbol{\omega}' + \boldsymbol{\omega} \times J\boldsymbol{\omega} + M\rho \times \mathbf{r}_O'' &= \boldsymbol{\rho} \times \mathbf{P} - (\mathbf{r}_O - \mathbf{r}_v) \times \mathbf{R} \end{aligned}$$

Здесь ω — вектор угловой скорости твердого тела, J — тензор инерции тела в точке O . Символ $\dot{\omega}$ означает производную угловой скорости в подвижных осях, так что

$$(1.3) \quad \frac{dL}{dt} = J\dot{\omega} + \omega \times J\omega$$

где L — вектор момента количества движения. Будем считать, что в каждом i -м суставе ноги приложен управляющий момент u_i . Применяя теорему об изменении момента количества движения относительно i -го сустава к части ноги от точки опоры до i -го сустава, получим вследствие безынерционности ног

$$u_i = (r_i - r_v) \times R$$

где r_i — радиус-вектор i -го сустава, проведенный из начала N неподвижной системы координат.

Таким образом, последнее слагаемое во втором уравнении (1.2) представляет собой момент, приложенный к телу. Он зависит от силы реакции R , которую можно рассматривать как управление. По постановке задачи это управление обеспечивает неподвижность точки подвеса ног. Кроме того, неизменна и точка опоры. Таким образом

$$(1.4) \quad r_0 = \text{const}, \quad r_v = \text{const}$$

В общем случае $r_0 = r_0(t)$ — заданная непрерывная функция, $r_v = r_v(t)$ — заданная кусочно-постоянная функция; уравнения (1.2) описывают тогда процесс так называемой одноопорной ходьбы [1].

В силу (1.4) в уравнениях (1.2) имеем $r_0'' = 0$. Учитывая этот факт и исключая из второго уравнения (1.2) реакцию R с помощью первого, получим уравнение движения корпуса

$$(1.5) \quad \begin{aligned} J\dot{\omega} + \omega \times J\omega &= \rho \times P + r \times P - Mr \times \{\dot{\omega} \times \rho + \omega \times [\omega \times \rho]\} \\ P &= -Pe_z, \quad r = xe_x + ye_y + ze_z \\ \rho &= x_0'e_1 + y_0'e_2 + z_0'e_3, \quad \omega = \omega_1e_1 + \omega_2e_2 + \omega_3e_3 \\ J &= \text{diag}\{A, B, C\} \end{aligned}$$

Здесь $r = r_0 - r_v$ — постоянный в пространстве вектор; его введение эквивалентно переносу начала N неподвижной системы координат в точку опоры; $x, y, z, x_0', y_0', z_0'$ — постоянные величины.

Первый член в правой части (1.5) — момент силы тяжести, остальные члены описывают управляющий момент. Управляющий момент, как видно, зависит не только от фазовых координат и скоростей, но и от ускорений. Система (1.5) замыкается кинематическими уравнениями Пуассона

$$(1.6) \quad \dot{e}_x = e_x \times \omega, \quad \dot{e}_y = e_y \times \omega, \quad \dot{e}_z = e_z \times \omega$$

Перейдем к исследованию системы (1.5), (1.6). Ее частный случай при $r = 0$ — классическая задача динамики тяжелого твердого тела. Поэтому и при $r \neq 0$ естественно прежде всего обратиться к трансформациям хорошо изученных (например интегрируемых) случаев задачи о движении тяжелого твердого тела.

Здесь будут рассмотрены трансформации трех классических случаев: Эйлера, Лагранжа и плоского движения.

2. Трансформация случая Эйлера [1]. Пусть точка подвеса ноги совпадает с центром масс тела. Тогда $\rho = 0$ и уравнение (1.5) с учетом (1.3) удобно записать в виде

$$(2.1) \quad d\mathbf{L}/dt = \mathbf{r} \times \mathbf{P}$$

Приложенный к телу вектор $\mathbf{r} \times \mathbf{P}$ управляющего момента постоянен и лежит в горизонтальной плоскости, это означает, что момент количества движения \mathbf{L} неограниченно возрастает. Назовем такое движение «неограниченной раскруткой тела». Имеют место следующие первые интегралы для компонент L_x , L_y , L_z вектора \mathbf{L} :

$$L_x = -P_y t + C_1, \quad L_y = P_x t + C_2, \quad L_z = C_3$$

Здесь C_1 , C_2 , C_3 — постоянные интегрирования.

Асимптотически направление вектора \mathbf{L} стремится к направлению действующего горизонтально управляющего момента.

Напомним, что рассматриваемая система, опираясь на одну и ту же точку поверхности, сохраняет неподвижность ноги при ее произвольном положении; при этом центр масс системы не может ни в какой момент времени располагаться на одной вертикали с точки опоры. Система, опираясь на поверхность единственной точкой ноги, стоит наклонно и не падает. Однако это стояние достигается путем неограниченного увеличения момента количества движения. (Так и человек, стоя на пятках, пытается сохранить равновесие, вертя руками). Рассматриваемый случай уже описывался в [1], однако его изложение здесь необходимо для понимания дальнейшего.

Как видно из (2.1), только в случае $\mathbf{r} \parallel \mathbf{P}$ в системе не будет неограниченной раскрутки, и задача (2.1) вырождается в классический случай Эйлера.

Неограниченная раскрутка тела может иметь место и при $\rho \neq 0$, так как в этом случае в момент, приложенный к телу, аддитивно входит постоянный (в пространстве) вектор $\mathbf{r} \times \mathbf{P}$.

Интересно, что существуют и ограниченные движения тела. Это будет показано ниже.

5. Трансформация случая Лагранжа. Наложим на параметры (1.5) следующие условия:

$$(3.1) \quad \mathbf{r} = h\mathbf{e}_z, \quad A = B, \quad \rho = \rho\mathbf{e}_z$$

Первое условие (3.1) означает, что точка подвеса ног расположена строго над точкой опоры ($x = y = 0$, $z = h$). Последние два условия (3.1) — условия Лагранжа: тело является динамически симметричным ($A = B$) и центр масс лежит на оси динамической симметрии ($x_0' = y_0' = 0$, $z_0' = \rho$).

Рассмотрим вопрос о первых интегралах уравнения (1.5), (1.6) при условиях (3.1). Так как $\mathbf{P} = -P\mathbf{e}_z$ и $\mathbf{r} = h\mathbf{e}_z$, то суммарный вектор момента, стоящий в правой части (1.5), нормали к \mathbf{e}_z , что в силу (1.3) (и при $A \neq B \neq C$) приводит к интегралу

$$(3.2) \quad L_z = K_1$$

В рассматриваемом здесь случае $A = B$ он имеет вид

$$(3.3) \quad A(\omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2) + C\omega_3\gamma_3 = K_1$$

Подставим теперь в (1.5) выражения (3.1), (3.2) и умножим обе части его скалярно на e_3 . Учитывая известную формулу $a \times [b \times c] = b(ac) - c(ab)$, получим после преобразований

$$(3.4) \quad C\omega_3 \dot{} = M\rho h \{ (e_z \omega \dot{}) - (\omega \dot{e}_3)(e_z e_3) - (e_3 \omega) ([e_z \times \omega] e_3) \}$$

Учитывая третье из уравнений (1.6), можно убедиться, что в фигурной скобке стоит полная производная от выражения

$$(e_z \omega) - (e_z e_3)(\omega e_3) = \gamma_1 \omega_1 + \gamma_2 \omega_2$$

Поэтому, интегрируя (3.4), получаем новый первый интеграл

$$(3.5) \quad C\omega_3 - M\rho h(\gamma_1 \omega_1 + \gamma_2 \omega_2) = K_2$$

При $h = 0$ интеграл (3.5) превращается в интеграл Лагранжа.

Для исследования может оказаться полезной также линейная связка интегралов (3.3) и (3.5)

$$(3.6) \quad (aA - bM\rho h)(\gamma_1 \omega_1 + \gamma_2 \omega_2) + C\omega_3(a\gamma_3 + b) = aK_1 + bK_2$$

где a, b — произвольные постоянные. При $aA = bM\rho h$ получим из (3.6) интеграл

$$(3.7) \quad \omega_3(A + M\rho h\gamma_3) = C_1$$

Если в (3.6) $Ca = aA - bM\rho h$, то интеграл (3.6) приобретает вид

$$(3.8) \quad M\rho h(\omega e_z) + (A - C)\omega_3 = C_2$$

Интеграл (3.8) необходим для вывода интеграла энергии, который тоже существует в рассматриваемом случае. Покажем это.

Проводя обычную процедуру получения интеграла энергии, с учетом условий (1.6), (3.1) обнаружим, что

$$(3.9) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\omega J \omega) = -P\rho \frac{d}{dt} (e_3 e_z) - M\rho h (e_3 e_z) \frac{1}{2} \frac{d\omega^2}{dt} + \\ + M\rho h (e_3 \omega) (e_z \dot{\omega}) + M\rho h \omega^2 ([\omega \times e_z] e_3)$$

Но в силу (3.1) и (3.8)

$$(3.10) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\omega J \omega) = \frac{1}{2} A \frac{d}{dt} \omega^2 + (C - A)(e_3 \omega)(e_3 \dot{\omega}) = \\ = \frac{1}{2} A \frac{d}{dt} \omega^2 + M\rho h (e_z \dot{\omega})(e_3 \omega)$$

Используя результат подстановки (3.10) в (3.9) и учитывая (1.6), приведем (3.9) к виду

$$(3.11) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} A\omega^2 + P\rho \frac{d}{dt} (e_3 e_z) + M\rho h (e_3 e_z) \frac{1}{2} \frac{d\omega^2}{dt} + \\ + M\rho h \omega^2 \left(e_3 \frac{de_3}{dt} \right) = 0$$

В (3.11), согласно (1.1), $(e_3 e_z) = \gamma_3$, $e_3 de_z / dt = d\gamma_3 / dt$.

Соотношение (3.11) превращается в интегрируемое домножением на интегрирующий множитель $A + M\rho h\gamma_3$. Результат интегрирования — следующий первый интеграл:

$$(3.12) \quad \left(\omega^2 + \frac{g}{h}\right) (A + M\rho h\gamma_3)^2 = E$$

Здесь E — постоянная интегрирования. Интеграл (3.12) является трансформацией интеграла энергии случая Лагранжа. В этом можно убедиться, совершая в (3.12) (с учетом (3.5)) предельный переход $h \rightarrow 0$.

Любопытно, что из (3.12) и (3.7), как следствие, получается первый интеграл, содержащий только компоненты угловой скорости

$$(\omega^2 + gh^{-1}) / \omega_3^2 = E / c_1^2$$

Итак, получены три независимых первых интеграла (3.3), (3.5), (3.12). Вместе с четвертым (тривиальным) интегралом

$$(3.13) \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$$

они позволяют свести задачу к квадратурам. А именно

$$\left(\frac{d\gamma_3}{dt}\right)^2 = (1 - \gamma_3^2) \left\{ \frac{C^2 E - (M\rho h K_1 + A K_2)^2}{C^2 (A + M\rho h\gamma_3)^2} - \frac{g}{h} \right\} - \left(\frac{K_1 - K_2 \gamma_3}{A + M\rho h\gamma_3} \right)^2$$

Таким образом

$$(3.14) \quad \frac{d\gamma_3}{dt} = \pm \frac{\sqrt{P_4(\gamma_3)}}{A + M\rho h\gamma_3}$$

где $P_4(\gamma_3)$ — полином четвертой степени указанного аргумента. Обращение $\gamma_3(t)$ квадратуры (3.14) позволяет обычным образом вычислить углы Эйлера, определяющие положение тела.

Не останавливаясь на количественном описании движения, рассмотрим его качественный характер. С этой целью исследуем корни полинома

$$P_4(\gamma_3) = (1 - \gamma_3^2) \left\{ E - \frac{(M\rho h K_1 + A K_2)^2}{C^2} - \frac{g}{h} (A + M\rho h\gamma_3)^2 \right\} - (K_1 - \gamma_3 K_2)^2$$

Видно, что

$$P_4(\gamma_3) \sim M^2 \rho^2 h g \gamma_3^4 \text{ при } \gamma_3 \rightarrow \infty$$

$$P_4(\gamma_3 = \pm 1) = - (K_1 \pm K_2)^2 \leq 0$$

Таким образом, при $\rho h \neq 0$ полином $P_4(\gamma_3)$ имеет в интервале $\gamma_3 \in (-1, 1)$ два корня, которые будем обозначать как u_1, u_2 ; пусть $u_1 < u_2$.

Предположим сначала, что знаменатель в формуле (3.14) не меняет знака на допустимом интервале изменения $\gamma_3 \in [u_1, u_2]$. По аналогии с [2] рассмотрим качественный характер движения конца оси Oz' по воображаемой единичной сфере, жестко связанной с системой осей $OXYZ$. Ось Oz' совершает колебания в шаровом слое, определяемом значениями u_1, u_2 (фиг. 2).

Для описания взаимного положения систем $OXYZ$ и $Ox'y'z'$ введем в рассмотрение углы Эйлера ψ, θ, φ [2]. Тогда

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \psi' \sin \theta \sin \varphi + \theta' \cos \varphi, & \omega_2 &= \psi' \sin \theta \cos \varphi - \theta' \sin \varphi \\ \gamma_1 &= \sin \theta \sin \varphi, & \gamma_2 &= \sin \theta \cos \varphi, & \gamma_3 &= \cos \theta\end{aligned}$$

Отсюда

$$\gamma_1 \omega_1 + \gamma_2 \omega_2 = \psi' (1 - \gamma_3^2)$$

Используя соотношения (3.3) и (3.5), окончательно получим

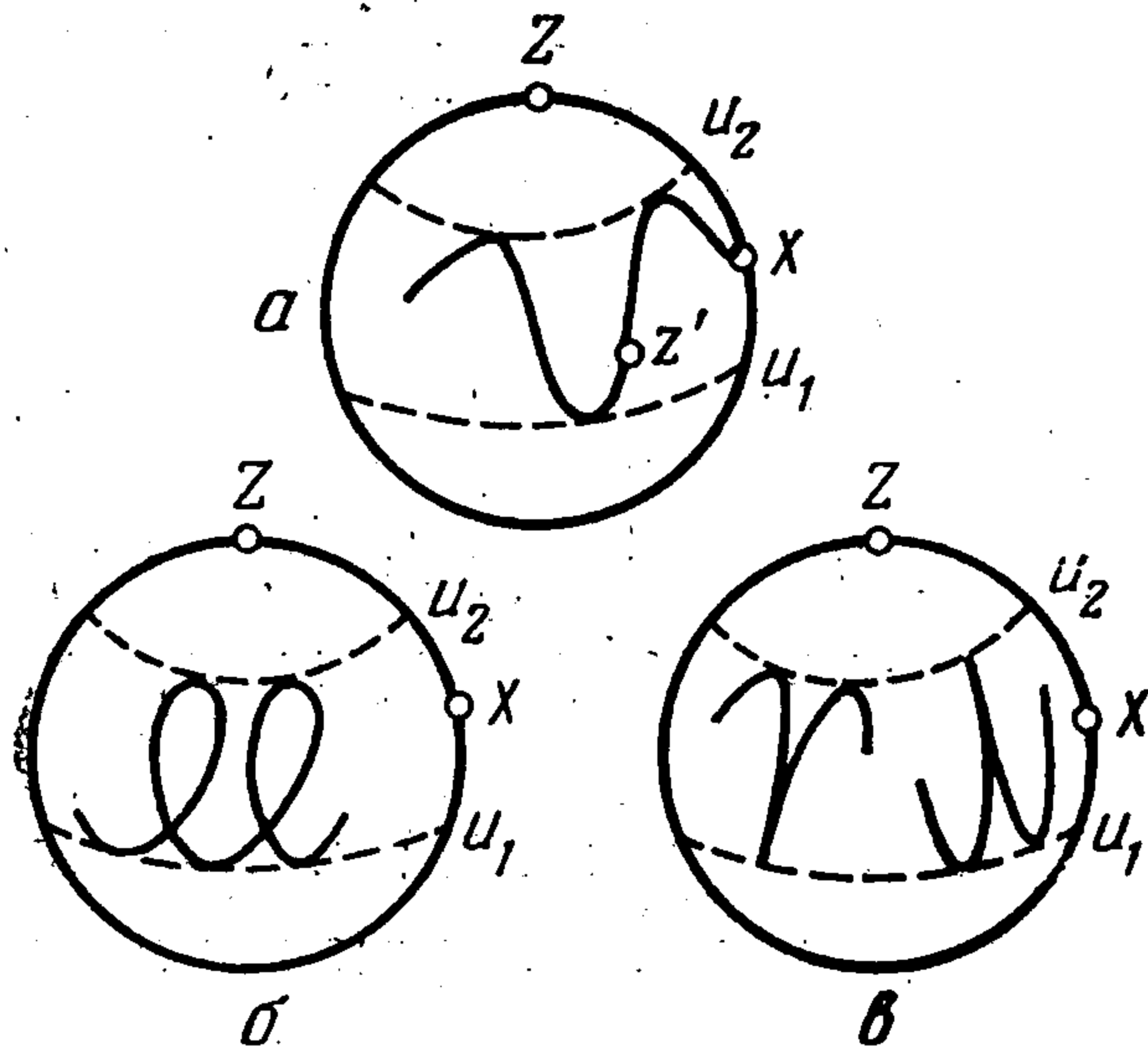
$$\psi' = \frac{1}{1 - \gamma_3^2} \frac{K_1 - K_2 \gamma_3}{A + M \rho h \gamma_3}$$

Пусть χ и w -углы, образуемые меридиальной дугой $z'Z$ соответственно с дугой ZX и с касательной к траектории точки z' . Тогда

$$(3.15) \quad \chi = \psi - \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{tg} w = \frac{\sin \theta d\chi}{d\theta} = \frac{-(1 - \gamma_3^2) d\chi}{d\gamma_3} = \pm \frac{K_1 - K_2 \gamma_3}{\sqrt{P_4(\gamma_3)}}$$

Следовательно, траектория точки z' носит монотонный характер (фиг. 2, а), если функция $(K_1 - K_2 \gamma_3)$ не меняет знака при $\gamma_3 \in [u_1, u_2]$.

В противном случае характер траектории петлеобразный (фиг. 2, б). [Наконец, если $(K_1 - K_2 \gamma_3)$ обращается в нуль на концах отрезка при $\gamma_3 = u_1$ или $\gamma_3 = u_2$, то траектория имеет точки возврата (фиг. 2, в).



Фиг. 2

Пусть теперь $A + M \rho h u' = 0$, где $u' \in (u_1, u_2)$. Качественный характер движения конца оси Oz' по единичной сфере при этом сохраняется, поскольку не изменяется вид формулы (3.15). Однако, согласно (3.14), при прохождении параллели $\gamma_3 = u'$ угловая скорость $d\gamma_3 / dt$ (а с ней, вообще говоря, и угловые скорости эйлеровых углов)

достигает бесконечно больших значений. В этот момент в системе наблюдается эффект, сходный с ударным воздействием со стороны опоры. Частный случай этого эффекта будет рассмотрен ниже, при исследовании плоского случая.

4. Устойчивость вертикального вращения. Уравнения (1.5), (1.6) при условиях (3.1) имеют частное решение, отвечающее вращению тела с постоянной угловой скоростью вокруг вертикально расположенной оси динамической симметрии

$$(4.1) \quad \gamma_3 = 1, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = r_0$$

Исследуем устойчивость движения (4.1).

Возмущенное движение

$$(4.2) \quad \omega_1 = p, \quad \omega_2 = q, \quad \omega_3 = r_0 + \xi; \quad \gamma_1 = \gamma, \quad \gamma_2 = \gamma', \quad \gamma_3 = 1 + \delta$$

имеет первые интегралы

$$(4.3) \quad \begin{aligned} V_1 &= 2A_0^2 r_0 \xi + 2M\rho A_0 g_0 \delta + A_0^2 (p^2 + q^2 + \xi^2) + \\ &+ M^2 \rho^2 h g_0 \delta^2 + 4M\rho h r_0 A_0 \xi \delta + \dots \\ V_2 &= A_0 (p\gamma + q\gamma') + C\xi\delta + Cr_0\delta \\ V_3 &= \gamma^2 + \gamma'^2 + \delta^2 + 2\delta = 0 \\ V_4 &= A_0 C \xi + M\rho h C \xi \delta + M\rho h C r_0 \delta \end{aligned}$$

$$(4.4) \quad A_0 = A + M\rho h, \quad g_0 = g + h r_0^2$$

Интегралы V_1 и V_3 получены из формул (3.12) и (3.14). Интегралы V_2 и V_4 — соответственно разности интегралов (3.3), (3.5) и следствие формулы (3.7). При этом в (4.3) сохранены лишь члены не выше второго порядка малости; члены высшего порядка не имеют значения для исследования устойчивости.

По методу Н. Г. Четаева [3] будем искать функцию Ляпунова в виде квадратичной связки интегралов (4.3)

$$(4.5) \quad L = V_1 + 2\kappa V_2 + \alpha V_3 + \beta V_4 + kV_4^2 + mV_3\delta$$

Полагая

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \beta &= -\frac{2A_0}{C} r_0, \quad \alpha = M\rho h A_0 r_0^2 - M\rho A_0 g_0 - \kappa C r_0 \\ k &= (C^2 - A_0^2) / (A_0^2 C^2) \\ 2m &= -M^2 \rho^2 h g - \frac{C^2}{A_0} M\rho h r_0^2 \left(1 + \frac{M\rho h}{A_0}\right) \end{aligned}$$

приведем (4.5) к виду

$$(4.7) \quad \begin{aligned} L &= A_0^2 p^2 + 2\kappa A_0 p\gamma + [-M\rho A_0 g - \kappa C r_0] \gamma^2 + \\ &+ A_0^2 q^2 + 2\kappa A_0 q\gamma' + [-M\rho A_0 g - \kappa C r_0] \gamma'^2 + \\ &+ C\xi^2 + 2\kappa' C \xi \delta + [-M\rho A_0 g - \kappa' C r_0] \delta^2 \end{aligned}$$

$$(4.8) \quad \kappa' = \kappa + M\rho h r_0 C / A_0$$

Так как, согласно (4.5)

$$(4.9) \quad \frac{dL}{dt} = mV_3 \frac{d\delta}{dt} = 0$$

из-за $V_3 = 0$, то достаточным условием устойчивости невозмущенного движения (4.1) является условие положительной определенности квадратичной формы (4.7). Это условие можно обеспечить подходящим выбором бывшей до сих пор произвольной постоянной κ . Действительно, каждая из трех квадратичных форм, входящих аддитивно в (4.7), положительно-определенная при любом выборе κ , κ' из интервала значений

$$(4.10) \quad \kappa_1 \leq \kappa \leq \kappa_2, \quad \kappa_1 \leq \kappa' \leq \kappa_2$$

$$(4.11) \quad \kappa_{1,2} = -\frac{C r_0}{2} \pm \left[\frac{C^2 r_0^2}{4} - M\rho A_0 g \right]^{1/2}$$

Интервал (4.10) действительно существует при

$$(4.12) \quad C^2 r_0^2 > 4 M\rho A_0 g$$

а неравенство (4.10) в силу (4.8) совместно при дополнительном условии

$$(4.13) \quad M\rho hr_0 C / A_0 < \kappa_2 - \kappa_1$$

которое в явном виде выглядит так:

$$(4.14) \quad (1 - M^2 \rho^2 h^2 / A_0^2) C^2 r_0^2 > 4M\rho A_0 g, \quad A_0 = M\rho h + A$$

Ясно, что (4.12) выполнено, если выполнено (4.14). Таким образом, достаточным условием устойчивости невозмущенного движения (4.1) является единственное условие (4.14). Оно обобщает известное достаточное условие устойчивости волчка Лагранжа и переходит в него в предельном случае $h = 0$.

3. Плоский случай. Предыдущий анализ обнаружил большое разнообразие типов движения, описываемых уравнением (1.5). Уже были выявлены неограниченная раскрутка тела и ограниченные движения; из-за структуры уравнения (1.5) коэффициенты при старших производных могут проходить через нулевое значение, что вызывает ударные явления — движения с неограниченным возрастанием угловой скорости при ограниченных углах; существуют также особые движения — стационарные и лимитационные.

Все это обнаруживается в плоском случае, к анализу которого переходим.

Полагая

$$(5.1) \quad y - y_v = 0, \quad z - z_v = h, \quad x - x_v = \sigma$$

выводим из (1.5) уравнение плоского движения

$$(5.2) \quad [J + k_\rho h \cos \theta + k_\rho \sigma \sin \theta] \theta'' + \\ + k_\rho (\theta')^2 [\sigma \cos \theta - h \sin \theta] - k_\rho g \sin \theta = Mg\sigma$$

Здесь $k_\rho = M\rho$; J — момент инерции в точке подвеса ($J = J_0 + M\rho^2$, где J_0 — центральный момент инерции). Угол θ отсчитывается от положительного направления оси OZ к OX до оси симметрии тела Oz' , на которой, по предположению, находится центр масс тела.

Из (5.2) видно прежде всего существование положений равновесия, определяемых равенством

$$(5.3) \quad \sin \theta_0 = -\sigma / \rho$$

при условии

$$(5.4) \quad |\sigma / \rho| \leq 1$$

Если (5.4) не выполнено, равновесий нет.

Линеаризация уравнения (5.2) около положений равновесия (5.3) позволяет убедиться, что «верхнее» равновесие ($\cos \theta_0 > 0$) неустойчиво, а «нижнее» равновесие ($\cos \theta_0 < 0$) устойчиво при выполнении условия

$$(5.5) \quad J_0 + M(\rho^2 - \sigma^2) > Mh \sqrt{\rho^2 - \sigma^2}$$

и неустойчиво в противном случае.

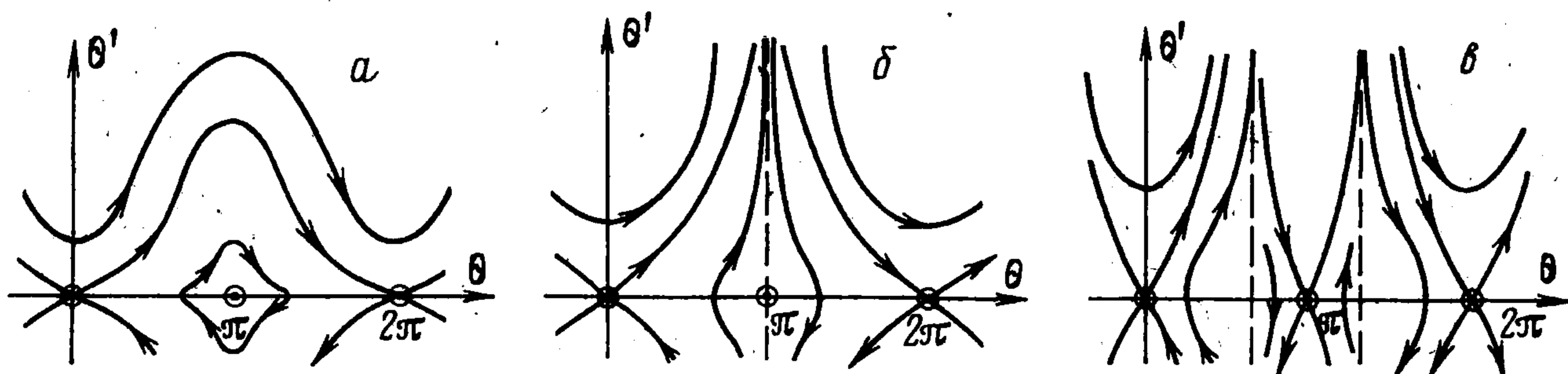
Уравнение (5.2) стандартной заменой

$$(5.6) \quad \theta' = p, \quad \theta'' = \frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} p^2$$

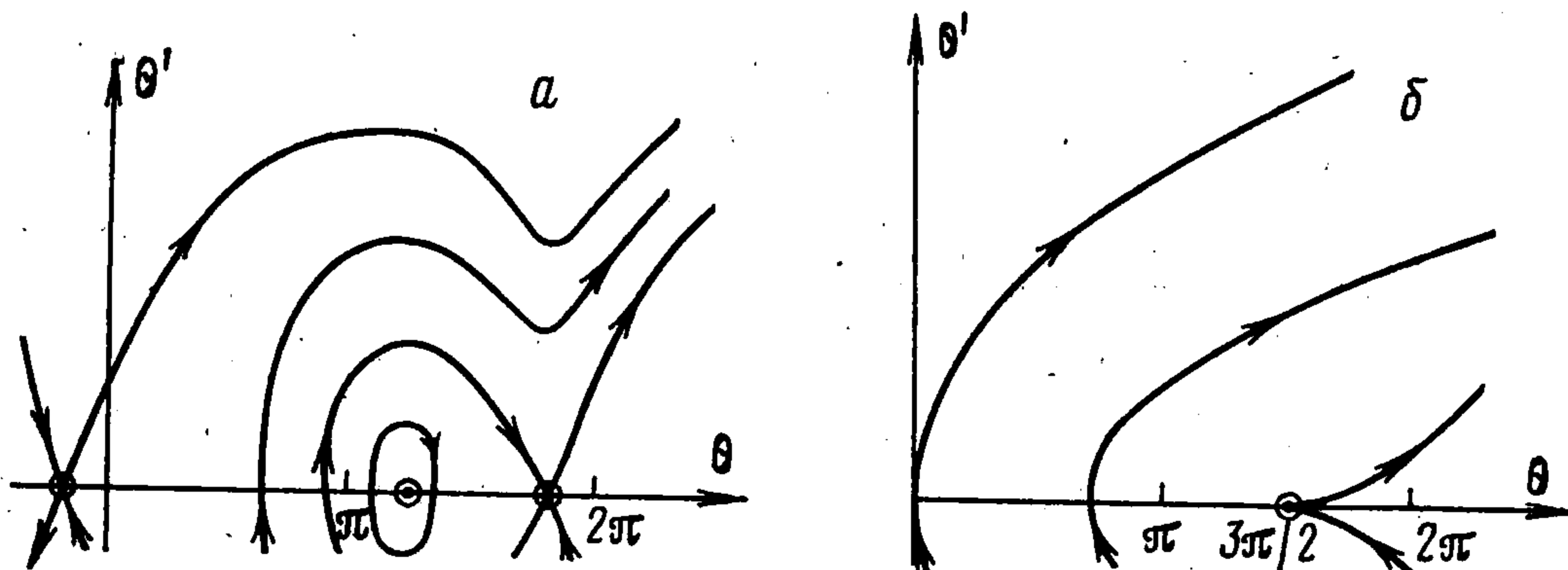
приводится к линейному неоднородному уравнению первого порядка относительно p^2 с независимой переменной θ . Такое уравнение интегрируется в квадратурах. В рассматриваемой задаче квадратуры берутся в явном виде. Результат имеет вид

$$(5.7) \quad \theta' = [c - 2 \cos \theta + \kappa \theta + 2e\sigma \sin(\theta - \alpha) / \rho - e \cos(2\theta - \alpha) / 2]^{1/2} \times \\ \times [1 + e \cos(\theta - \alpha)]^{-1}, \quad c = \text{const} \\ \theta' = d\theta / d\tau, \quad \tau = \omega t, \quad \omega = \sqrt{M\rho g / J} \\ \kappa = \sigma(2/\rho + M\rho / J), \quad e = M\rho \sqrt{h^2 + \sigma^2} / J \\ \sin \alpha = \sigma / \sqrt{h^2 + \sigma^2}, \quad \cos \alpha = h / \sqrt{h^2 + \sigma^2}$$

Пользуясь (5.7), можно построить фазовый портрет движения на плоскости θ, θ' , зависящий от значений четырех параметров: $\kappa, e, \sigma / \rho, \alpha$.



Фиг. 3



Фиг. 4

Существенно влияние параметра e . Как видно из (5.7), при $e \geq 1$ возможно прохождение знаменателя в правой части (5.7) через нуль; при этом угловая скорость приобретает бесконечно большое значение при конечном значении угла. Условно назовем это явление «ударом». Необходимым и достаточным условием отсутствия ударов является условие $e < 1$.

Фиг. 3 поясняет сказанное. На ней изображена фазовая картина для случая $\sigma = 0$. При $e < 1$ эта картина похожа на фазовый портрет задачи о математическом маятнике с устойчивой стационарной точкой $\theta_0 = \pi$ и неустойчивой $\theta = 0$ (фиг. 3, а).

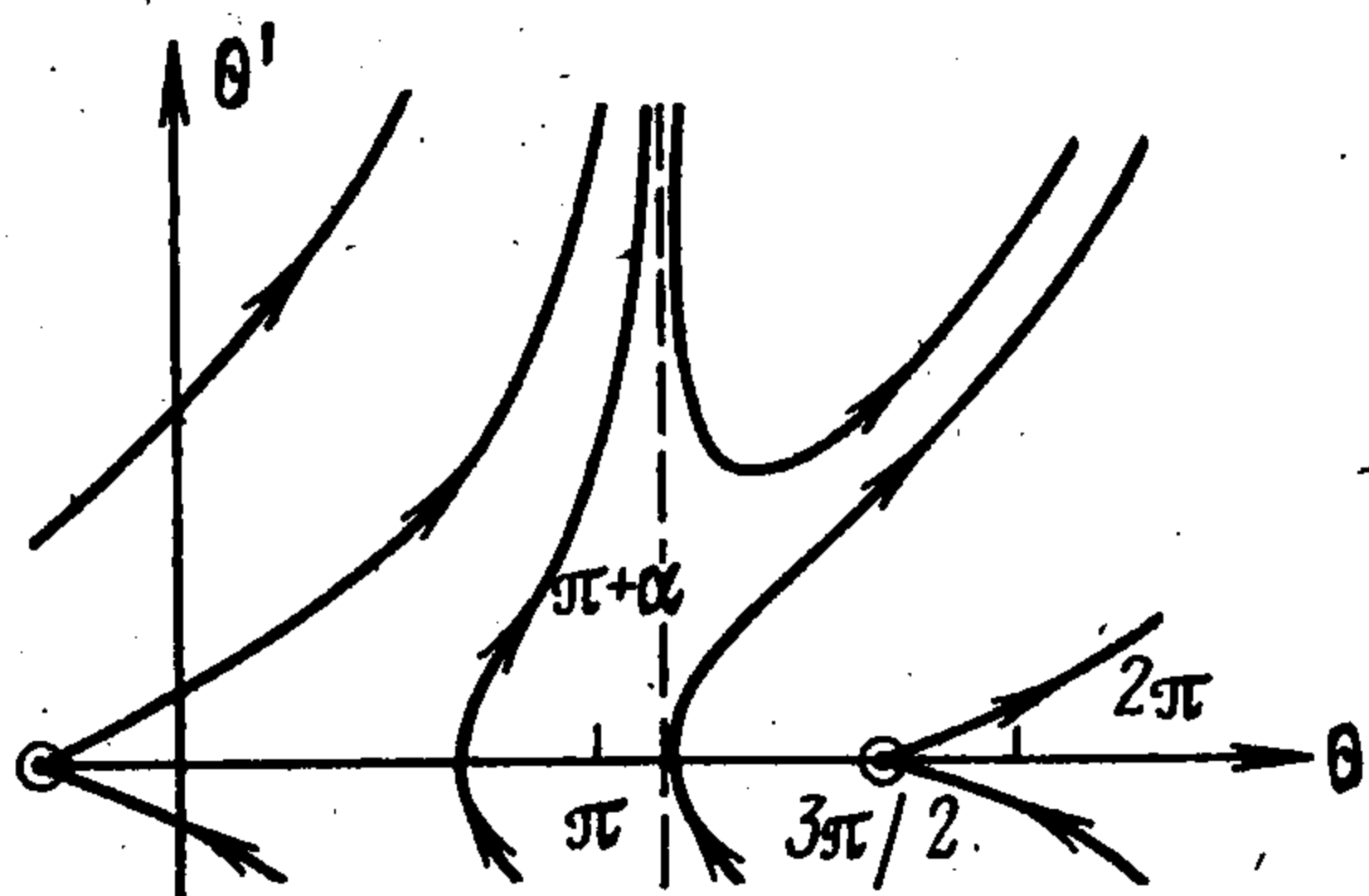
При $e \rightarrow 1$ область колебательных движений все более вытягивается вдоль оси θ' , и, наконец, при $e = 1$ разрывается: колебательные движения исчезают, появляются

ударные движения (фиг. 3, б), причем поверхностью разрыва является прямая $\theta_0 = \pi$. Далее, при $e > 1$ поверхность разрыва $\theta = \theta_*$ расщепляется на две, удовлетворяющие условию $\cos \theta_* = -1/e$, а точка $\theta_0 = \pi$ становится второй неустойчивой стационарной точкой (фиг. 3, в).

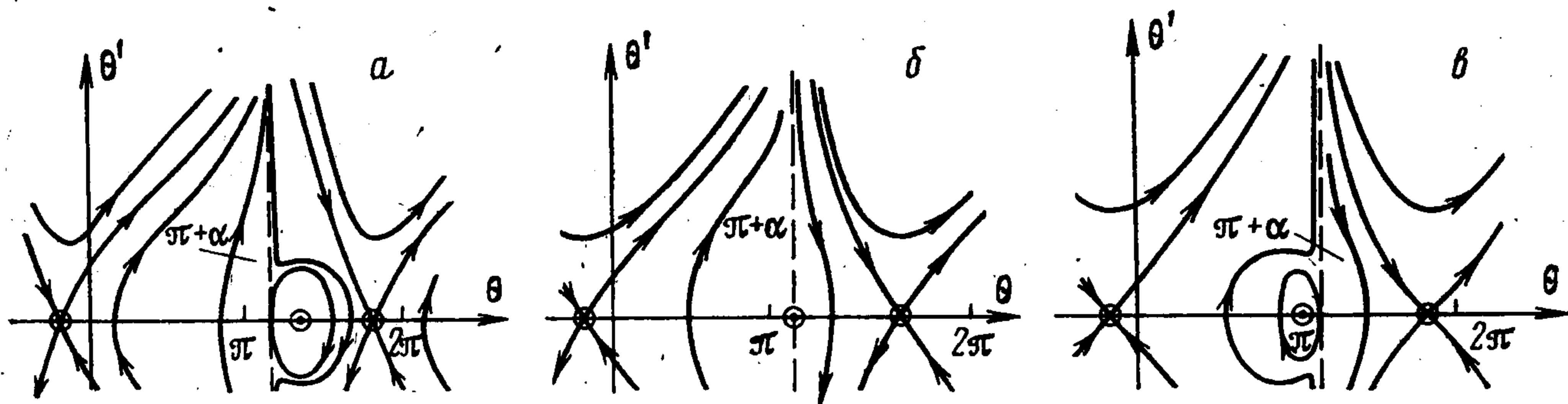
Рассмотренная картина отвечала случаю $\sigma = 0$, т. е. положению точки подвеса ног строго над опорной точкой. Если $\sigma \neq 0$, картина осложняется действием постоянного момента и наличием движений с неограниченной раскруткой тела. На фиг. 4 изображены фазовые портреты этого случая при выполнении условия безударности

$e < 1$. Для определенности положено $\sigma > 0$. При $\sigma < \rho$, как было указано, существует стационарное решение (5.3) и область колебательных движений в окрестности устойчивого стационарного движения. Вместе с тем существуют и траектории неограниченной раскрутки тела. При стремлении $\sigma \rightarrow \rho$ область колебательных движений сжимается и, наконец, исчезает при $\sigma = \rho$. Остаются только траектории неограниченной раскрутки. При $\sigma > \rho$ они лишь деформируются. При $\sigma > \rho$ в отличие от случая $\sigma < \rho$ стационарные решения и лимитационные движения отсутствуют.

Нетрудно представить себе и фазовую траекторию при $\sigma \geq \rho$, $e \geq 1$, характеризующуюся отсутствием стационарных точек и ударными явлениями. При значениях σ и e , чуть больших соответственно величин ρ и единицы, фазовые траектории на фиг. 4, б разорвутся на поверхностях разрыва $\theta_* = \pi + \alpha$ (точнее, при $\cos(\theta_* - \alpha) = -1/e$), устремляясь вдоль них к бесконечности по θ' (см. фиг. 5, где $\sigma = \rho$, $e = 1$).



Фиг. 5



Фиг. 6

Наиболее сложен случай одновременного выполнения условия (5.4) существования стационарных точек и условия ударности $e \geq 1$. Величина области колебательных движений зависит от того, насколько далеко одна из двух стационарных точек $\theta_0 \in [\pi, 3\pi/2]$ расположена от линии разрыва; при прохождении линии разрыва через стационарную точку θ_0 колебательных движений нет. Таким образом, необходимыми и достаточными условиями существования области ограниченных движений являются условия (5.4) вместе с условием $\theta_0 \neq \theta^*$, где θ^* определяется равенством $1 + e \cos(\theta^* - \alpha) = 0$ и условием $\theta^* \in [\pi, 3\pi/2]$. Возможные ситуации при $0 < \sigma < \rho$, $e = 1$ изображены на фиг. 6 (а — случай $\theta_0 > \theta^*$, б — случай $\theta_0 = \theta^*$ и в — случай $\theta_0 < \theta^*$).

Наконец, в случае $\rho > \sigma \neq 0$, $e > 1$ картина усложняется наличием двух поверхностей разрыва. Область ограниченных движений может лежать слева или справа от них (при этом фазовый портрет можно получить из рассмотрения фиг. 6), но не между ними, поскольку для стационарных точек нарушаются тогда условия устойчивости (5.5). В последнем случае фазовый портрет напоминает приведенный на фиг. 3, в.

Рассмотренная в работе задача отвечает предельному случаю задачи ходьбы (при стремлении к нулю длины шага и скорости ходьбы), и поэтому исследованные движения могут служить порождающими для движений при ходьбе. Они представляют и самостоятельный интерес как анализ «условий стояния».

Поступила 3 V 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Белецкий В. В. Динамика двуногой ходьбы. 1, 2. Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 3—4.
2. Аппель П. Теоретическая механика, т. 2. М., Физматгиз, 1960.
3. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. М., Гостехиздат, 1955.