Прикладная математика и механика. Том 43, 1979

УДК 531.011

О ПРИНЦИПАХ ЛАГРАНЖА И ЯКОБИ ДЛЯ НЕГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМ

В. В. Румянцев

(Москва)

Известно [1–4], что интегральные вариационные принципы Гамильтона, Лагранжа и Якоби справедливы не только для голономных, но и для неголономных систем, однако для последних кривые сравнения в общем случае не удовлетворяют уравнениям неинтегрируемых связей, ввиду чего для неголономных систем эти принципы не являются, вообще говоря, принципами стационарного действия. В работе [5] установлены условия, необходимые и достаточные для того, чтобы решения уравнений движения неголономной системы находились среди решений уравнений Эйлера вариационной задачи Лагранжа для принципа Гамильтона, т. е. условия, при которых этот принцип является в первом приближении принцином стационарного действия. В данной статье аналогичная задача решается для принципов Лагранжа и Якоби применительно к механическим системам, стесненным нелинейными неголономными стационарными связями, однородными по обобщенным скоростям, и находящимся под действием потенциальных сил, производных от обобщенной силовой функции. Найдены условия, необходимые и достаточные для того, чтобы принципы Лагранжа и Якоби были в первом приближении принципами стационарного действия. Эти условия оказались совпадающими с условиями работы [5]. Кроме того, обсуждается вопрос об условиях, при которых имеют место теорема и интеграл энергии для систем, стесненных идеальными нелинейными неголономными связями. Указаны условия, при которых действительные перемещения неголономной системы находятся среди возможных перемещений.

1. Рассмотрим механическую систему, стесненную неинтегрируемыми идеальными связями вида

$$f_l(q_i,\ q_i^{\cdot},\ t) = 0 \quad (l = 1, \ldots, r) \tag{1.1}$$

в общем случае нелинейными относительно обобщенных скоростей $q_i^{\cdot} = dq_i / dt$, где q_i $(i = 1, \ldots, n)$ — лагранжевы координаты системы, t — время. Связи (1.1) предполагаются независимыми, т. е.

$$\operatorname{rank}\left\|\frac{\partial f_l}{\partial q_i^{\cdot}}\right\| = r$$

Одним из основных принципов динамики механических систем является принцип Даламбера — Лагранжа, который в обобщенных координатах имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_i^{\cdot}} - \frac{\partial L}{\partial q_i} - Q_i\right)\delta q_i = 0 \tag{1.2}$$

Здесь $L(q_i, q_i^{\cdot}, t) = T + U$ — функция Лагранжа, $T(q_i, q_i^{\cdot}, t)$ — кинетическая энергия, $U = U_1(q_i, q_i^{\cdot}, t) + U_0(q_i, t)$ — обобщенная силовая функция, причем функция $U_1(q_i, q_i^{\cdot}, t)$ — линейная форма скоростей $q_i^{\cdot}$, Q_i — обобщенные непотенциальные силы, δq_i — возможные (виртуальные) перемещения, удовлетворяющие условиям Четаева

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_l}{\partial q_i^{\cdot}} \delta q_i = 0 \qquad (l = 1, \ldots, r) \tag{1.3}$$

Функция L является функцией второй степени от обобщенных скоростей $L = L_2 + L_1 + L_0$, причем $L_2 = T_2$ — определенно положительная квадратичная форма, $L_1 = T_1 + U_1$ — линейная форма скоростей $q_i^{\cdot}$, $L_0 = T_0 + U_0$ не зависит от $q_i^{\cdot}$.

Если действительные перемещения системы $dq_i = q_i^{\cdot}\, dt$ находятся среди возможных перемещений δq_i, то из соотношения (1.2) следует теорема об энергии

$$\frac{d}{dt}\Big(\sum_{i=1}^{n} q_i^{\cdot} \frac{\partial L}{\partial q_i^{\cdot}} - L\Big) = \sum_{i=1}^{n} Q_i q_i^{\cdot} - \frac{\partial L}{\partial t} \tag{1.4}$$

имеющая такой же вид, как и в случае голономных систем, когда связи (1.1) отсутствуют. Если непотенциальные силы являются гироскопическими или отсутствуют, а функция Лагранжа не зависит явно от времени, т. е. при условиях

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i q_i^{\cdot} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \tag{1.5}$$

из равенства (1.4) получаем обобщенный интеграл энергии

$$\sum_{i=1}^{n} q_i^{\cdot} \frac{\partial L}{\partial q_i^{\cdot}} - L = L_2 - L_0 = T_2 - T_0 - U_0 = h = \text{const} \tag{1.6}$$

Интеграл (1.6) переходит в физический интеграл энергии

$$T - U_0 = h \tag{1.7}$$

если наложенные на систему геометрические (конечные) связи стационарны (тогда $T = T_2$, $T_1 = T_0 = 0$).

По вопросу об условиях, когда действительные перемещения неголономной системы находятся среди ее возможных перемещений, даже в учебниках встречаются неправильные утверждения. Так (см. [6], стр. 11), утверждается, что «при дифференциальных связях, так же как и при конечных, виртуальные перемещения совпадают с истинными только в том случае, если связь склерономна, т. е. если уравнение дифференциальной связи имеет вид

$$\sum_{v=1}^{n} (a_{pv}\, dx_v + b_{pv}\, dy_v + c_{pv}\, dz_v) = 0$$

причем a_{pv}, b_{pv}, c_{pv} будут функциями только координат, но не времени, входящего явно». Нетрудно, однако, видеть [4, 7], что и в случае реономных однородных связей такого вида, когда коэффициенты a_{pv}, b_{pv}, c_{pv} зависят явно от времени, действительные перемещения находятся среди возможных перемещений. Что же касается нелинейных связей вида (1.1), то независимость их от времени не обеспечивает выполнения этого свойства в общем случае. В самом деле, для того чтобы действительные перемещения $dq_i = q_i^{\cdot} dt$ находились среди возможных перемещений, удовлетворяющих условиям (1.3), необходимо и достаточно выполнение условий

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_l}{\partial q_i^{\cdot}} q_i^{\cdot} = 0 \quad (l = 1, \ldots r) \tag{1.8}$$

Эти условия выполняются для однородных по $q_i^{\cdot}$ связей, так как, согласно теореме Эйлера об однородных функциях, имеем

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_l}{\partial q_i^{\cdot}} q_i^{\cdot} = k_l f_l (q_i, q_i^{\cdot}, t)$$

независимо от того, стационарны или нет связи (1.1); k_l — степень однородности функции f_l. Напротив, для связей неоднородных условия (1.8), вообще говоря, не выполняются даже в случае независимости функций (1.1) от времени. На основании изложенного очевидно, что на неголономные системы в общем случае нельзя переносить справедливое для голономных систем утверждение, что если связи не зависят явно от времени, то действительные перемещения находятся среди возможных перемещений. Заметим, что в случае однородных связей (1.1) класс возможных скоростей включает состояния покоя $q_i^{\cdot} = 0$, в связи с чем системы, стесненные нелинейными однородными связями, можно отнести к категории катастатических систем [4].

Рассмотрим теперь обратную задачу. Допустим, что уравнения движения неголономной системы

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q_i^{\cdot}} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{l} \mu_l \frac{\partial f_l}{\partial q_i^{\cdot}} \tag{1.9}$$

где μ_l — множители Лагранжа, допускают интеграл энергии (1.6). Дифференцируя (1.6) по t в силу (1.9), найдем, что для того чтобы при условиях (1.5) соотношение (1.6) было интегралом уравнений (1.9), необходимо и достаточно выполнение тождества

$$\sum_{l,\, i} \mu_l \frac{\partial f_l}{\partial q_i^{\cdot}} q_i^{\cdot} = 0 \tag{1.10}$$

при условиях (1.1).

Для однородных связей условие (1.10) выполняется, а для неоднородных связей оно, вообще говоря, не выполняется. Так, например, если на систему наложена всего одна связь вида (1.1), то условие (1.10) при $\mu \neq 0$ приводится к одному равенству вида (1.8), не выполняющемуся в общем случае для неоднородной связи $f(q_i, q_i^{\cdot}, t) = 0$.

2. Далее будем предполагать, что на систему действуют лишь потенциальные силы, обладающие или обобщенной силовой функцией $U = U_1 + U_0$, или силовой функцией $U = U_0$, так что все непотенциальные силы $Q_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, функция Лагранжа $L = T + U$ не зависит явно от времени, а связи (1.1) являются однородными по $q_i^{\cdot}$ и не зависят явно от времени, т. е. имеют вид

$$f_l (q_i, q_i^{\cdot}) = 0 \quad (l = 1, \ldots, r) \tag{2.1}$$

При этих условиях имеет место обобщенный интеграл энергии (1.6) или интеграл энергии (1.7).

Существование интеграла (1.6) или (1.7) позволяет, как известно [1], при рассмотрении интегрального вариационного принципа наименьшего действия ограничить множество сравниваемых движений, переводящих систему из одного положения в другое, движениями, при которых энергия имеет одно и то же фиксированное значение h.

Рассмотрим действительное движение системы между некоторыми начальным P_0 и конечным P_1 положениями системы, для которого постоянная h обобщенного интеграла энергии (1.6) имеет определенное значение. Если сравнивать это движение с достаточно близкими к нему варьированными движениями системы между теми же начальным P_0 и конечным P_1 положениями, происходящими с соблюдением уравнения (1.6) с тем же значением постоянной h обобщенной энергии, что и в действительном движении, то для последнего, согласно принципу Лагранжа [8]

$$\Delta \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i^{\cdot}} q_i^{\cdot} dt = 0 \tag{2.2}$$

Здесь Δ — символ полной (асинхронной) вариации, причем предполагается, что в начальном P_0 и конечном P_1 положениях системы, проходимых в моменты времени t_0 и t_1, все

$$\Delta q_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.3}$$

Моменты времени прохождения системы через положения P_0 и P_1 не фиксируются, они зависят от кривой, по которой система движется, т. е. в общем случае $\Delta t_0 \neq 0$ и $\Delta t_1 \neq 0$. Полная и синхронная (виртуальная) вариации координат связаны соотношением

$$\Delta q_i = \delta q_i + q_i^{\cdot} \Delta t \tag{2.4}$$

применимым также к любой дифференцируемой функции координат и времени. Будем далее предполагать, что вариации Δq_i и Δt — функции от t класса C_2.

Заметим, что в силу интеграла (1.6) принцип Лагранжа (2.2) можно представить также в виде [4]

$$\Delta \int_{t_0}^{t_1} (L + h)\, dt = 0 \tag{2.5}$$

при условиях (2.3) и (1.6).

Принцип Лагранжа в виде (2.2) или (2.5) справедлив как для голономных, так и для неголономных обобщенно-консервативных или консервативных систем [1–4]. В этом можно убедиться, например, выводом из (2.2) или (2.5) уравнений (1.9) движения неголономных систем (при $Q_i = 0$). Однако для неголономных систем варьированные движения не удовлетворяют [2–4], вообще говоря, уравнениям связей (2.1), ввиду чего записи (2.2) или (2.5) носят условный смысл [4]: кривые сравнения не удовлетворяют уравнениям (2.1), тогда как действительная траектория, определяемая из (2.2) или (2.5), удовлетворяет этим уравнениям.

В связи с этим принцип Лагранжа, как и принцип Гамильтона, для неголономных систем не является в общем случае принципом стационарного действия в смысле вариационного исчисления. При определенных условиях [5], однако, принцип Гамильтона для неголономных систем может иметь в первом приближении характер принципа стационарного действия. Так как принцип Лагранжа тесно связан с принципом Гамильтона [1], то можно ожидать, что при упомянутых условиях принцип Лагранжа также будет иметь в первом приближении характер принципа стационарного действия. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим уравнения экстремалей вариационной задачи (2.2) в классе кривых, удовлетворяющих условиям (2.1) и (1.6). Эта задача на условный экстремум сводится к задаче на безусловный экстремум

$$\Delta \int_{t_0}^{t_1} F dt = 0 \tag{2.6}$$

при условиях (2.3). Здесь подынтегральная функция имеет вид

$$F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i + \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L - h \right) + \sum_{l=1}^{r} \varkappa_l f_l (q_i, \dot{q}_i) \tag{2.7}$$

где λ, $\varkappa_l$ — неопределенные множители, являющиеся некоторыми функциями времени. Нетрудно видеть [8], что справедливо равенство

$$\Delta \int_{t_0}^{t_1} F dt = \left[\left(F - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \Delta t + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} \Delta q_i \right]_{t_0}^{t_1} - \\ - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial F}{\partial q_i} \right) \delta q_i dt$$

Все вариации δq_i считаются здесь произвольными и независимыми, а Δq_i удовлетворяют условиям (2.3), вследствие чего из равенства (2.6) получаем уравнения экстремалей и условия трансверсальности на концах экстремалей

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial F}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.8}$$

$$F - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 0 \quad \text{при } t = t_0,\ t_1 \tag{2.9}$$

Так как производная по времени в силу уравнений (2.8) от левой части (2.9) равна нулю, то левая часть (2.9) равна постоянной, которая в силу равенства (2.9) должна быть равной нулю вдоль всей экстремали

$$F - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 0$$

Подставляя выражение функции (2.7) в это уравнение, получаем с учетом уравнений (1.6) и (2.1) равенство

$$-(1+\lambda)\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial q_i^{\cdot}\partial q_j^{\cdot}}q_i^{\cdot}q_j^{\cdot}=0$$

из которого находим $\lambda = -1$, так как, согласно предположению, $\|\partial^2 L / \partial q_i^{\cdot}\partial q_j^{\cdot}\| \neq 0$. Следовательно, функция (2.7) принимает вид

$$F = L + h + \sum_l \varkappa_l f_l(q_i,\ q_i^{\cdot})$$

Подставляя это выражение в уравнения (2.8), получаем уравнения экстремалей задачи (2.6)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_i^{\cdot}}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=\sum_l \varkappa_l\left(\frac{\partial f_l}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial f_l}{\partial q_i^{\cdot}}\right)-\sum_l \varkappa_l^{\cdot}\frac{\partial f_l}{\partial q_i^{\cdot}}\quad (i=1,\ldots,n) \tag{2.10}$$

Эти уравнения совпадают с уравнениями (3.2) экстремалей вариационной задачи Лагранжа для принципа Гамильтона [5]. Сравнение уравнений (2.10) с уравнениями (1.9) движения неголономной системы (при $Q_i = 0$) приводит к условию

$$\sum_{l,i}\varkappa_l\left(\frac{\partial f_l}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial f_l}{\partial q_i^{\cdot}}\right)\delta q_i=0 \tag{2.11}$$

необходимому и достаточному для того, чтобы решения уравнений (1.9), (2.1) находились среди решений уравнений (2.10), (2.1). Таким образом для движений неголономной системы, удовлетворяющих условию (2.11), принцип Лагранжа носит в первом приближении характер принципа стационарного действия.

3. Чтобы обойти трудности, связанные с асинхронной вариацией, можно, следуя Якоби [9], выбрать в качестве независимой переменной некоторый параметр λ, непрерывно и монотонно изменяющийся между постоянными значениями λ_0 и λ_1, соответствующими положениям P_0 и P_1 системы. При движении системы переменные q_i, $q_i^{\cdot}$ и t будут функциями этого параметра λ. Производные от q_i по λ будем обозначать символом q_i', так что

$$q_i^{\cdot} = q_i' d\lambda / dt$$

Уравнения связей (2.1), однородных по $q_i^{\cdot}$, представятся в виде

$$f_l(q_i,\ q_i')=0\quad (l=1,\ldots,r)$$

причем возможные перемещения δq_i (при фиксированном λ) должны в силу (1.3) удовлетворять условиям

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_l}{\partial q_i'}\delta q_i=0\quad (l=1,\ldots,r) \tag{3.1}$$

Если действительное движение системы между некоторыми начальным P_0 и конечным P_1 положениями, для которого постоянная h обобщенного интеграла энергии (1.6) имеет определенное значение, сравнивать с достаточно близкими к нему варьированными движениями между теми же положениями P_0 и P_1, происходящими с той же обобщенной энергией h, что и в действительном движении, то для последнего согласно принципу Якоби

$$\delta \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \left(\sqrt{2(h+L_0)}\sqrt{2\theta} + \Phi\right) d\lambda = 0 \tag{3.2}$$

причем

$$\delta q_i = 0 \quad \text{при} \quad \lambda = \lambda_0, \ \lambda_1 \tag{3.3}$$

Функции $\theta(q_i, q_i')$ и $\Phi(q_i, q_i')$ определяются формулами

$$\theta = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(q_s)\, q_i' q_j', \quad \Phi = \sum_{i=1}^{n} a_i(q_s)\, q_i'$$

если квадратичная L_2 и линейная L_1 формы, входящие в функцию Лагранжа L, заданы в виде

$$L_2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(q_s)\, q_i^{\boldsymbol{\cdot}} q_j^{\boldsymbol{\cdot}}, \quad L_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i(q_s)\, q_i^{\boldsymbol{\cdot}}$$

Очевидно, справедливы соотношения

$$L_2 = \theta\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2, \quad L_1 = \Phi\,\frac{d\lambda}{dt}$$

причем из интеграла (1.6) следует, что

$$\frac{d\lambda}{dt} = \sqrt{\frac{h+L_0}{\theta}} \tag{3.4}$$

Из принципа Якоби (3.2) можно получить с учетом (3.1) дифференциальные уравнения действительной траектории системы

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\sqrt{2(h+L_0)}}{\sqrt{2\theta}}\frac{\partial\theta}{\partial q_i'} + \frac{\partial\Phi}{\partial q_i'}\right) - \frac{\sqrt{2\theta}}{\sqrt{2(h+L_0)}}\frac{\partial L_0}{\partial q_i} - \tag{3.5}$$

$$- \frac{\partial\Phi}{\partial q_i} - \frac{\sqrt{2(h+L_0)}}{\sqrt{2\theta}}\frac{\partial\theta}{\partial q_i} = \sum_{l=1}^{r} \mu_l \frac{\partial f_l}{\partial q_i'} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

Видно, что заменой переменной λ на t, согласно (3.4), уравнения (3.5) с учетом (1.6) приводятся к виду уравнений движения (1.9) при $Q_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Рассмотрим теперь уравнения экстремалей вариационной задачи (3.2) в классе кривых, удовлетворяющих уравнениям связей (2.1). Эта задача на условный экстремум приводится к задаче на безусловный экстремум

$$\delta \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \Psi\, d\lambda = 0 \tag{3.6}$$

при условиях (3.3). Здесь подынтегральная функция

$$\Psi = \sqrt{2(h+L_0)}\sqrt{2\theta} + \Phi + \sum_l \varkappa_l f_l(q_i, q_i')$$

Уравнения Эйлера для задачи (3.6) имеют вид

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\sqrt{2(h+L_0)}}{\sqrt{2\theta}}\frac{\partial\theta}{\partial q_i'} + \frac{\partial\Phi}{\partial q_i'}\right) - \frac{\sqrt{2\theta}}{\sqrt{2(h+L_0)}}\frac{\partial L_0}{\partial q_i} - \frac{\partial\Phi}{\partial q_i} - \tag{3.7}$$
$$- \frac{\sqrt{2(h+L_0)}}{\sqrt{2\theta}}\frac{\partial\theta}{\partial q_i} = \sum_l \varkappa_l\left(\frac{\partial f_l}{\partial q_i} - \frac{d}{d\lambda}\frac{\partial f_l}{\partial q_i'}\right) - \sum_l \varkappa_l'\frac{\partial f_l}{\partial q_i'}$$
$$(i = 1, \ldots, n)$$

Сравнивая уравнения (3.5) и (3.7) и повторяя рассуждения (см. [5], стр. 394), приходим к выводу, что условие

$$\sum_{l,i} \varkappa_l\left(\frac{\partial f_l}{\partial q_i} - \frac{d}{d\lambda}\frac{\partial f_l}{\partial q_i'}\right)\delta q_i = 0 \tag{3.8}$$

необходимо и достаточно для нахождения некоторого решения уравнений (3.5), (2.1) среди решений уравнений (3.7), (2.1). Условие (3.8) эквивалентно, очевидно, условию (2.11).

Таким образом, для движений неголономной системы, удовлетворяющих условию (2.11), принцип Якоби имеет в первом приближении характер принципа стационарного действия.

ЛИТЕРАТУРА

2. *Гельдер О.* О принципах Гамильтона и Мопертюи. В сб.: Вариационные принципы механики. М., Физматгиз, 1952.
2. *Уиттекер Е. Т.* Аналитическая динамика. М.— Л., ОНТИ, Гостехиздат, 1937.
3. *Новоселов В. С.* Вариационные методы в механике. Изд-во ЛГУ, 1966.
4. *Парс Л.* Аналитическая динамика. М., «Наука», 1971.
5. *Румянцев В. В.* О принципе Гамильтона для неголономных систем. ПММ, 1978, т. 42, вып. 3.
6. *Бухгольц Н. Н.* Основной курс теоретической механики, ч. 2. М., «Наука», 1966.
7. *Румянцев В. В.* К теореме о кинетической энергии. Вестн. МГУ, Сер. матем., механ., 1967, № 3.
8. *Розе Н. В.* Лекции по аналитической механике, ч. 1. Изд-во ЛГУ, 1938.
9. *Якоби К.* Лекции по динамике. Л.— М., Главн. ред. общетехн. лит., ОНТИ, 1936.