

Сравнение (2.3), (2.6) с соответствующими результатами для реактора полного перемешивания показывает, что профили концентраций в нестационарных режимах могут значительно отличаться, однако средние по времени значения степени превращения совпадают с точностью до членов второго порядка по P включительно. Следовательно, нестационарные эффекты в реакторах полного перемешивания будут характерны и для систем с распределенными параметрами; в случае слабой дисперсии для количественных оценок этих эффектов могут быть использованы аналогичные формулы.

Поступила 12 VII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Horn F. J. M., Bailey J. E.* An application of the theorem of relaxed control to the problem of increasing catalyst selectivity. *J. Optimiz. Theory Appl.*, 1968, vol. 2, No. 6, p. 441.
2. *Bailey J. E., Horn F. J. M.* Catalyst selectivity under steady-state and dynamic operation. *Ber. Bunsenges. Phys. Chem.*, 1969, Bd 73, H 3.
3. *Bailey J. E., Horn F. J. M.* Catalyst selectivity under steady-state and dynamic operation: an investigation of several kinetic mechanisms. *Ber. Bunsenges. Phys. Chem.*, 1970, Bd 74, H 7.
4. *Bailey J. E., Horn F. J. M.* Cyclic operation of reaction systems: the influence of diffusion on catalyst selectivity. *Chem. Engng Sci.*, 1972, vol. 27, No. 1, p. 109—119.
5. *Ray W. H.* Periodic operation of polymerization reactors. *Industr. Engng Chem. Ser. Process Design Developm.*, 1968, vol. 7, No. 3, p. 422.
6. *Laurence R. L., Vasudevan G.* Performance of a polymerization reactor in periodic operation. *Industr. Engng. Chem. Ser. Process Design Developm.*, 1968, vol. 7, No. 3, p. 427.
7. *Douglas J. M., Rippin D. W. T.* Unsteady state process operation. *Chem. Engng Sci.*, 1966, vol. 21, No. 4, p. 305.
8. *Douglas J. M., Gaitonde N. Y.* Analytical estimates of the performance of chemical oscillators. *Industr. Engng Chem. Fundam.*, 1967, vol. 6, No. 2, p. 265.
9. *Gaitonde N. Y., Douglas J. M.* The use of positive feedback control systems to improve reactor performance. *AIChE Journal*, 1969, vol. 15, No. 6, p. 902.
10. *Dorawala T. G., Douglas J. M.* Complex reactions in oscillating reactors. *AIChE Journal*, 1971, vol. 17, No. 4, p. 974.
11. *Danckwerts P. V.* Continuous flow systems. Distribution of residence times. *Chem. Engng Sci.*, 1953, vol. 2, No. 1.
12. *Van Cauwenberghe A. R.* Further note on Danckwerts boundary conditions for flow reactors. *Chem. Engng Sci.*, 1966, vol. 21, No. 2.
13. *Найфе А. Х.* Методы возмущений. М., «Мир», 1976.
14. *Cohen D. S., Poore A. B.* Tubular chemical reactors: the «lumping approximation» and bifurcation of oscillatory states. *SIAM Journal Appl. Math.*, 1974, vol. 27, No. 3.

УДК 624.04:534.11

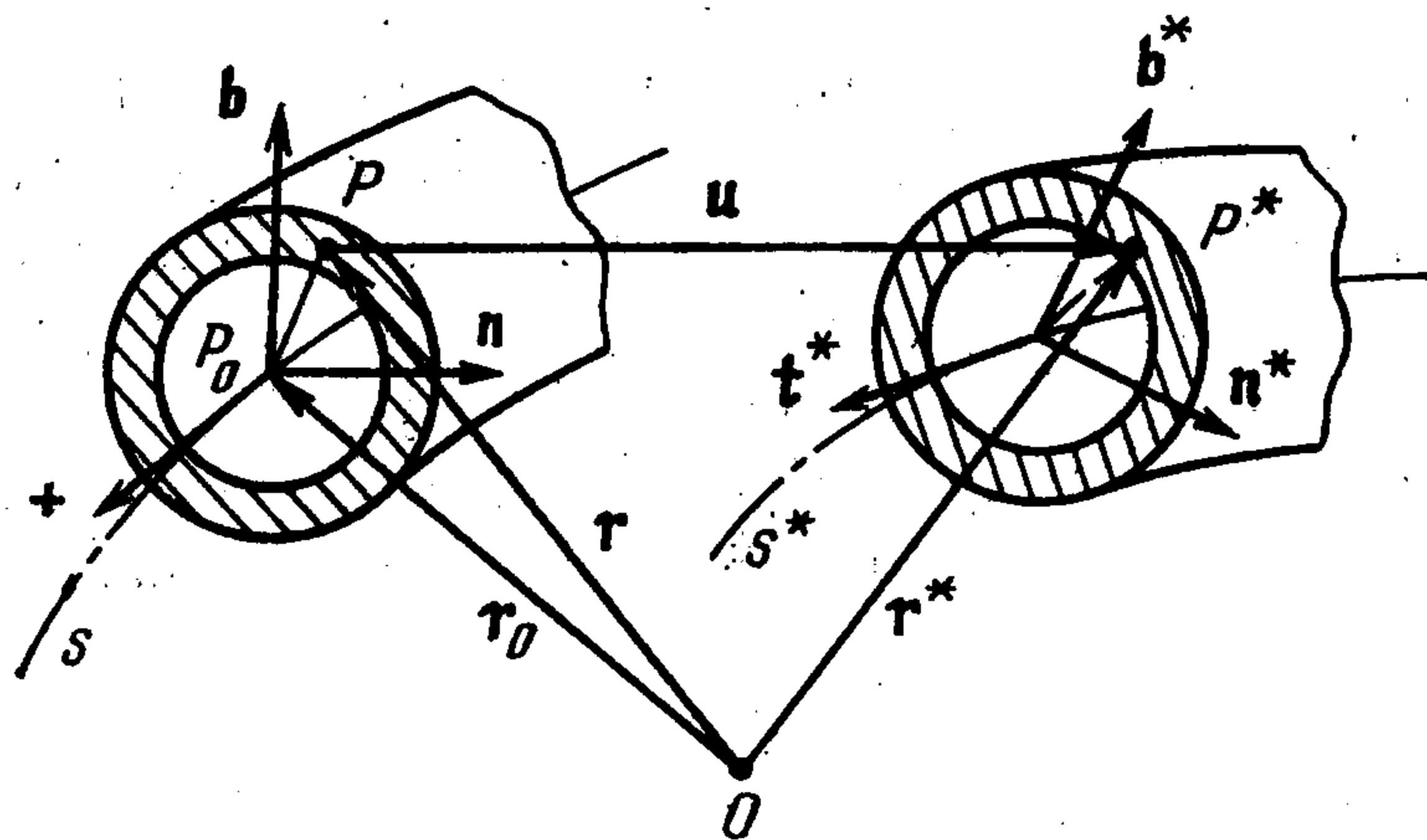
ЛИНЕЙНАЯ МЕХАНИКА СПИРАЛЬНЫХ ТРУБОПРОВОДОВ

Б. А. Гордиенко

(Куйбышев)

Получены уравнения движения для пространственно-криволинейных упругих трубопроводов, содержащих нестационарный поток вязкой несжимаемой жидкости. Учтено влияние таких факторов, как инерция вращения и деформация поперечного сдвига трубы, трение жидкости о внутреннюю поверхность трубопровода, давление в потоке (поток характеризуется параметрами, осредненными по сечению). Задача решается в линейной постановке в предположении недеформируемости контура трубопровода.

Уравнение, правильно описывающее в параболическом приближении балочные колебания упругих трубопроводов с потоком идеальной жидкости, по-видимому, впервые



получено в работе В. И. Феодосьева [1]. Анализ этого уравнения привел к заключению о существовании критической скорости потока (V_*), при превышении которой труба теряет устойчивость прямолинейной формы равновесия. Найдено выражение для V_* . Дальнейшие исследования по динамике прямых и плоскокриволинейных трубопроводов содержатся в работах [2-10] (в последнем случае, как правило, рассматривались трубы, изогнутые по дуге окружности, см., например, [5, 6] и др.). В [1-7] изучено поведение систем при заданных законах движения жидкости, в [8] — изменение параметров потока при заданном движении трубы (осевые вибрации). Взаимосвязанная задача гидроупругости — осесимметричные колебания системы «цилиндрическая оболочка — поток вязкой жидкости» — рассматривается в работах [9, 10].

Большинство из названных исследований выполнено в линейной постановке. Исключение составляет работа [2], в которой параметрические колебания трубы изучены с учетом геометрической нелинейности. Результаты соответствующих экспериментов содержатся в [11, 12].

1. Механика трубопровода. Отметим три точки трубопровода — P , P_0 и P^* , причем P_0 — проекция P на осевую линию, а P^* — положение P в деформированном состоянии трубы (фигура). Пусть r , r_0 , r^* — радиус-векторы этих точек из общего начала. Если u — вектор перемещения точки P , то очевидны следующие соотношения:

$$(1.1) \quad r^* = r + u, \quad r = r_0 + \eta n + \zeta b, \quad u = ut + vn + wb$$

Здесь t , n , b — орты естественного трехгранника, отнесенного к недеформированному состоянию осевой линии трубы ($t = dr_0 / ds$); s , η , ζ — соответствующие координаты точки P .

Дифференцируя (1.1), находим

$$dr^* = (\partial r / \partial \xi_i + e_{ij} e_j) d\xi_i = e_i^* (\eta, \zeta) d\xi_i \quad (du = e_{ij} e_j d\xi_i)$$

$$e_1^* (\eta, \zeta) = (1 + e_{11} - k\eta) t + (e_{12} - \kappa\zeta) n + (e_{13} + \kappa\eta) b$$

$$e_i^* (\eta, \zeta) = e_i^* \quad (i = 2, 3), \quad e_i^* = (\delta_i^j + e_{ij}) e_j \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$(e_1, e_2, e_3 \equiv t, n, b; \xi_1, \xi_2, \xi_3 \equiv s, \eta, \zeta)$$

$$dr^{*2} = g_{ij}^* d\xi_i d\xi_j, \quad dr^2 = g_{ij} d\xi_i d\xi_j, \quad g_{ij}^* = g_{ij} + 2e_{ij}$$

$$2e_{ij} = e_{ij} + e_{ji} + e_{is} e_{js} - (1 + \delta_i^j) a_{ij} = 2e_{ji}, \quad a_{ij} = 0 \quad (i, j \neq 1)$$

$$a_{1j} = (ke_{j1} - \kappa e_{j3}) \eta + \kappa e_{j2} \zeta = a_{j1} \quad (j = 1, 2, 3)$$

$$e_{11} = \partial u - kv, \quad e_{12} = \partial v + ku - \kappa w, \quad e_{13} = \partial w + \kappa v$$

$$e_{ij} = \partial u_j / \partial \xi_i \quad (i = 2, 3; j = 1, 2, 3; u_1, u_2, u_3 \equiv u, v, w; \partial \equiv \partial / \partial s)$$

Здесь g_{ij} , g_{ij}^* — компоненты метрического тензора; δ_i^j — символ Кронекера; k , κ — кривизна и кручение осевой линии; e_{ij} — компоненты тензора деформаций; по повторяющимся индексам, если не оговорено особо, подразумевается суммирование от единицы до трех. Квадратичные слагаемые $e_{is} e_{js}$ ниже не учитываются.

Для компонент u_j , e_{ij} , e_{ij} используются представления

$$(1.2) \quad u = u_0 - \alpha\eta + \beta\zeta, \quad v = v_0 - \varphi\zeta, \quad w = w_0 + \varphi\eta$$

$$e_{ij} = e_{ij,0} + e_{ij,1}\eta + e_{ij,2}\zeta, \quad e_{ij} = e_{ij,0} + e_{ij,1}\eta + e_{ij,2}\zeta$$

$$(1.3) \quad e_{11,0} = u' - kv, \quad e_{12,0} = v' + ku - \kappa w, \quad e_{13,0} = w' + \kappa v$$

$$e_{11,1} = -\alpha', \quad e_{12,1} = -(k\alpha + \kappa\varphi), \quad e_{13,1} = \varphi'$$

$$e_{11,2} = \beta' + k\varphi, \quad e_{12,2} = -(\varphi' - k\beta), \quad e_{13,2} = -\kappa\varphi$$

$$e_{21,0} = -\alpha, \quad e_{22,0} = 0, \quad e_{23,0} = \varphi$$

$$e_{31,0} = \beta, \quad e_{32,0} = -\varphi, \quad e_{33,0} = 0$$

$$e_{ij,k} = 0 \quad (i = 2, 3; j = 1, 2, 3; k = 1, 2)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11,0} &= e_{11,0} = \varepsilon_{11}, & 2\varepsilon_{12,0} &= e_{12,0} + e_{21,0} = 2\varepsilon_{12}, \\ 2\varepsilon_{13,0} &= e_{13,0} + e_{31,0} = 2\varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{11,1} &= e_{11,1} - ke_{11,0} + \kappa e_{13,0} = -\chi_{12}, & \varepsilon_{11,2} &= e_{11,2} - \kappa e_{12,0} = \chi_{13} \\ 2\varepsilon_{12,1} &= e_{12,1} - ke_{21,0} + \kappa e_{23,0} = 0, & 2\varepsilon_{12,2} &= e_{12,2} = -2\chi \\ 2\varepsilon_{13,1} &= e_{13,1} - ke_{31,0} = 2\chi, & 2\varepsilon_{13,2} &= e_{13,2} - \kappa e_{32,0} = 0 \\ e_{22,k} &= 0, & e_{33,k} &= 0, & e_{23,k} &= e_{32,k} = 0 \quad (k = 0, 1, 2) \end{aligned}$$

Здесь штрих означает дифференцирование по длине $d\xi_1 \equiv ds$ дуги осевой линии; индекс нуль у компонент u_0, v_0, w_0 в выражениях (1.3) опущен.

Из соотношений последней строки (1.3) видно, что теория, базирующаяся на разложениях (1.2), приводит к рассмотрению трубопровода с неизменяемым контуром находящегося в одноосном деформированном состоянии. Закон Гука для этого случая может быть записан в следующей безразмерной форме:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^\circ &= \varepsilon_{11}, & \varepsilon_{22}^\circ &= \varepsilon_{33}^\circ = \mu\varepsilon_{11} / (1 - \mu), & \varepsilon_{ij}^\circ &= 2k_0\varepsilon_{ij} \quad (i \neq j) \\ \chi_{1j}^\circ &= \chi_{1j} = m_{1j} / [\rho c^2 I_{j-1}] \quad (j = 2, 3), & \chi^\circ &= 2k_0\chi = m / [\rho c^2 I] \\ \varepsilon_{ij}^\circ &= \sigma_{ij} / [\rho c^2], & \rho c^2 &= (1 - \mu) E / [(1 + \mu)(1 - 2\mu)] \\ k_0 &= (1 - 2\mu) k^\circ / [2(1 + \mu)] \\ I_{j-1} &= \iint_F \xi_j^2 dF \quad (j = 2, 3), & I &= I_1 + I_2 \end{aligned}$$

Здесь $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^\circ$ — физические напряжения и их безразмерные аналоги; m_{1j}, m — изгибающие и крутящий моменты; I_k, I — моменты инерции сечения — осевые и при кручении; E, μ, ρ — модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность материала; c — скорость звука; k° — коэффициент распределения касательных напряжений по сечению трубы.

Выражения для кинетической (T) и потенциальной (U) энергий трубопроводов в безразмерной форме запишутся следующим образом:

$$(1.4) \quad T = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{F} \iint_F u^{\cdot 2} dF \right) ds, \quad U = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{F} \iint_F \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}^\circ dF \right) ds$$

Здесь F — площадь поперечного сечения трубы; точки означают дифференцирование по безразмерному времени $t = cT_0 / L$ (T_0 — физическое время); линейные величины отнесены к длине осевой линии L , а скорости — к скорости звука c .

2. Механика жидкости. Жидкость в данной работе считается вязкой и несжимаемой. Поток характеризуется параметрами, осредненными по сечению. Если u_0 — вектор перемещения осевых точек трубопровода, то

$$(2.1) \quad V = u_0^\cdot + Vt^*, \quad u_0^\cdot = u_j^\cdot e_j \quad (u_j^\cdot \equiv u_{j,0}), \quad t^* = (\delta_1^j + e_{1j}) e_j$$

$$T_1 = \frac{1}{2} \rho_1 F_1 \int_0^1 (u^\cdot + Vt^*)^2 ds$$

Здесь u_0^\cdot — вектор переносной скорости; V, V — скорость жидкости относительно трубы и вектор абсолютной скорости (V, V, u_0^\cdot — в единицах c); ρ_1 — плотность жидкости в единицах ρ ; F_1 — площадь внутреннего сечения трубы в единицах F .

Работа сил трения и давления на виртуальном перемещении δu_0 может быть учтена выражением

$$(2.2) \quad \delta A = \int_0^1 (P + Q) \delta u_0 ds$$

$$(2.3) \quad P = p \oint_C \frac{dS^*}{ds}, \quad Q = \tau \rho_1 F_1 V^2 t^* \quad \left(\tau = \frac{\nu}{8r} \right)$$

$$dS^* / ds = dR^* \times t^* (\eta, \zeta) = (X_j d\eta + Y_j d\zeta) e_j$$

$$\begin{aligned}
d\mathbf{R}^* &= \mathbf{n}^* d\eta + \mathbf{b}^* d\zeta = [(\delta_2^j + e_{2j}) d\eta + (\delta_3^j + e_{3j}^*) d\zeta] \mathbf{e}_j \\
\mathbf{t}^*(\eta, \zeta) &= (1 + e_{11} - k\eta) \mathbf{t} + (e_{12} - \kappa\zeta) \mathbf{n} + (e_{13} + \kappa\eta) \mathbf{b} \\
X_1 &= e_{13} + \kappa\eta + \kappa e_{23} \zeta, \quad Y_1 = -e_{12} + \kappa e_{32} \eta + \kappa\zeta \\
X_2 &= e_{23} - (k e_{23} + \kappa e_{21}) \eta, \quad Y_2 = (1 + e_{11}) - (k + \kappa e_{31}) \eta \\
X_3 &= -(1 + e_{11}) + k\eta - \kappa e_{21} \zeta, \quad Y_3 = -e_{32} + k e_{32} \eta - \kappa e_{31} \zeta
\end{aligned}$$

Здесь \mathbf{Q} , \mathbf{P} — погонные силы трения и давления; ν , r — коэффициент сопротивления в формуле Дарси — Вейсбаха и гидравлический радиус (см., например, [13]); p — давление в потоке (в единицах ρc^2); dS^* — площадь элементарной площадки трубопровода, ориентированная по направлению внешней нормали; \mathbf{R}^* — радиус-вектор точки P^* в системе \mathbf{e}_i^* ; C — контур сечения, проведенного через P^* ; $d\mathbf{R}^*$ — вектор по направлению касательной к контуру C в точке P^* . Все величины отнесены к внутренней поверхности деформированной трубы.

Используя формулу Грина и учитывая, что в линейном приближении X_j и Y_j от η , ζ зависят линейно, получим

$$(2.4) \quad \mathbf{P} = p \oint_C (X_j d\eta + Y_j d\zeta) \mathbf{e}_j = p \iint_{F_1} \left(\frac{\partial Y_j}{\partial \eta} - \frac{\partial X_j}{\partial \zeta} \right) \mathbf{e}_j d\eta d\zeta = p F_1 P_j \mathbf{e}_j$$

$$P_j = (-1)^{j-1} (k\delta_2^j + \kappa_j), \quad \kappa_1 = k\alpha, \quad \kappa_2 = \alpha' + \kappa\beta, \quad \kappa_3 = \beta' - \kappa\alpha$$

С учетом (2.3) и (2.4) выражение для виртуальной работы (2.2) принимает вид

$$(2.5) \quad \delta A = \rho_1 F_1 \int_0^1 \left[(\delta_1^j + e_{1j}) \tau V^2 + (-1)^{j-1} (k\delta_2^j + \kappa_j) \frac{p}{\rho_1} \right] \delta u_j ds$$

3. Уравнения движения. Воспользуемся принципом Гамильтона — Остроградского

$$(3.1) \quad \delta \int_{t_0}^t (T + T_1 - U) dt + \int_{t_0}^t \delta A dt = 0$$

Подставляя в (3.1) выражения (1.4), (2.1), (2.5) и интегрируя по частям, получим

$$(3.2) \quad \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \int_0^1 \left[\frac{\partial H}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial H}{\partial u'} \right) - \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial H}{\partial u'} \right) + 2A \right] \delta u ds dt +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{\partial H}{\partial u'} \delta u \right) \Big|_{t_0}^t ds + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \left(\frac{\partial H}{\partial u'} \delta u \right) \Big|_0^1 dt = 0$$

$$H = j_k^2 (u_{j,k}^2 - \varepsilon_{ij,k} \varepsilon_{ij,k}^0) + \rho_1 F_1 [u_{j,0} + (\delta_1^j + e_{1j}) V]^2, \quad u \equiv u_{j,k}$$

$$A \equiv A_{j,k} = \delta_0^k \rho_1 F_1 [(\delta_1^j + e_{1j}) \tau V^2 + (-1)^{j-1} (k\delta_2^j + \kappa_j) p / \rho_1]$$

$$j_k^2 = I_k / (FL^2) = 1 / \lambda_k^2, \quad L \equiv 1 \quad (i, j = 1, 2, 3; k = 0, 1, 2)$$

Здесь λ_k , j_k ($k = 1, 2$) — параметры гибкости и устойчивости трубы относительно осей \mathbf{b} и \mathbf{n} соответственно.

Из (3.2), ввиду произвольности вариаций $\delta u_{j,k}$, следует

$$(3.3) \quad \partial (\partial H / \partial u') / \partial t + \partial (\partial H / \partial u') / \partial s = \partial H / \partial u + 2A$$

$$(3.4) \quad [(\partial H / \partial u') \delta u]_{t_0}^t = 0, \quad [(\partial H / \partial u') \delta u]_0^1 = 0 \quad (u = u_{j,k})$$

Уравнения (3.3) (уравнения Эйлера — Остроградского) в рассматриваемом случае являются искомыми уравнениями движения для трубопровода с потоком жидкости. Выражения (3.4) определяют начальные и граничные условия задачи.

Используя полученные соотношения, представим уравнения движения в следующем виде (ниже принято $j_1 = j_2 = j$):

$$\begin{aligned}
 (3.5) \quad u'' &= \sigma (\partial \varepsilon_{11}^\circ - k \varepsilon_{12}^\circ + j^2 b_1) - (1 - \sigma) q_1 \\
 v'' &= \sigma (\partial \varepsilon_{12}^\circ + k \varepsilon_{11}^\circ - \kappa \varepsilon_{13}^\circ + j^2 b_2) - (1 - \sigma) q_2 \\
 w'' &= \sigma (\partial \varepsilon_{13}^\circ + \kappa \varepsilon_{12}^\circ + j^2 b_3) - (1 - \sigma) q_3 \\
 \alpha'' &= \partial \chi_{12}^\circ + \lambda^2 \varepsilon_{12}^\circ, \quad \beta'' = \partial \chi_{13}^\circ - \lambda^2 \varepsilon_{13}^\circ \\
 \varphi'' &= \partial \chi^\circ - k \chi_{13}^\circ / 2 \quad (\sigma = 1 / (1 + \rho_1 F_1)) \\
 b_1 &= \partial (k \chi_{12}^\circ) + k \chi_{13}^\circ, \quad b_3 = -\partial (\kappa \chi_{12}^\circ) - \kappa^2 \chi_{13}^\circ \\
 b_2 &= -\partial (\kappa \chi_{13}^\circ) + (k^2 + \kappa^2) \chi_{12}^\circ \\
 q_1 &= V_1 \dot{} - u'' + (VV_1)' - kVV_2 + (1 + e_{11}) \tau V^2 + \kappa_1 p / \rho_1 \\
 q_2 &= V_2 \dot{} - v'' + (VV_2)' + kVV_1 - \kappa VV_3 + e_{12} \tau V^2 - (k + \kappa_2) p / \rho_1 \\
 q_3 &= V_3 \dot{} - w'' + (VV_3)' + \kappa VV_2 + e_{13} \tau V^2 + \kappa_3 p / \rho_1 \\
 V_j &= u_j \dot{} + (\delta_1^j + e_{1j}) V, \quad u_j \equiv u_{j,0}, \quad e_{ij} \equiv e_{ij,0}
 \end{aligned}$$

Для замыкания системы (3.5) к уравнениям движения трубопровода необходимо присоединить соотношения, определяющие движение жидкости по трубе. В качестве таковых в рассматриваемом приближении могут быть использованы, например, следующие линеаризованные уравнения:

$$(3.6) \quad -\frac{\partial p}{\partial t} = \rho_1 c_1^2 \frac{\partial V}{\partial s}, \quad -\frac{\partial p}{\partial s} = \rho_1 \left(\frac{\partial V}{\partial t} + 2aV \right)$$

Здесь c_1 — скорость звука в потоке с учетом упругости трубопровода (в единицах c); a — параметр гидравлического сопротивления. Для ламинарного потока $2a \approx \tau V \approx \text{const}$.

При решении конкретных задач уравнения (3.5), (3.6) должны быть дополнены необходимым количеством начальных и граничных условий. Учитывая, что в построенной выше модели поток жидкости и трубопровод рассматриваются как пространственно-одномерные объекты, эти условия в общем случае можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \psi(s, 0) &= \psi_0(s), \quad \psi'(s, 0) = \psi_0'(s) \\
 \psi(0, t) &= \psi_1(t), \quad \psi(1, t) = \psi_2(t) \\
 (\psi &\equiv u, v, w, \alpha, \beta, \varphi, p, V)
 \end{aligned}$$

Здесь ψ_j ($j = 0, 1, 2$) — заданные функции указанных аргументов.

Таким образом, получены линейные уравнения движения для пространственно-криволинейных упругих трубопроводов постоянного сечения и произвольной геометрии, содержащих поток вязкой несжимаемой жидкости. Уравнения эти принадлежат к гиперболическому типу и потому могут быть использованы не только для изучения обычных классических колебаний, но и для анализа волновых процессов, связанных с нестационарным деформированием трубопроводов. Осуществленный выше подход, очевидно, допускает построение уточненных теорий.

Поступила 18 XI 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Феодосьев В. И. О колебаниях и устойчивости трубы при протекании через нее жидкости. Инж. сб., 1951, т. 10.
2. Натанзон М. С. Параметрические колебания трубопровода, возбуждаемые пульсирующим расходом жидкости. Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1962, № 4.
3. Roth V. W. Instabilität durchströmter Rohre. Ingr-Arch, 1964, Bd 33, Nr 4, S. 236—263.
4. Мовчан А. А. Об одной задаче устойчивости трубы при протекании через нее жидкости. ПММ, 1965, т. 29, вып. 4.
5. Ковревский А. П. Динамика трубопроводов, содержащих неустановившийся поток жидкости. Прикл. механ., 1970, т. 6, вып. 8.

6. *Unny T. E., Martin E. L., Dubey R. N.* Hydroelastic instability of uniformly curved pipe-fluid systems. *Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.*, 1970, vol. 37, No. 3. (Рус. перев.: Прикл. механ. Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Сер. Е., 1970, т. 37, № 3).
7. *Stein R. A., Tobriner M. W.* Vibration of pipes containing flowing fluids. *Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.*, 1970, vol. 37, No. 4. (Рус. перев.: Прикл. механ. Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Сер. Е., 1970, т. 37, № 4.)
8. *Аронович Г. В.* Движение вязкой жидкости в продольно вибрирующей трубе. *ПММ*, 1944, т. 8, вып. 1.
9. *Губенко В. С., Деркач П. Х., Кузнецов В. Н.* Нестационарное одномерное течение вязкой жидкости в деформируемой трубе. *Прикл. механ.*, 1973, т. 9, вып. 4.
10. *Губенко В. С., Кузнецов В. Н.* Осесимметричное течение вязкой жидкости внутри упругой цилиндрической трубы. *Прикл. механ.*, 1976, т. 12, вып. 8.
11. *Benjamin T. B.* Dynamics of a system of articulated pipes conveying fluid-II. *Exptl Proc. Roy. Soc. A*, 1961, vol. 261, No. 1307, p. 487—499.
12. *Gregory R. W., Paidoussis M. P.* Unstable oscillation of tubular cantilevers conveying fluid-II. *Exptl Proc. Roy. Soc. A*, 1966, vol. 293, No. 1435, p. 528—542.
13. *Чарный И. А.* Неустойчивое движение реальной жидкости в трубах. М., «Недра», 1975.

УДК 533:538

МАГНИТНЫЕ СУСПЕНЗИИ КАК МИКРОПОЛЯРНЫЕ ЖИДКОСТИ

В. М. Суязов

(Воронеж)

Поляризующиеся и намагничивающиеся сплошные среды (упругие тела, газы или жидкости) с внутренним моментом количества движения давно привлекают внимание исследователей. Одной из самых ранних работ, в которой рассматривались такие среды без учета электромагнитных явлений, является монография [1]. Кроме того, начиная с 1943 г., опубликовано много работ, в которых развиты теории сплошных сред с внутренними моментами количества движения без учета электромагнитных эффектов. Ниже речь идет только о тех работах, в которых учитываются электромагнитные эффекты¹. Уравнения, описывающие деформируемые поляризующиеся и намагничивающиеся среды в случае, когда внутренний момент количества движения и намагниченность связаны конечным соотношением, выводились в работе [2], однако здесь не будем рассматривать результаты этой работы. Общая теория построения моделей поляризующихся и намагничивающихся деформируемых сред на термодинамической основе изложена в работах [3, 4].

Гидродинамика магнитных суспензий, представляющих собой смесь ферромагнитных частиц с жидким носителем, это одна из областей механики сплошных сред, в которой важен учет внутреннего механического момента и намагниченности. Кроме того

¹ Для учета электромагнитных эффектов с точки зрения существа дела нет сравнительной специфики в теориях газа, жидкостей или твердых тел.