УДК 532.593

ОБ «УСЛОВИИ НА РЕБРЕ» В ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ДЛИННЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН

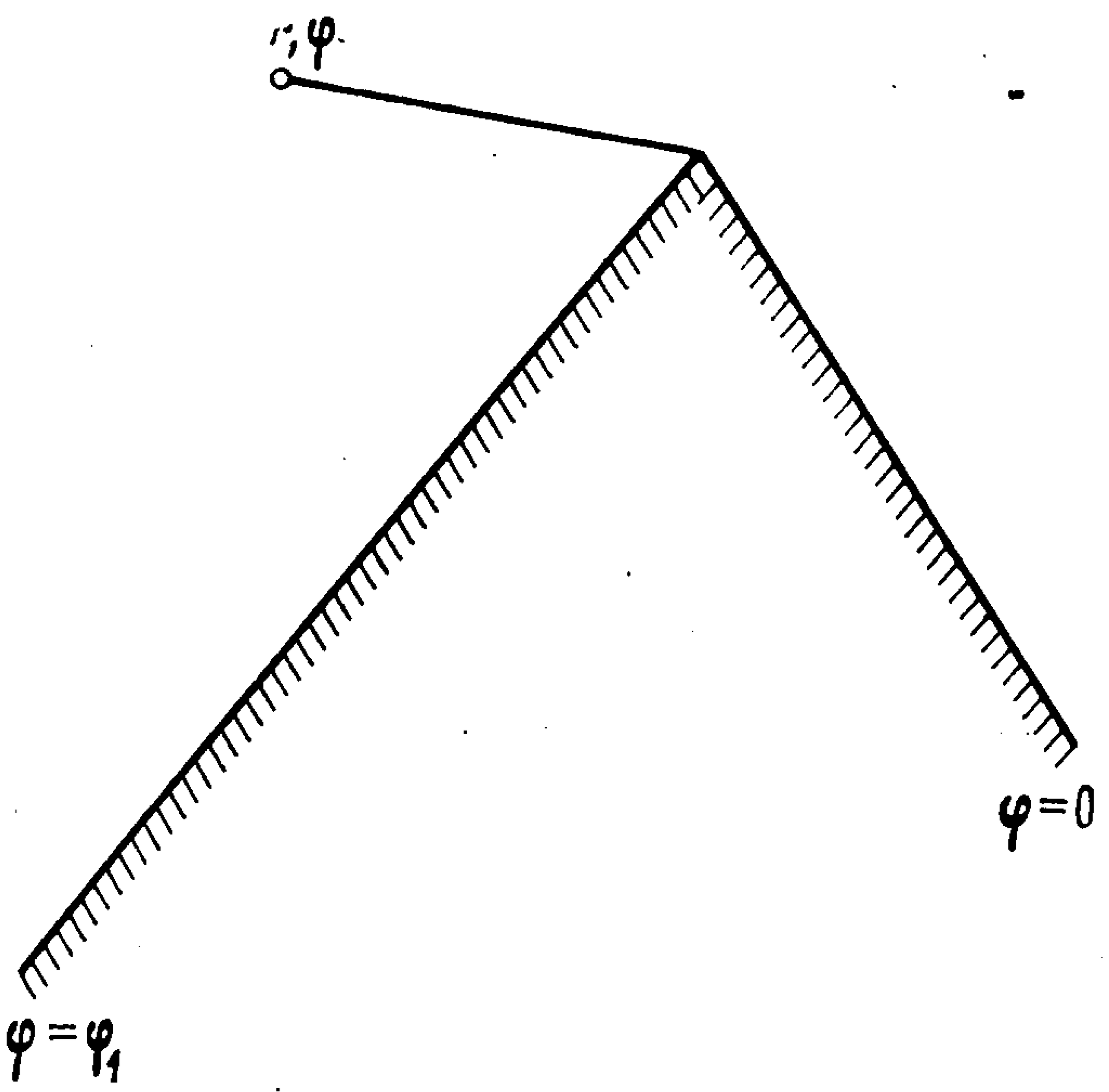
В. И. Плис

(Москва)

На основании требования конечности кинетической энергии, запасенной в произвольном конечном объеме жидкости, движущейся вблизи ребра двумерного клина, исследуется асимптотическое поведение формы поверхности идеальной жидкости в окрестности ребра.

Получена явная зависимость формы поверхности идеальной жидкости вблизи ребра двумерного клина в покоящемся и равномерно вращающемся бассейнах постоянной глубины.

Для некоторых задач теории волновых движений при наличии негладких границ (ребер), например, когда рассматриваемая область ограничена негладкой поверхностью, может быть получено несколько математически корректных решений, среди которых лишь одно верно описывает исследуемое физическое явление. В таком случае для обеспечения единственности необходимо ввести дополнительное физическое ограничение. В качестве такого ограничения предлагается принять требование конечности кинетической энергии в любом конечном объеме жидкости, движущейся вблизи ребра, и называть его условием на ребре. Это равносильно требованию



$$\int\limits_V \frac{\rho}{2} |v|^2 dV \to 0 \qquad (1)$$

при стремлении к нулю объема V в окрестности ребра. Если ребро представляет собой гладкую кривую, то в каждой точке ее можно заменить прямой и ввести локальные цилиндрические координаты на ребре. Из условия (1) можно показать, что ни одна из компонент вектора скорости v не может возрастать быстрее чем $r^{-1+\tau}$ ($\tau > 0$). Строго говоря, для однозначного выбора решения волнового уравнения достаточно найти положительную нижнюю границу величины τ. Однако во многих случаях полезно определить точное значение τ.

Покажем, как, основываясь на линейной теории длинных поверхностных волн, можно вывести условие на ребре для волн в бассейне, равномерно вращающемся с угловой скоростью σ вокруг оси z, направленной по ребру абсолютно жесткого двумерного клина с произвольным углом раствора (фигура). Допустим, что при отсутствии вращения и возмущений свободная поверхность совпадала с плоскостью $z = 0$ цилиндрической системы координат r, φ, z. Компоненты скорости v_r, v_φ и v_z вместе с их производными по r, φ, z принимаются малыми величинами, а зависимость давления определяется гидростатическим соотношением

$$p = \rho g (\zeta - z) \qquad (2)$$

где ρ — плотность жидкости, g — ускорение свободного падения, ζ — возвышение поверхности жидкости.

При таких предположениях частное решение уравнений Навье — Стокса известно [1, 2]

$$v_r = v_\varphi = v_z = 0, \quad \zeta = \frac{\sigma^2}{2g} r^2 + K(t) \qquad (3)$$

Для дальнейшего анализа введем новую неизвестную ζ_1 так, что

(4) $$\zeta_1 = \zeta - \left(\frac{\sigma^2}{2g} r^2 + K(t)\right)$$

Подстановка (2) и (4) в уравнения Навье — Стокса и уравнение неразрывности приводит к системе трех уравнений для трех неизвестных функций v_r, v_φ и ζ_1

(5) $$\frac{\partial v_r}{\partial t} = -\frac{\partial \zeta_1}{\partial r} + 2\sigma v_\varphi$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} = -\frac{1}{r}\frac{\partial \zeta_1}{\partial r} - 2\sigma v_r$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{h}\frac{\partial \zeta_1}{\partial t} = 0$$

Глубину бассейна h считаем постоянной, зависимость неизвестных от времени принимаем в виде $\exp i\omega t$.

Потребовав, чтобы кинетическая энергия в любом конечном объеме жидкости, движущейся вблизи ребра клина, была конечна, получаем, что v_r и v_φ вблизи ребра изменяются как $r^{-1+\tau}$ $(\tau > 0)$ и могут быть представлены при $r \to 0$ в виде степенных разложений

(6) $$v_r = r^{-1+\tau}(a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \ldots)$$

$$v_\varphi = r^{-1+\tau}(b_0 + b_1 r + b_2 r^2 + \ldots)$$

Сходным образом зададим и свободную поверхность

(7) $$\zeta_1 = r^\tau (c_0 + c_1 r + c_2 r^2 + \ldots)$$

Подставим эти разложения в уравнения (5) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях r, получим систему для неизвестных функций нулевого приближения

$$i\omega a_0 = -\tau c_0 + 2\sigma b_0, \quad i\omega b_0 = -\frac{\partial c_0}{\partial \varphi} - 2\sigma a_0, \quad \tau a_0 + \frac{\partial b_0}{\partial \varphi} = 0$$

Отсюда находим уравнение, определяющее $b_0(\varphi)$

$$d^2 b_0 / d\varphi^2 + \tau^2 b_0 = 0$$

Решение этого уравнения $b_0 = A \sin(\tau\varphi) + B\cos(\tau\varphi)$ определяет скорость v_φ, нормальную к стенкам клина и равную на них нулю. Это дает $B = 0$, $A \sin \tau\varphi_1 = 0$. Нетривиальное решение задачи существует при

(8) $$\sin \tau\varphi_1 = 0$$

Верхняя граница порядка сингулярности степенных разложений (6), (7) определяется наименьшим положительным корнем уравнения (8)

(9) $$\tau = \pi / \varphi_1$$

Например, в окрестности ребра полуплоскости, поставленной на дно бассейна, возвышение поверхности ζ_1 ведет себя как $r^{1/2}$ (в этом случае $\varphi_1 = 2\pi$).

По приведенной схеме можно вычислить порядок сингулярности в случае, когда бассейн покоится. Приравняв нулю кориолисову и центробежную силы, получим выражение для τ, в точности совпадающее с уже известным (9).

В заключение следует указать, что простой вид выражения для τ определяется характером принятых допущений. Одно из них — бесконечная кривизна ребра клина. Принятие такого предположения означает существенное упрощение реального очертания береговой линии, вместе с тем условие на ребре в виде (9) позволяет получить удовлетворительные результаты в некоторых модельных задачах распространения волн в геофизических бассейнах, как это сделано, например, в работах [3,4].

Для более точных расчетов необходимо вывести условие на ребре, учитывающее влияние конечной кривизны ребра, длины волны и, возможно, других параметров.

Поступила 25 IV 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Стокер Дж. Дж.* Волны на воде. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
2. *Сретенский Л. Н.* Теория волновых движений жидкости. М.— Л., ОНТИ, Гостехиздат, 1936.
3. *Габов С. А.* Применение метода Л. Н. Сретенского к одной задаче теории волн в каналах. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1975, т. 15, № 1.
4. *Плис А. И., Плис В. И.* Дифракция волны Кельвина на открытом конце плоского канала во вращающемся бассейне. VII Всес. симпозиум по дифракции и распространению волн, Ростов-на-Дону, 1977, М., 1977.

УДК 532.72

О НЕСТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМАХ РАБОТЫ ИЗОТЕРМИЧЕСКОГО РЕАКТОРА С ПРОДОЛЬНЫМ ПЕРЕМЕШИВАНИЕМ

В. А. Новиков

(Москва)

Методами теории возмущений исследуется нестационарный режим работы изотермического реактора с продольной дисперсией. Получено приближенное выражение для эффективности реактора, работающего в динамическом режиме. Результаты сопоставляются с соответствующими данными для реактора идеального перемешивания.

Математический анализ особенностей работы проточного химического реактора идеального перемешивания в нестационарном режиме проводился во многих работах, например [1–10]. Показано, что использование нестационарных режимов может приводить к увеличению эффективности химического реактора как в случае простой одностадийной химической реакции с нелинейной кинетикой [7–9], так и в реакторах со сложными многостадийными химическими превращениями [1–6, 10]. Отмечено существенное влияние нестационарности на селективность и другие характеристики химического процесса [1–6].

1. Постановка задачи. Рассмотрим одномерную модель трубчатого изотермического реактора, в котором протекает одна необратимая химическая реакция. Нестационарное уравнение для концентрации в безразмерных переменных имеет вид

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{1}{P}\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \frac{\partial c}{\partial x} - f(c) \tag{1.1}$$

$$c = \frac{C}{C_0}, \quad x = \frac{X}{L}, \quad t = \frac{TU}{L}, \quad P = \frac{UL}{D}, \quad f(c) = \frac{UF(C)}{LC_0}$$

Здесь X — пространственная координата ($0 \leqslant X \leqslant L$); L — длина реактора; T — время; C — концентрация реагирующего вещества; C_0 — стационарная концентрация реагирующего вещества во входном потоке; U — скорость подачи реагента; D — коэффициент диффузии; $F(C)$ — зависимость скорости химической реакции от концентрации реагента.

Примем, что концентрация реагирующего вещества на входе в реактор может быть представлена в виде суммы постоянного слагаемого C_0 и нестационарного возмущения $\Phi(t)\, C_0$. Тогда в безразмерном виде граничные условия на входе в реактор для уравнения (1.1), справедливые и в нестационарном случае, имеют вид [11,12].

$$x = 0, \quad c - \frac{1}{P}\frac{\partial c}{\partial x} = 1 + \Phi(t); \quad x = 1, \quad \frac{\partial c}{\partial x} = 0 \tag{1.2}$$

В качестве начального условия зададим распределение концентрации, соответствующее устойчивому стационарному решению задачи (1.1), (1.2) при $\Phi(t) \equiv 0$

$$t = 0, \quad c(x, 0) = c_s(x) \tag{1.3}$$