

Следовательно, основные уравнения системы (1.10) будут иметь вид первого соотношения (1.16).

Для системы (1.13) доказательство аналогично.

Поступила 16 X 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Маневич Л. И., Воробьева Н. И. О приближенных уравнениях осесимметричной задачи теории упругости для трансверсально-изотропного основания. Прикл. механ., 1972, т. 8, вып. 10.
2. Корнев Б. Г. Введение в теорию бесселевых функций. М., «Наука», 1971.
3. Эрдейи А. Асимптотические разложения. М., Физматгиз, 1962.
4. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М., «Наука», 1974.
5. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1953.

УДК 532.517.4

ПЛОСКИЙ ДАЛЬНИЙ ТУРБУЛЕНТНЫЙ СЛЕД В СВЕТЕ ОБОБЩЕННОЙ ТЕОРИИ КАРМАНА

В. В. Новожилов

(Ленинград)

Формула для рейнольдсовых касательных напряжений, предложенная для плоских пристенных турбулентных течений [1, 2]

$$(0.1) \quad \tau^V = \mu \kappa_n T^{Vn} \frac{\partial u^V}{\partial y^V}, \quad T^V = \left| \frac{\partial u^V}{\partial y^V} \right|^3 \left[\nu \left| \frac{\partial^2 u^V}{\partial y^{V2}} \right|^2 \right]^{-1}$$

распространяется на задачу о плоском турбулентном следе в области его автомодельности (без изменения экспериментальных постоянных n и κ_n). Показано, что при этом получаются результаты, близкие к теории Шлихтинга. Тем самым установлена взаимосвязь между эмпирической константой в последней теории и константами пристенной турбулентности. В частности, это позволило вычислить, основываясь только на опытах с турбулентными следами, входящую в универсальный логарифмический закон константу κ . Оказалось, что рекомендованному Шлихтингом значению $\beta = 0.18$ соответствует $\kappa = 0.42$, только на 5% отличающееся от общепринятого значения, определенного на основании опытов Никурадзе.

При $n = 1$, $\kappa_n = 0.16$ (0.1) превращается в известную формулу Кармана. Последняя в задачах свободной турбулентности до сих пор не использовалась ввиду наличия у профилей скорости струй и следов точек перегиба (в этих точках $\partial^2 u / \partial y^2 = 0$ и, согласно (0.1), $|\tau| \rightarrow \infty$, что абсурдно). Тем не менее применение (0.1) к струям и следам оказывается возможным, если допустить, что в точке перегиба профиля скорости производная $\partial^2 u / \partial y^2$ в нуль не обращается, а проходит через нее с конечным разрывом вида $\pm a$. Из дальнейшего выяснится, что такое допущение приводит к результатам, достаточно близким к экспериментальным данным (при сохранении тех же значений постоянных n и κ_n , какие были рекомендованы [1, 2] для задач пристенной турбулентности).

1. Примем толщину потери импульса b_{**} за характерный размер и перейдем к безразмерным переменным (галочками обозначены соответствующие размерные величины)

$$x = \frac{x^V}{b_{**}} \frac{1}{R_{**}^{1-n}}, \quad R_{**} = \frac{U_\infty b_{**}}{\nu}$$

$$y = \frac{y^V}{b_{**}}, \quad b = \frac{b^V}{b_{**}}$$

$$u = \frac{U_\infty - u^V}{U_\infty}, \quad v = \frac{v^V}{U_\infty} R_{**}^{1-n}$$

Здесь $2b^V(x^V)$ — толщина следа; согласно рассматриваемой теории она, как и по первой теории Прандтля, конечна.

Придерживаясь обычных упрощений (см. [3], стр. 659) и пользуясь формулой (0.1), сведем задачу о плоском дальнем турбулентном следе к следующей:

$$(1.1) \quad \kappa_n \frac{\partial}{\partial y} \left(T^n \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial u}{\partial x}, \quad T = \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^3 \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|^{-2}$$

$$\tau = 0; \quad y = 0; \quad u = 0, \quad y = b$$

$$(\tau = \kappa_n T^n \partial u / \partial y)$$

$$\int_0^b u \, dy = 1$$

К приведенным формулам надо добавить уравнение сплошности

$$\partial u / \partial x - \partial v / \partial y = 0,$$

необходимое для определения скорости v .

Будем искать решение рассматриваемой задачи в автомодельной форме

$$(1.2) \quad \psi = x^\alpha F(\eta), \quad \eta = y / x^\beta \quad (u = \partial \psi / \partial y, \quad v = \partial \psi / \partial x)$$

где ψ — безразмерная функция тока, α и β — постоянные, определяющиеся в процессе решения из условия его автомодельности.

Подставив (1.2) в (1.1), находим

$$(1.3) \quad \alpha = 0, \quad \beta = 1/2$$

При этом (1.1) превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение (далее штрих означает производную по η)

$$(1.4) \quad \kappa_n (t^n F'')' = -1/2 (F' + \eta F''), \quad t = |F''|^3 |F'''|^{-2}$$

которое может быть один раз проинтегрировано, после чего принимает следующий вид:

$$(1.5) \quad \kappa_n t^n F'' = -1/2 \eta F'$$

(здесь уже учтено, что $\tau = 0$ при $\eta = 0$). Граничные условия для него

$$(1.6) \quad F = 0, \quad \eta = 0$$

$$F = 1, \quad F' = 0, \quad \eta = \eta_0$$

где η_0 — коэффициент в уравнении границы следа

$$(1.7) \quad b = \eta_0 x^{1/2}$$

Условие $F = 1$ при $\eta = \eta_0$ возникает из интегрального условия (1.1) при подстановке в него u и y согласно (1.2), (1.3).

2. Хотя количество граничных условий (1.6) и равно порядку дифференциального уравнения (1.5), тем не менее задача все еще недоопределена, поскольку неизвестен параметр η_0 . Необходимость в дополнительном условии возникает ввиду того, что при использовании формулы (0.1) порядок дифференциального уравнения оказывается на единицу больше, чем при традиционных подходах к задачам свободной турбулентности. В задачах пристенной турбулентности таким дополнительным условием является предложенное Карманом $\partial u / \partial y \rightarrow \infty$ на стенке, которое использовалось в [1, 2].

При расчете турбулентных струй и следов в качестве дополнительного условия принимается естественное предположение, что точка перегиба на профиле скорости в следе совпадает с положением максимума касательного напряжения. Это условие на основании уравнения (1.4) записывается в виде равенства

$$(2.1) \quad F' = -\eta F'', \quad \eta = \eta_1 \quad (b_1 = b_1^V / b_{**} = \eta_1 x^{1/2})$$

где $y^V = b_1^V(x^V)$ — координата точки перегиба.

В условие (2.1) входит неизвестный параметр η_1 . На основании имеющихся экспериментальных данных о профилях плоских турбулентных следов и свободных струй

примем, что точка перегиба профиля скорости находится на расстоянии $0.4b^V$ от его оси. Этому предположению соответствует равенство

$$(2.2) \quad \eta_1 = 0.4\eta_0$$

При добавлении к сформулированным ранее граничным условиям (1.6) равенств (2.1), (2.2) задача становится вполне определенной.

3. Как уже было сказано, решение рассматриваемой задачи надо искать в классе функций $F(\eta)$ с конечным разрывом вида $\pm a$ производной F''' в точке $\eta = \eta_1$ (что соответствует конечному разрыву производной $\partial^2 u / \partial y^2$ в точке перегиба профиля скорости). Отсюда

$$(3.1) \quad F(\eta) = \begin{cases} F_1(\eta), & 0 \leq \eta \leq \eta_1 \\ F_2(\eta), & \eta_1 \leq \eta \leq \eta_0 \end{cases}$$

где $F_1(\eta)$, $F_2(\eta)$ — аналитические функции, подчиняющиеся вытекающим из (1.5), (1.6) дифференциальным уравнениям с граничными условиями

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \kappa_n t_1^n F_1'' &= -1/2 \eta F_1', & 0 \leq \eta \leq \eta_1 \\ \kappa_n t_2^n F_2'' &= -1/2 \eta F_2', & \eta_1 \leq \eta \leq \eta_0 \end{aligned}$$

$$(3.3) \quad F_1 = 0, \quad \eta = 0; \quad F_2 = 1, \quad F_2' = 0, \quad \eta = \eta_0$$

и требованию «сшивания»

$$(3.4) \quad F_1 = F_2, \quad F_1' = F_2', \quad F_1'' = F_2'', \quad F_1''' = -F_2''', \quad \eta = \eta_1$$

Положение точки сшивания определяется равенствами (2.1) и (2.2).

При интегрировании уравнений (3.2) на ЭЦВМ полезно иметь в виду следующие свойства их решений:

$$\begin{aligned} F_1 &\geq 0, & F_1' &> 0, & F_1'' &< 0, & F_1''' &< 0 \\ F_2 &> 0, & F_2' &> 0, & F_2'' &< 0, & F_2''' &> 0 \end{aligned}$$

Отметим, что F_1'' при $\eta = 0$ и F_2'' при $\eta = \eta_0$ нулю не равны, т. е. профиль скорости в следе по рассматриваемой теории имеет заострения как на оси течения, так и на его свободных границах. В этом отношении предлагаемая теория похожа на первую теорию Прандтля. Граничные же $\tau = 0$ при $\eta = 0$ и $\eta = \eta_0$ выполняются за счет того, что F_1''' и F_2''' в указанных выше точках стремятся к $\mp \infty$ (соответственно) по следующим асимптотическим законам:

$$F_1''' \div -\frac{1}{\eta^{1/2n}}, \quad F_2''' \div \frac{1}{(\eta_0 - \eta)^{1/2n}}$$

где \div — знак пропорциональности.

4. Сформулированная задача была решена на ЭЦВМ в двух вариантах

$$n = 2/3, \quad \kappa_n = 0.55$$

$$n = 4/5, \quad \kappa_n = 0.59$$

которые были рекомендованы [1,2] на основании проведенных Никурадзе и др. авторами экспериментальных исследований турбулентного течения в трубах. Расчеты показали, что значения $F(\eta)$ и ее трех первых производных для обоих вариантов с точностью до первых двух значащих цифр совпадают, что позволило свести оба эти расчета в одну табл. 1.

5. Задача о дальнем турбулентном следе была решена (на основании первой теории Прандтля) Шлихтингом (см. [3], стр. 659). Из этого решения следуют формулы

$$(5.1) \quad \begin{aligned} u_m &= \frac{U_\infty - u_m^V}{U_\infty} = \frac{1.90}{\bar{x}^{1/2}} \\ \frac{\tau_M^V}{\rho u_m^V} &= 0.065, \quad b = 1.14 \bar{x}^{1/2} \\ \bar{x} &= x R_{**}^{1-n} = \frac{x^V}{b_{**}} \frac{4x^V}{c_w d} \end{aligned}$$

Таблица 1

| η | F | F' | F'' | F''' | t |
|--------|------|-------|-------|------------|------|
| 0.00 | 0.00 | 0.79 | -0.16 | -1000 | 0.00 |
| 0.10 | 0.08 | 0.77 | -0.23 | -0.27 | 0.17 |
| 0.20 | 0.15 | 0.74 | -0.25 | -0.20 | 0.39 |
| 0.40 | 0.30 | 0.69 | -0.29 | -0.17 | 0.81 |
| 0.60 | 0.43 | 0.63 | -0.32 | -0.17 | 1.10 |
| 0.80 | 0.55 | 0.56 | -0.36 | -0.20 | 1.21 |
| 1.00 | 0.65 | 0.48 | -0.40 | -0.24 | 1.15 |
| 1.075 | 0.69 | 0.45 | -0.42 | ± 0.26 | 1.08 |
| 1.20 | 0.74 | 0.40 | -0.34 | $+0.22$ | 1.19 |
| 1.4 | 0.81 | 0.33 | -0.35 | 0.18 | 1.30 |
| 1.60 | 0.87 | 0.26 | -0.32 | 0.16 | 1.31 |
| 2.00 | 0.95 | 0.15 | -0.26 | 0.13 | 1.03 |
| 2.40 | 0.99 | 0.05 | -0.21 | 0.15 | 0.41 |
| 2.69 | 1.00 | 0.000 | -0.13 | 2.95 | 0.00 |

Здесь $U_\infty - u_m^V$ — значение дефекта скорости на оси следа, τ_M^V — максимальное значение касательного рейнولدсова напряжения.

Согласно же предлагаемому новому решению, аналогичные формулы имеют вид

$$(5.2) \quad u = \frac{F'(0)}{x^{1/2}} = \frac{0.79 R_{**}^{(1-n)/2}}{\bar{x}^{1/2}}$$

$$\frac{\tau_M^V}{\rho u_m^V} = \frac{1}{2} \frac{\eta_1 F'(\eta_1)}{[F'(0)]^2 R_{**}^{1-n}} = \frac{0.388}{R_{**}^{1-n}}$$

$$b = \eta_0 x^{1/2} = 2.69 R_{**}^{-(1-n)/2} \bar{x}^{1/2}$$

Числовые коэффициенты в (5.2) следуют из табл. 1.

Если подставить в (5.2) $n = 2/3$, $R_{**} = 194$ или $n = 4/5$, $R_{**} = 6475$, то получим одни и те же результаты, а именно

$$(5.3) \quad u_m = \frac{1.90}{\bar{x}^{1/2}}, \quad \frac{\tau_m^V}{\rho u_m^V} = 0.067, \quad b = 1.12 \bar{x}^{1/2}$$

Эти формулы практически совпадают с решением Шлихтинга (5.1). Из экспериментальных данных о гидродинамическом сопротивлении круговых цилиндров в области чисел Рейнольдса $Re = U_\infty d / \nu = 10^4 \div 10^5$ следует, что $Re = (4 \div 5) R_{**}$.

Тем самым значению $R_{**} = 194$ соответствует примерно $Re = 1000$, а $R_{**} = 6475$ — значение $Re = 3 \cdot 10^4$.

Из всего изложенного (с учетом того, что теория Шлихтинга согласована с опытами путем выбора входящего в нее параметра $\beta = 0.18$) можно сделать вывод, что предлагаемая теория в своем варианте $n = 4/5$ должна быть близка к экспериментальным данным при числах Рейнольдса $Re = 10^4 \div 10^5$. Однако, совпадая с теорией Шлихтинга при $Re = 3 \cdot 10^4$, рассматриваемая теория должна давать несколько иные результаты при других числах Рейнольдса, предсказывая уменьшение толщины следа и увеличение u_m (по сравнению с формулами (5.1)) пропорционально $Re^{0.1}$.

6. Для пристенных течений вариант Кармана $n = 1$ (в рамках излагаемой теории, основывающейся на пренебрежении толщиной вязкого подслоя) исключался, так как не позволял удовлетворить в этом случае условию $u = 0$ на стенке. Но для свободных турбулентных течений значение $n = 1$ оказывается допустимым. Уравнения (3.2) были проинтегрированы на ЭЦВМ и для этого варианта, причем постоянная κ_n (которую Карман на основании опытов Никурадзе с трубами полагал равной 0.16) не задавалась

заранее, а определялась в процессе решения, исходя из требования, чтобы

$$(6.1) \quad \eta_0 = 2\sqrt{10} \beta = 1.14 \quad (\beta = 0.18)$$

Последнее равенство обеспечивает выполнение требования, чтобы ширина следа (при расчете его по варианту Кармана, $n = 1$) определялась той же формулой, как и при расчете по методу Шлихтинга, т. е. предпоследней из формул (5.1). В результате решения уравнений (3.2) при $n = 1$ было установлено, что все условия (3.3), (3.4), (2.1), (2.2) и, сверх того, условие (6.1) выполняются, если принять $\kappa_n = \kappa^2 = 0.176$. Отсюда $\kappa = 0.42$.

Таблица 2

| η | F | F' | F'' | F''' |
|--------|-------|---------------|--------|--------|
| 0.00 | 0.000 | 1.900 (1.900) | -1.000 | -1000 |
| 0.10 | 0.186 | 1.774 (1.802) | -1.404 | -2.777 |
| 0.20 | 0.356 | 1.620 (1.632) | -1.686 | -2.964 |
| 0.30 | 0.509 | 1.435 (1.422) | -2.013 | -3.665 |
| 0.40 | 0.642 | 1.214 (1.190) | -2.443 | -5.080 |
| 0.456 | 0.706 | 1.068 | -2.763 | -6.492 |
| 0.50 | 0.750 | 0.953 (0.958) | -2.503 | +5.387 |
| 0.60 | 0.834 | 0.726 (0.724) | -2.052 | +3.785 |
| 0.70 | 0.896 | 0.538 (0.512) | -1.723 | +2.869 |
| 0.80 | 0.942 | 0.379 (0.322) | -1.466 | +2.314 |
| 0.90 | 0.973 | 0.244 (0.170) | -1.252 | +1.986 |
| 1.00 | 0.992 | 0.128 (0.060) | -1.061 | +1.866 |
| 1.10 | 0.999 | 0.031 | -0.862 | +2.364 |
| 1.14 | 1.000 | 0.000 | -0.713 | +12.26 |

Следует обратить особое внимание на этот результат. В самом деле, из него следует, что входящая в универсальный логарифмический закон эмпирическая постоянная κ , получавшаяся до сих пор на основании опытов с течением в трубах или в пограничных слоях, может быть определена (и притом с погрешностью всего 5%) на основании измерений ширины турбулентных следов, к которым, казалось бы, она никакого отношения не имеет. Теперь очевидно, что постоянные β и κ взаимосвязаны, что зная одну, можно вычислить другую. Это, а также результаты, которые были получены в п. 5 для значений $n \neq 1$, говорит об универсальности соотношений (0.1), позволяющих охватить как задачи пристенной турбулентности, так и задачи свободной турбулентности при сохранении одних и тех же эмпирических постоянных для обоих классов задач. В табл. 2 содержатся значения функции $F(\eta)$ и ее трех первых производных, полученные из уравнений (3.2) при $n = 1$, $\kappa_n = 0.176$. В столбце для $F'(\eta)$ в скобках приводятся значения этой величины, соответствующие решению Шлихтинга

$$(6.2) \quad u = 1.90 \left[1 - \left(\frac{y}{1.14} \right)^{3/2} \right]^2 \bar{x}^{-1/2} \approx F'(\eta) \bar{x}^{-1/2}$$

На фиг. 1 профиль дефекта скорости в турбулентном следе, соответствующий варианту Кармана (сплошная линия), сопоставлен с профилем скорости (6.2) (точки) фиг. 1, а также и непосредственно из табл. 2 видно, что эти профили практически совпадают почти по всей ширине следа. К аналогичному выводу приводит и сравнение профиля Шлихтинга (6.2) с профилем скорости из табл. 1 при $n = 2/3$ и $\kappa_n = 4/5$.

7. Представляет интерес сопоставить предлагаемую теорию с общепринятыми методами расчета турбулентных следов и в части закона изменения турбулентной вязкости ν_τ поперек следа.

Согласно первой теории Прандтля [3]

$$(7.1) \quad \frac{\nu_\tau}{U_\infty b^{**}} = 0.216 \left(\frac{y^V}{b} \right)^{1/2} \left[1 - \left(\frac{y^V}{b} \right)^{3/2} \right]$$

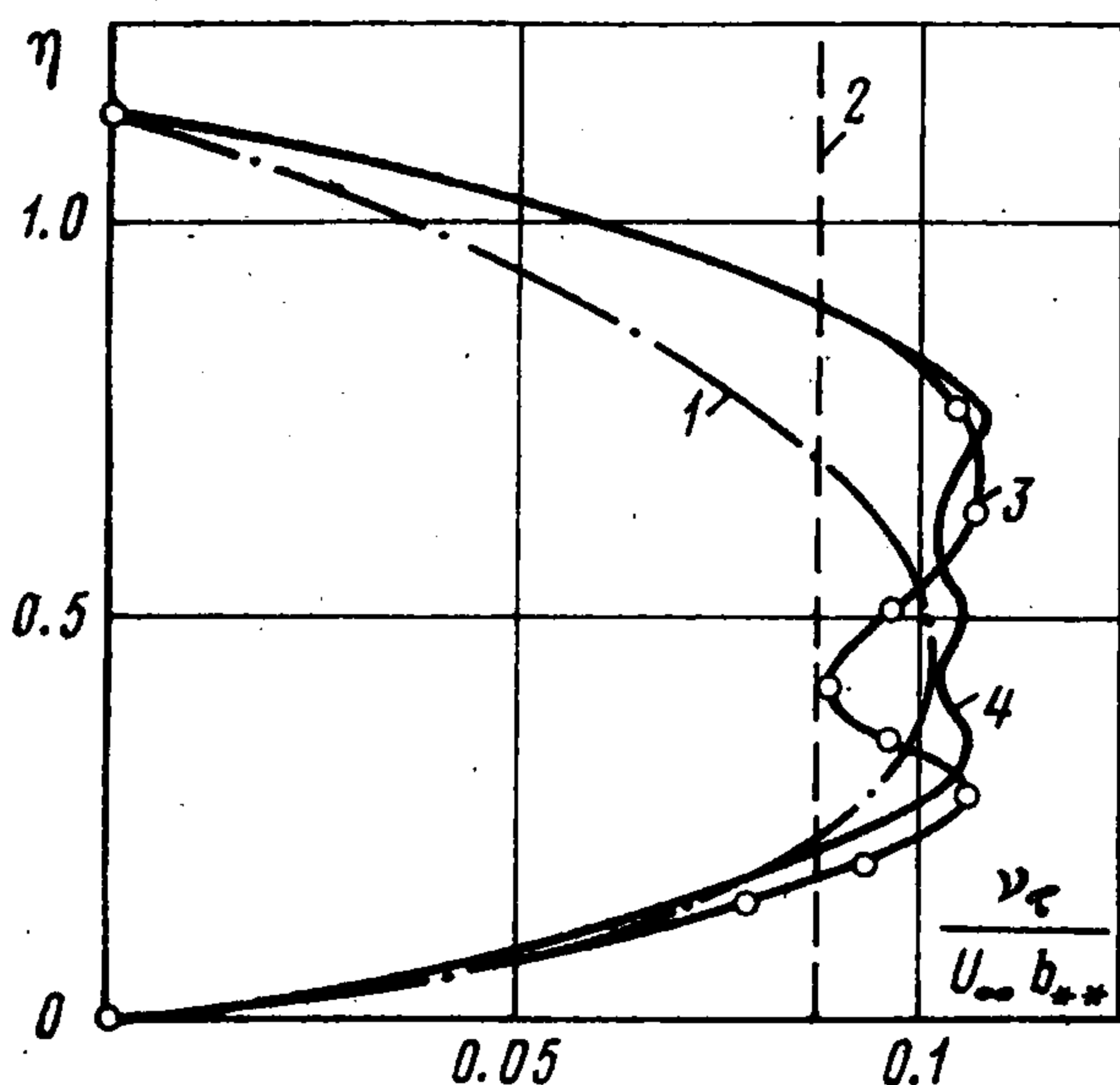
а согласно второй теории Прандтля [3]

$$(7.2) \quad v_\tau / U_\infty b_{**} = 0.0888$$

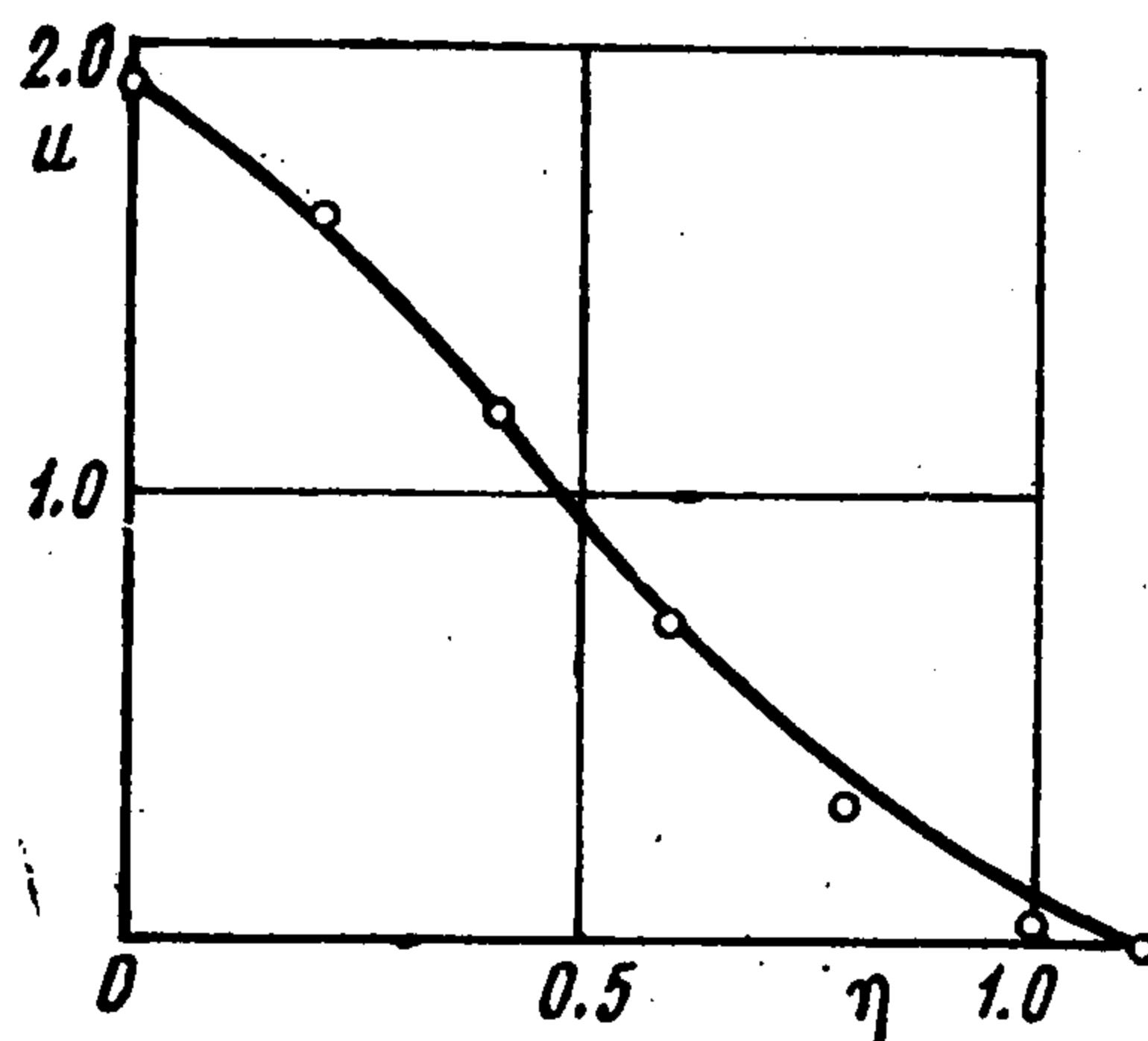
Предлагаемая теория дает

$$(7.3) \quad \frac{v_\tau}{U_\infty b_{**}} = \frac{1}{R_{**}^{1-n}} \kappa_n t^n$$

На фиг. 2 приведены четыре кривые, построенные по формулам (7.1), (кривая 1), (7.2) (кривая 2) и (7.3) при $R_{**} = 6475$, причем последняя формула представлена двумя вариантами: $n = 1, \kappa_n = 0.176$ (кривая 3) и $n = 4/5, \kappa_n = 0.59$ (кривая 4).



Фиг. 1



Фиг. 2

Принятое в последнем варианте значение $R_{**} = 6475$ соответствует (как это было ранее установлено) совпадению ширины следа, τ_M^V и u_m^V при расчете по данному варианту с расчетом по Шлихтингу.

Из фиг. 2 следует, что предлагаемая теория в обоих ее вариантах занимает (по характеру изменения v_τ поперек следа) промежуточное положение между первой и второй теориями Прандтля, а именно, в интервале $0.2 < \eta < 0.8$ она дает значения $v_\tau / (U_\infty b_{**})$, близкие к постоянной величине 0.11 и этим похожа на (7.2). Однако на концах интервала $0 \leq \eta \leq \eta_0$, согласно предлагаемой теории, $v_\tau = 0$, как и в (7.1). По-видимому, истина лежит между результатами двух теорий Прандтля. И если первая из них правильно улавливает убывание v_τ до нуля на оси следа и на его свободных границах, то вторая правильно подмечает, что кривая v (y^V) должна иметь скорее коробовидную, чем параболическую форму, утрируя это путем принятия отношения $v_\tau / U_\infty b_{**}$, не зависящим от y^V .

Поступила 27 V 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Новожилов В. В. Однослойная теория установившихся турбулентных течений несжимаемой жидкости и ее применение к расчету равновесных турбулентных пограничных слоев. Вестн. ЛГУ. Сер. матем., механ., астрон., 1976, № 13, вып. 3.
2. Новожилов В. В. Теория плоского турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости. Л., «Судостроение», 1977.
3. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1974.