

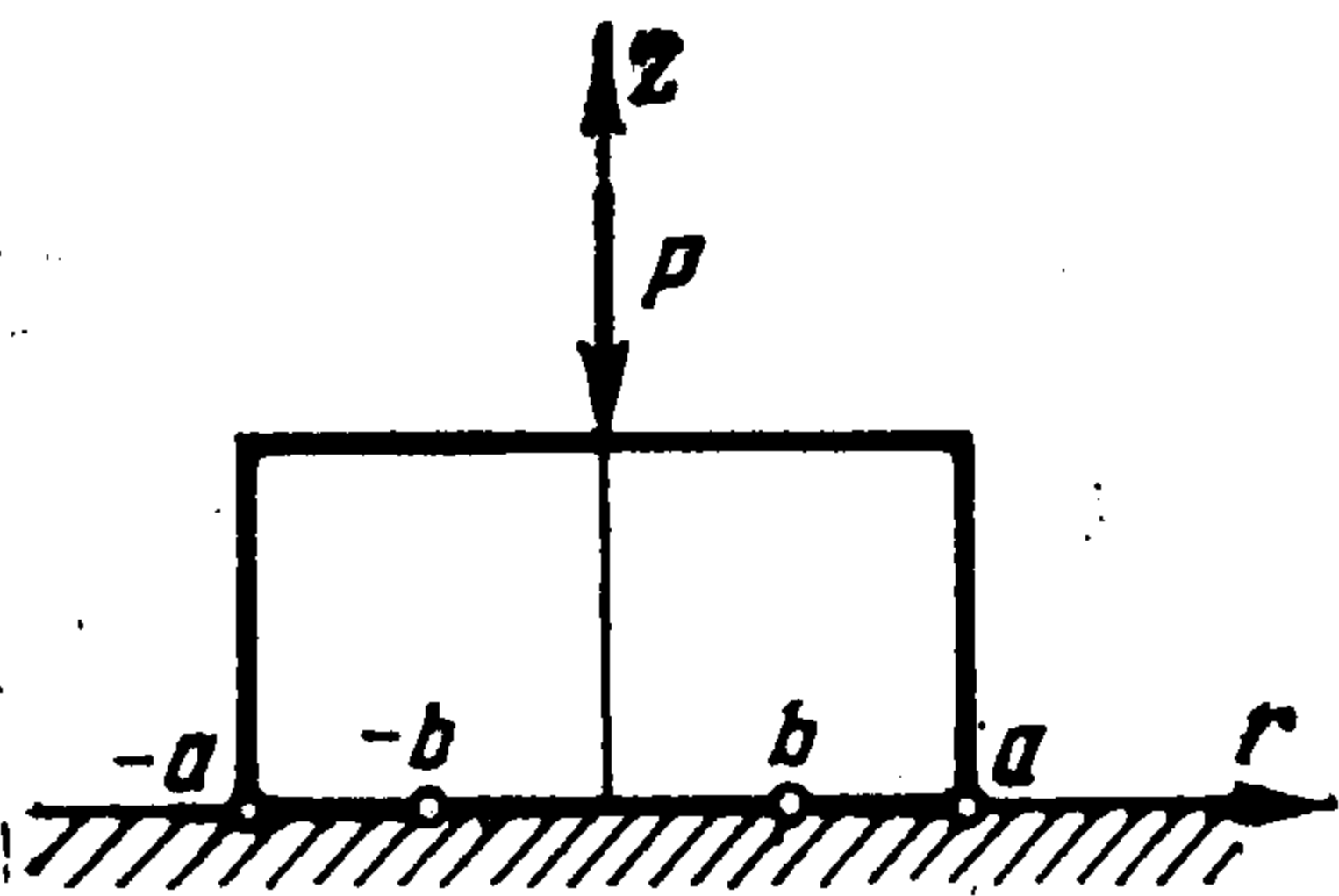
ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА С УЧЕТОМ СЦЕПЛЕНИЯ И СКОЛЬЖЕНИЯ

Н. И. Воробьева, С. Г. Коблик, Л. И. Маневич

(Запорожье, Днепропетровск)

Рассматривается задача о вдавливании штампа, имеющего форму тела вращения, в трансверсально-изотропное полупространство с учетом трения и сцепления. Применяется метод, основанный на разложении решения в ряд по параметру, зависящему от отношения жесткостных характеристик. В качестве примера рассматривается случай штампа с плоским основанием. Получены приближенные соотношения для определения радиуса участка сцепления и распределения контактных напряжений.

Пусть штамп, имеющий форму тела вращения, вдавливается в трансверсально-изотропное полупространство. Область контакта состоит из участка трения, примыкающего к границе области контакта, и участка сцепления. Вследствие симметрии область контакта и участок сцепления будут концентрическими кругами с общим центром, лежащим на оси штампа. Радиус окружности, разделяющей участки трения и сцепления, заранее не известен и должен быть определен в ходе решения задачи. Требуется определить также нормальные и касательные усилия в области контакта.



Фиг. 1

Задача сводится к решению уравнений равновесия трансверсально-изотропной среды

$$(1.1) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{k} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + k\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k\varepsilon \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} = 0, \quad k = \frac{G'}{E'}, \quad \varepsilon = \frac{E'}{E}$$

при следующих граничных условиях вне области контакта ($r > a$), во всей области контакта ($r < a$), на участке сцепления ($0 < r < b$) и на участке скольжения ($b < r < a$):

$$(1.2) \quad \sigma_z = \tau_{rz} = 0, \quad r > a; \quad w = -C + f(r), \quad r < a$$

$$u = 0, \quad 0 < r < b; \quad \tau_{rz} = -\rho\sigma_z, \quad b < r < a$$

Кроме того

$$w \rightarrow 0, \quad u \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \sqrt{r^2 + z^2} \rightarrow \infty$$

Здесь a — радиус области контакта, b — радиус участка сцепления, $f(r)$ — функция, описывающая форму штампа, E и E' — модули упругос-

ти на растяжение — сжатие в плоскости изотропии и в направлении, нормальном к ней, G' — модуль сдвига в плоскости, нормальной к плоскости изотропии, w и u — компоненты вектора смещения в направлении осей z и r соответственно, ρ — коэффициент трения; коэффициенты Пуассона приняты равными нулю.

Введем преобразования переменных

$$(1.3) \quad r = r_1, \quad z = k^{-1/2}z_1, \quad w = W^1, \quad u = \varepsilon U^1$$

$$(1.4) \quad r = r_2, \quad z = \varepsilon^{1/2}k^{1/2}z_2, \quad w = \varepsilon W^2, \quad u = \varepsilon^{1/2}U^2$$

Подставляя формулы (1.3) и (1.4) в (1.1), получим соответственно

$$(1.5) \quad W_{rs}^1 + W_{zz}^1 + \varepsilon k^{1/2}U_{sz}^1 = 0, \quad U_{sr}^1 + \varepsilon k^2 U_{zz}^1 + k^{3/2}W_{rz}^1 = 0$$

$$(1.6) \quad \varepsilon k^2 W_{rs}^2 + W_{zz}^2 + k^{3/2}U_{sz}^2 = 0, \quad U_{sr}^2 + U_{zz}^2 + \varepsilon k^{1/2}W_{rz}^2 = 0$$

Здесь

$$\varphi_s^l = \frac{\partial \varphi^l}{\partial r_l} + \frac{\varphi^l}{r_l}, \quad \varphi_{sz}^l = \frac{\partial}{\partial z_l} \left(\frac{\partial \varphi^l}{\partial r_l} + \frac{\varphi^l}{r_l} \right)$$

$$\varphi_{sr}^l = \frac{\partial}{\partial r_l} (\varphi_s^l), \quad \varphi_{rs}^l = \left(\frac{\partial \varphi^l}{\partial r_l} \right)_s = \frac{\partial^2 \varphi^l}{\partial r_l^2} + \frac{1}{r_l} \frac{\partial \varphi^l}{\partial r_l} \quad (l = 1, 2)$$

Предположим, что $E > E' \sim G'$; тогда при асимптотическом анализе уравнений (1.5) и (1.6) величину ε можно рассматривать как малый параметр. Решение, полученное путем асимптотического интегрирования системы первого типа (1.5), соответствует относительно медленно меняющемуся вдоль оси z напряженно-деформированному состоянию по сравнению с соответствующим решением системы второго типа (1.6), имеющим характер пограничного слоя [1].

Компоненты вектора перемещений представим в виде суммы решений обоих типов

$$(1.7) \quad u = u_1 + u_2, \quad w = w_1 + w_2$$

Функции W^l и U^l ($l = 1, 2$) будем разыскивать в виде асимптотических рядов по параметру $\varepsilon^{1/2}$

$$(1.8) \quad W^l = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n/2} W^{l,n} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^1 \varepsilon^{i+j/2} W^{l,2i+j}$$

$$U^l = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n/2} U^{l,n} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^1 \varepsilon^{i+j/2} U^{l,2i+j}$$

При этом вводится дополнительное преобразование координат

$$(1.9) \quad \zeta_1 = z_1 \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \alpha_i, \quad \zeta_2 = z_2 \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \beta_i$$

с неопределенными коэффициентами α_i и β_i ($i = 0, 1, \dots$).

Подставляя (1.8), (1.9) в уравнения (1.5), (1.6) и в граничные условия и расщепляя полученные выражения по степеням $\varepsilon^{1/2}$, получим следующие уравнения и граничные условия для функций $W^{l,2i+j}$ и $U^{l,2i+j}$.

Напряженно-деформированное состояние первого типа

$$(1.10) \quad W_{rs}^{1, 2i+j} + W_{\zeta\zeta}^{1, 2i+j} b_0 = - \sum_{v=0}^{i-1} (W_{\zeta\zeta}^{1, 2v+j} b_{i-v} + k^{1/2} U_{s\zeta}^{1, 2v+j} \alpha_{i-1-v})$$

$$U_{sr}^{1, 2i+j} = -k^2 \sum_{v=0}^{i-1} U_{\zeta\zeta}^{1, 2v+j} b_{i-1-v} - k^{3/2} \sum_{v=0}^i W_{r\zeta}^{1, 2v+j} \alpha_{i-v}$$

$$b_p = \sum_{i=0}^p \alpha_i \alpha_{p-i} \quad (i = 0, 1, \dots)$$

Граничные условия:

для $i = 0, j = 0$

$$(1.11) \quad W^{1,0} = -C + f(r), \quad r < a; \quad W_{\zeta}^{1,0} = 0, \quad r > a$$

для всех остальных i, j

$$(1.12) \quad W^{1, 2i+j} = -W^{2, 2(i-1)+j}, \quad r < a$$

$$W_{\zeta}^{1, 2i+j} \alpha_0 = - \sum_{v=0}^{i-1} W_{\zeta}^{1, 2v+j} \alpha_{i-v} - k^{-1} \sum_{v=0}^i W_{\zeta}^{2, 2v+j-1} \beta_{i-v}, \quad r > a$$

Напряженно-деформированное состояние второго типа

$$(1.13) \quad W_{\zeta\zeta}^{2, 2i+j} c_0 = - \sum_{v=0}^{i-1} W_{\zeta\zeta}^{2, 2v+j} c_{i-v} - k^{3/2} \sum_{v=0}^i U_{s\zeta}^{2, 2v+j} \beta_{i-v} - k^2 W_{rs}^{2, 2(i-1)+j}$$

$$U_{sr}^{2, 2i+j} + U_{\zeta\zeta}^{2, 2i+j} c_0 = - \sum_{v=0}^{i-1} (U_{\zeta\zeta}^{2, 2v+j} c_{i-v} - k^{1/2} W_{r\zeta}^{2, 2v+j} \beta_{i-1-v})$$

$$c_p = \sum_{i=0}^p \beta_i \beta_{p-i}$$

Граничные условия:

$$(1.14) \quad U^{2, 2i+j} = -U^{1, 2i+j-1}, \quad r < b$$

$$U_{\zeta}^{2, 2i+j} \beta_0 = - \sum_{v=0}^{i-1} (U_{\zeta}^{2, 2v+j} \beta_{i-v} + k U_{\zeta}^{1, 2v+j} \alpha_{i-1-v}) -$$

$$- k^{1/2} (W_r^{1, 2i+j} + W_r^{2, 2(i-1)+j}) - \rho \sum_{v=0}^i (W_{\zeta}^{1, 2v+j} \alpha_{i-v} + k^{-1} W_{\zeta}^{2, 2i+j-1} \beta_{i-v})$$

$$r > b$$

Следует учесть, что если в формулах (1.10), (1.12)–(1.14) какой-либо верхний предел суммирования отрицателен, то эта сумма равна нулю. Аналогично, если у какой-нибудь функции второй верхний индекс (обозначающий номер приближения) отрицателен, то эта функция равна нулю. Например, при $i = 0$ из уравнений (1.10) и (1.13) получаем

$$W_{rs}^{1, j} + W_{\zeta\zeta}^{1, j} b_0 = 0, \quad U_{sr}^{1, j} = -k^{3/2} W_{r\zeta}^{1, j}$$

$$W_{\zeta\zeta}^{2, j} c_0 = -k^{3/2} U_{s\zeta}^{2, j} \beta_0, \quad U_{sr}^{2, j} + U_{\zeta\zeta}^{2, j} c_0 = 0$$

Первые уравнения (для функций $W^{1, 2i+j}$) в системе (1.10), а также вторые уравнения (для функций $U^{2, 2i+j}$) в системе (1.13) будем называть основными.

Для основных уравнений справедлива следующая теорема: если коэффициенты α_i и β_i определяются формулами

$$(1.15) \quad \begin{aligned} \alpha_0 &= 1, & 2\alpha_{p+1} &= k^2\gamma_p + \sum_{m=1}^p (k^2\gamma_{p-m} - \alpha_{p+1-m})\alpha_m \\ \beta_0 &= 1, & 2\beta_{p+1} &= -k^2\delta_p - \sum_{m=1}^p (k^2\delta_{p-m} + \beta_{p+1-m})\beta_m \\ \gamma_0 &= \delta_0 = 1, & \gamma_n &= \alpha_n + k^2 \sum_{j=0}^{n-1} b_j\gamma_{n-1-j} \\ \delta_n &= \beta_n + k^2\delta_{n-1} - \sum_{j=0}^{n-1} \delta_j c_{n-j} \end{aligned}$$

то основные уравнения имеют вид

$$(1.16) \quad \begin{aligned} W_{rs}^{1,2i+j} + W_{\zeta\zeta}^{1,2i+j} &= 0, & U_{sr}^{2,2i+j} + U_{\zeta\zeta}^{2,2i+j} &= 0 \\ (i = 0, 1, \dots; j = 0, 1) \end{aligned}$$

Доказательство этой теоремы приводится в п. 3.

В дальнейшем будем считать, что коэффициенты α_i, β_i определяются по формулам (1.15).

Из приведенных разложений видно, что граничные условия для функций $W^{1,2i+j}$ удовлетворяются при решении первых уравнений системы (1.10), описывающей напряженно-деформированное состояние первого типа. Функции же $U^{1,2i+j}$ определяются как частные решения вторых уравнений этой системы.

Граничные условия для системы (1.13), описывающей напряженно-деформированное состояние второго типа, определяются после решения соответствующих уравнений первого типа. Эти граничные условия удовлетворяются при решении вторых уравнений системы (1.13). Функции же $W^{2,2i+j}$ находятся как частные решения первых уравнений этой системы.

Таким образом, задача сводится к последовательному интегрированию уравнений (1.16) для функций $W^{1,2i+j}$ и для функций $U^{2,2i+j}$. Нахождение же функций $U^{1,2i+j}$ и $W^{2,2i+j}$ не представляет труда.

Точное решение уравнений (1.16) может быть получено при помощи интегральных преобразований [2]. Можно показать, что функции $W^{1,2i+j}$ и $U^{2,2i+j}$ непрерывны во всей области определения, а их производные непрерывны везде, за исключением точек $r = b, z = 0$ и $r = a, z = 0$, где они имеют интегрируемые особенности. Отсюда следует, что решение имеет асимптотический характер всюду, за исключением сколь угодно малых окрестностей указанных выше точек.

После того как функции $W^{l,2i+j}$ и $U^{l,2i+j}$ ($l = 1, 2; i = 0, 1, \dots; j = 0, 1$) определены, напряжения σ_z и τ_{rz} находятся по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_z &= E' \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^1 \varepsilon^{i+j/2} \sum_{v=0}^i (k^{1/2} W_{\zeta}^{1,2v+j} \alpha_{i-v} + k^{-1/2} \varepsilon^{1/2} W_{\zeta}^{2,2v+j} \beta_{i-v}) \\ \tau_{rz} &= G' \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^1 \varepsilon^{i+j/2} \left[\sum_{v=0}^i (k^{1/2} \varepsilon U_{\zeta}^{1,2v+j} \alpha_{i-v} + k^{-1/2} U_{\zeta}^{2,2v+j} \beta_{i-v}) + \right. \\ &\quad \left. + W_r^{1,2i+j} + \varepsilon W_r^{2,2i+j} \right] \end{aligned}$$

Неизвестная граница участков сцепления и трения находится из условия непрерывности касательных напряжений по этой границе.

Постоянная C в (1.11) (осадка штампа) определяется из условия равновесия штампа (P — величина прижимающей силы)

$$(1.17) \quad P + 2\pi \int_0^a \sigma_z r dr = 0$$

2. В качестве примера решим задачу для штампа с плоским основанием ($f(r) \equiv 0$). Решение (с учетом одного приближения) сводится к интегрированию уравнений (2.1) с граничными условиями (2.2)

$$(2.1) \quad W_{rs}^{1,0} + W_{\zeta\zeta}^{1,0} = 0, \quad U_{sr}^{2,0} + U_{\zeta\zeta}^{2,0} = 0$$

$$(2.2) \quad \zeta_1 = 0, \quad W^{1,0} = -C, \quad r < a; \quad W_{\zeta}^{1,0} = 0, \quad r > a$$

$$\zeta_2 = 0, \quad U^{2,0} = 0, \quad r < b; \quad U_{\zeta}^{2,0} = \begin{cases} -\rho W_{\zeta}^{1,0}, & b < r < a \\ -k^{1/2} W_r^{1,0}, & r > a \end{cases}$$

Функция $W^{1,0}$ имеет вид (постоянная C определяется из условия (1.17))

$$(2.3) \quad W^{1,0} = -2C\pi^{-1} \arcsin [2a(\sqrt{\zeta_1^2 + (r+a)^2} + \sqrt{\zeta_1^2 + (a-r)^2})^{-1}] \\ C = Pk^{-1/2} / (4aE')$$

Решение уравнения (2.1) ищем в виде ($J_1(x)$ — функция Бесселя первого порядка

$$U^{2,0} = \int_0^{\infty} A(p) \exp(p\zeta_2) J_1(pr) dp$$

Подставив это выражение во вторую пару граничных условий (2.2), записанных с учетом (2.3), получим систему парных интегральных уравнений для определения функции $A(p)$

$$\int_0^{\infty} A(p) J_1(pr) dp = 0, \quad r > b \\ \int_0^{\infty} A(p) J_1(pr) p dp = \begin{cases} 2C\rho\pi^{-1} (a^2 - r^2)^{-1/2}, & b < r < a \\ -2Cak^{-1/2} (\pi r)^{-1} (r^2 - a^2)^{-1/2}, & r > a \end{cases}$$

Решение этих уравнений имеет вид ($K(x)$ — полный эллиптический интеграл первого рода) [2]

$$A(p) = \frac{2C\rho}{\pi^2} [-k^{1/2}\pi \sin(ap) + B(p)]$$

$$B(p) = \frac{2\rho}{a} p \int_b^a K' \left(\frac{x}{a} \right) x \sin(px) dx + pk^{1/2} \int_0^b \ln \left(\frac{a+x}{a-x} \right) \sin(px) dx$$

Нормальные контактные напряжения и касательные напряжения под плоским штампом определяются по формулам

$$\sigma_z = -(2\pi a)^{-1} P (a^2 - r^2)^{-1/2}, \quad \tau_{rz} = G' k^{-1/2} U_{\zeta_2}^{2,0}$$

Из физических соображений ясно, что касательные напряжения должны быть непрерывны на границе раздела зон сцепления и скольжения, следовательно, производная $U_{\zeta}^{2,0}$ должна быть непрерывна на этой границе. Имеем

$$(2.4) \quad \zeta_2 = 0, \quad U_{\zeta}^{2,0} = 2C\rho\pi (a^2 - r^2)^{-1/2}, \quad b \leq r \leq a$$

$$U_{\zeta}^{2,0} = -\frac{2Ck^{1/2}}{\pi^2} \int_0^{\infty} \sin(ap) J_1(rp) dp + \frac{2C}{\pi} \int_0^{\infty} B(p) J_1(pr) dp, \quad 0 \leq r < b$$

Дважды проинтегрировав внутренние интегралы по частям, приведем последнюю формулу к виду

$$\zeta_2 = 0, \quad U_{\zeta}^{2,0} = 2C\pi^{-1} (G_1 + G_2 + I_1 + I_2)$$

$$G_1 = \frac{\rho\pi r}{a\sqrt{a^2-r^2}} + r \left[\frac{ak^{1/2}}{a^2-b^2} - \frac{2\rho}{a} \frac{d}{ab} \left(bK' \left(\frac{b}{a} \right) \right) \right] (b + (b^2 - r^2)^{1/2})^{-1}$$

$$G_2 = \left[k^{1/2} \ln \frac{a+b}{a-b} - \frac{2\rho b}{a} K' \left(\frac{b}{a} \right) \right] r (b^2 - r^2)^{-1/2} (b + (b^2 - r^2)^{1/2})^{-1}$$

$$I_1 = \int_0^N f_1(pr) dp, \quad I_2 = \int_N^\infty f_1(pr) dp \quad (N > 0)$$

$$f_1(pr) = 2 \left[\frac{\rho}{a} \int_b^a \frac{d^2}{dx^2} \left(xK' \left(\frac{x}{a} \right) \right) \sin(px) dx + \right.$$

$$\left. + ak^{1/2} \int_0^b \frac{x \sin(px)}{(a^2 - x^2)^2} dx \right] \frac{J_1(pr)}{p}$$

Функция G_1 непрерывна по r в промежутке $0 \leq r \leq b < a$. Интеграл I_1 тоже непрерывен на этом промежутке (как определенный интеграл от непрерывной функции f_1). Несобственный интеграл I_2 сходится равномерно (функция f_1 при больших p допускает оценку $f_1 < B/p^2$ [3]) и, следовательно, сходится к непрерывной функции. Функция G_2 терпит разрыв при $r = b$. Поэтому для непрерывности производной $U_{\zeta}^{2,0}$ необходимо, чтобы $G_2 \equiv 0$. Отсюда

$$(2.5) \quad k^{1/2} \ln \left((1 + b/a) / (1 - b/a) \right) = 2\rho (b/a) K' (b/a)$$

Соотношение (2.5) определяет неизвестную ранее границу участков сцепления и трения.

После несложных, но громоздких преобразований получаем следующую формулу для касательных напряжений на участке сцепления ($\Pi_1(n, x)$ — полный эллиптический интеграл третьего рода):

$$\tau_{rz} = 1/2 P k^{1/2} \pi^{-2} a^{-2} t^{-1} (1 - t^2)^{-1/2} \{ \rho k^{-1/2} t +$$

$$+ (\beta_*^2 - t^2)^{1/2} [\beta_*^{-1} \ln \left((1 + \beta_*) / (1 - \beta_*) \right) - 2\rho k^{-1/2} t^2 \Pi_1(t^2 - 1, \beta_*) /$$

$$/ (1 - t^2)] (1 - t^2)^{-1/2} - \ln \left((1 - t^2)^{1/2} + (\beta_*^2 - t^2)^{1/2} \right) / \left((1 - t^2)^{1/2} -$$

$$- (\beta_*^2 - t^2)^{1/2} \right) \}, \quad t = r/a, \quad \beta_* = b/a \quad (0 \leq t \leq \beta_*)$$

На участке скольжения

$$\tau_{rz} = 1/2 P \rho \pi^{-1} a^{-2} (1 - t^2)^{-1/2} \quad (\beta_* \leq t < 1)$$

На фиг. 2 (кривая 1) показана зависимость величины b/a (отношение радиуса участка сцепления к радиусу штампа) от коэффициента трения ρ при $k = 1/3$, а на фиг. 3 приведено распределение безразмерных касательных напряжений $T_1 = \tau_{rz} 2\pi a / P$ в области контакта при $k = 1/3$, $\rho = 0.3$. Точка $\beta_* = b/a$ разделяет участки сцепления и трения.

Следует отметить, что в полученном решении (с учетом только одного приближения) особенность у контактных напряжений на границе области контакта имеет вид $(a - r)^{-1/2}$, в то время как точное решение задачи при наличии кулоновского трения должно содержать особенность $(a - r)^{-1/2 + \theta(\rho, \epsilon)}$, такую же, как и для плоской задачи (это следует из того, что в окрестности особой линии уравнения трехмерной теории упругости сводятся к плоской задаче и сложному сдвигу [4]). Таким образом, выражение для θ известно [5]. Разложение в ряд по ϵ имеет вид

$$(2.6) \quad (a - r)^{-1/2 + \theta} = (a - r)^{-1/2} \{ 1 + \epsilon^{1/2} \rho k^{1/2} \ln(a - r) +$$

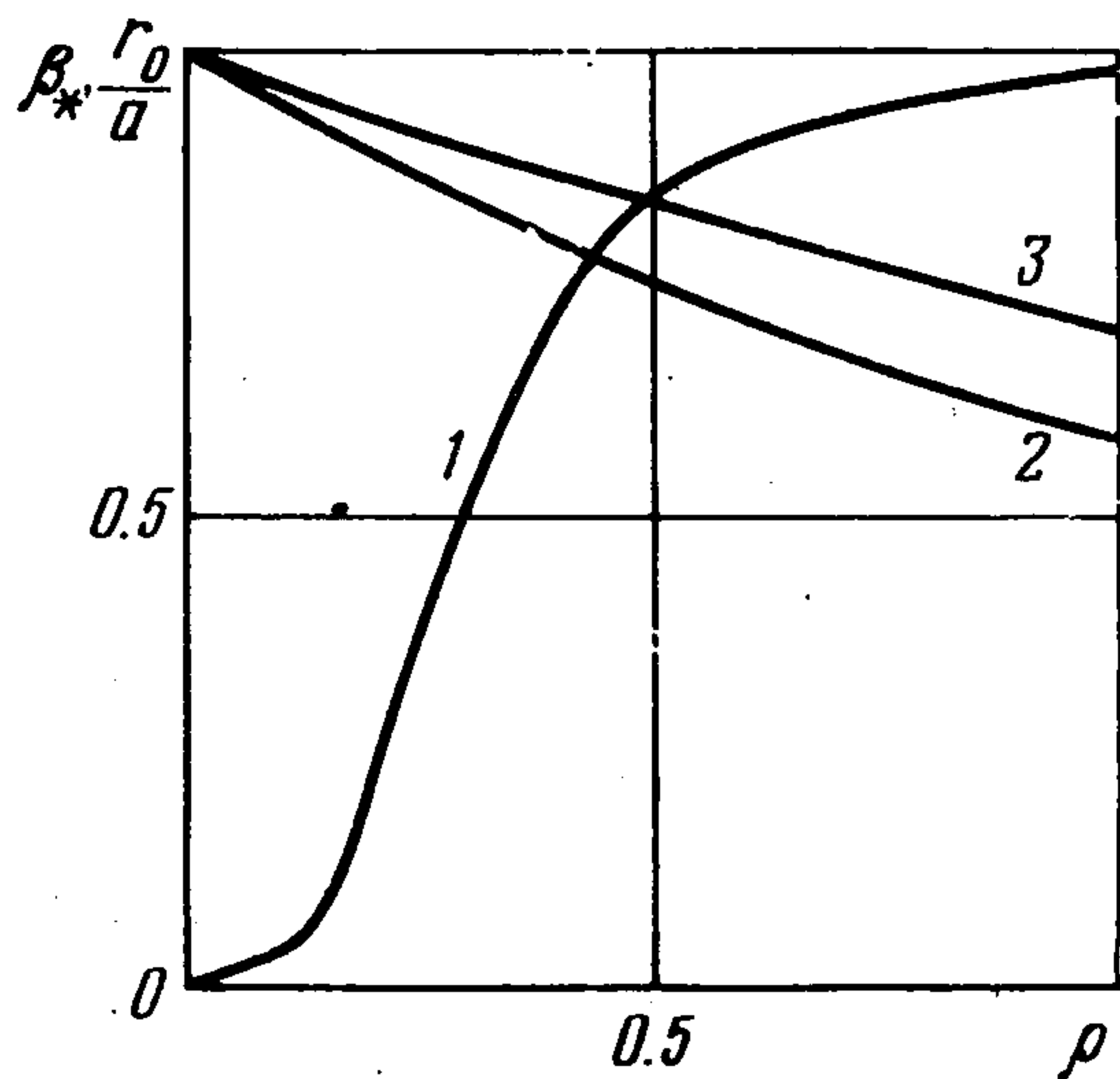
$$+ \epsilon [\rho k^{3/2} \ln(a - r) + 1/2 \rho^2 k \ln^2(a - r)] + \dots \}$$

Полученная в данной работе особенность совпадает с первым членом разложения. Очевидно, последующие приближения будут содержать соответствующие поправки.

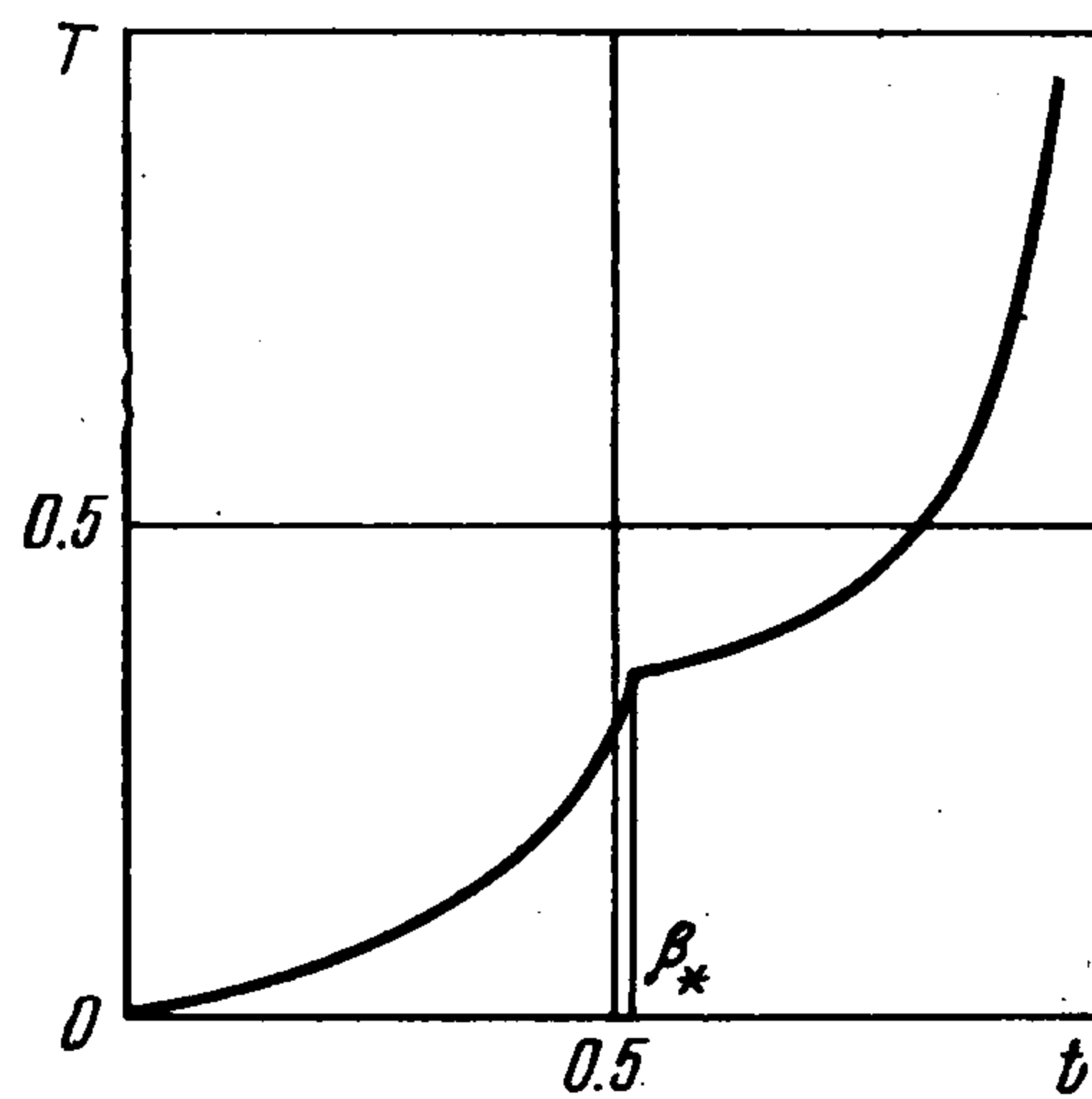
Относительная погрешность любой частичной суммы ряда (2.6) становится сколь угодно большой при $r \rightarrow a$. Между тем, можно добиться равномерной точности во всей области контакта, выполняя «склеивание» приближенного и «особого» решения, которое имеет вид

$$\sigma_z^* = A (a - r)^{-1/2+\theta}$$

Постоянный множитель A определяется из условий склеивания, которые задаются следующим образом: на некоторой окружности $r = r_0$ должны совпадать как прибли-



Фиг. 2



Фиг. 3

женное и особое решения, так и их производные по r , т. е. при $r = r_0$, $z = 0$

$$(2.7) \quad \sigma_z = \sigma_z^*, \quad \partial \sigma_z / \partial r = \partial \sigma_z^* / \partial r$$

Условия (2.7) позволяют определить радиус r_0 , а совместно с интегральным условием равновесия штампа — константы приближенного и особого решений. На фиг. 2 показана зависимость положения линии склеивания от коэффициента ρ при $k = 1/3$ и $\varepsilon = 1$ (кривая 2), $\varepsilon = 1/3$ (кривая 3). Для получения решения, равномерно пригодного во всей области, необходимо при $r_0 \leq r \leq a$ использовать особое решение. Попадание точки склеивания в зону сцепления ($r_0 < b$) указывает на необходимость учета высших приближений. Из фиг. 2 следует, что это имеет место при больших ρ ($\rho > 0.4$), а при реальных коэффициентах трения ($\rho < 0.3$) зоны, в которых необходимо применение особого решения, невелики и даже при учете лишь одного приближения занимают менее 20% (по радиусу) области контакта.

3. Покажем, что если коэффициенты α_i и β_i определяются по формулам (1.15), то основные уравнения имеют вид (1.16). Докажем это для системы (1.10). Доказательство проводится по индукции.

При $i = 0$ имеем

$$(3.1) \quad W_{rs}^{1,j} + W_{\zeta\zeta}^{1,j} b_0 = 0, \quad U_{sr}^{1,j} = -k^{3/2} W_{\zeta r}^{1,j} \alpha_0$$

Для того чтобы первое уравнение системы (3.1) имело вид (1.16), достаточно положить $\alpha_0 = 1$ (при этом $b_0 = 1$).

При $i = 1$

$$(3.2) \quad W_{rs}^{1,2+j} + W_{\zeta\zeta}^{1,2+j} = -W_{\zeta\zeta}^{1,j} b_1 - k^{1/2} U_{s\zeta}^{1,j} \alpha_0$$

$$U_{sr}^{1,2+j} = -k^2 U_{\zeta\zeta}^{1,j} - k^{3/2} W_{rs}^{1,j} \alpha_1 - k^{3/2} W_{r\zeta}^{1,2+j} \alpha_0$$

Проинтегрируем второе уравнение (3.1) по r и продифференцируем по ζ . Получим

$$(3.3) \quad U_{s\zeta}^{1,j} = -k^{3/2} W_{\zeta\zeta}^{1,j} \alpha_0$$

Учитывая условия на бесконечности, произвольную функцию, появляющуюся при интегрировании, полагаем равной нулю. После подстановки (3.3) в первое уравнение

(3.2) найдем

$$W_{rs}^{1, 2+j} + W_{\zeta\zeta}^{1, 2+j} = W_{\zeta\zeta}^{1, j} (b_1 - k^2 \alpha_0^2)$$

Приравнявая коэффициенты при $W_{\zeta\zeta}^{1, j}$ нулю (и учитывая, что $\alpha_0 = 1$ и $b_1 = 2\alpha_1$), получим $\alpha_1 = k^2 / 2$.

Таким образом, для $i = 0, 1$ теорема справедлива. Предположим, что теорема справедлива для $i \leq p$, и докажем ее для $i = p + 1$.

Покажем, что если функции $W^{1, 2i+j}$ ($i = 0, 1, \dots, p$) удовлетворяют первому уравнению (1.16), то функции $U^{1, 2i+j}$ ($i = 0, 1, \dots, p$), определяемые из вторых уравнений системы (1.10), удовлетворяют уравнению

$$(3.4) \quad U_{sr}^{1, 2i+j} + U_{\zeta\zeta}^{1, 2i+j} = 0$$

Если функции $U^{1, 2i+j}$ находятся из уравнения

$$U_{sr}^{1, 2i+j} = f_2$$

где f_2 удовлетворяют уравнению (3.4), то $U^{1, 2i+j}$ — решения этого уравнения. Действительно

$$U^{1, 2i+j} = r^{-1} \int \left(r \int f_2 dr \right) dr$$

$$U_{sr}^{1, 2i+j} + U_{\zeta\zeta}^{1, 2i+j} = r^{-1} \int \left(r \int (f_{2sr} + f_{2\zeta\zeta}) dr \right) dr = 0$$

Таким образом, остается показать, что правые части вторых уравнений системы (1.10) при $i \leq p$ удовлетворяют уравнению (3.4).

Видно, что если функция $W^{1, 2i+j}$ удовлетворяет уравнению (1.16), то ее производная $W_r^{1, 2i+j}$ удовлетворяет уравнению (3.4). Теперь, очевидно, правая часть второго уравнения (1.10) при $i = 0$ удовлетворяет уравнению (3.4), а для $i = 1, 2, \dots, p$ это доказывается по индукции.

Подставим, согласно (3.4), величину $-U_{rs}^{1, 2i+j}$ вместо $U_{\zeta\zeta}^{1, 2i+j}$ во вторые уравнения (1.10), проинтегрируем полученные соотношения по r и продифференцируем по ζ . Получим

$$(3.5) \quad U_{s\zeta}^{1, 2i+j} = k^2 \sum_{v=0}^{i-1} U_{s\zeta}^{1, 2v+j} b_{i-1-v} - k^{3/2} \sum_{v=0}^i W_{\zeta\zeta}^{1, 2v+j} \alpha_{i-v} \quad (i = 0, 1, \dots, p)$$

Система (3.5) может рассматриваться как система линейных алгебраических уравнений относительно $U_{s\zeta}^{1, 2i+j}$. Эта система имеет треугольную матрицу коэффициентов с ненулевыми элементами по главной диагонали и, следовательно, всегда разрешима. Решение системы (3.5) имеет вид

$$(3.6) \quad U_{s\zeta}^{1, 2i+j} = -k^{3/2} \sum_{v=0}^i W_{\zeta\zeta}^{1, 2v+j} \gamma_{i-v} \quad (i = 0, 1, \dots, p)$$

где величины γ_n ($n = 0, 1, \dots$) определены рекуррентными формулами в (1.15).

Подставив (3.6) в $(p + 1)$ -е основное уравнение системы (1.10), получим

$$(3.7) \quad W_{rs}^{1, 2(p+1)+j} + W_{\zeta\zeta}^{1, 2(p+1)+j} = - \sum_{v=0}^p W_{\zeta\zeta}^{1, 2v+j} \left(b_{p+1-v} - k^2 \sum_{m=0}^{p-v} \alpha_m \gamma_{p-v-m} \right)$$

Вследствие указанного в (1.15) выбора коэффициентов α_i все коэффициенты в правой части (3.7) обращаются в нуль. Действительно, из соотношения для α_{p+1-v} , согласно (1.15), следует

$$\sum_{m=0}^{p+1-v} \alpha_m \alpha_{p+1-v-m} - \sum_{m=0}^{p-v} k^2 \gamma_{p-v-m} \alpha_m = 0$$

т. е. обращение в нуль выражения в скобках в (3.7).

Следовательно, основные уравнения системы (1.10) будут иметь вид первого соотношения (1.16).

Для системы (1.13) доказательство аналогично.

Поступила 16 X 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Маневич Л. И., Воробьева Н. И. О приближенных уравнениях осесимметричной задачи теории упругости для трансверсально-изотропного основания. Прикл. механ., 1972, т. 8, вып. 10.
2. Корнев Б. Г. Введение в теорию бесселевых функций. М., «Наука», 1971.
3. Эрдейи А. Асимптотические разложения. М., Физматгиз, 1962.
4. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М., «Наука», 1974.
5. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1953.

УДК 532.517.4

ПЛОСКИЙ ДАЛЬНИЙ ТУРБУЛЕНТНЫЙ СЛЕД В СВЕТЕ ОБОБЩЕННОЙ ТЕОРИИ КАРМАНА

В. В. Новожилов

(Ленинград)

Формула для рейнольдсовых касательных напряжений, предложенная для плоских пристенных турбулентных течений [1, 2]

$$(0.1) \quad \tau^V = \mu \kappa_n T^{Vn} \frac{\partial u^V}{\partial y^V}, \quad T^V = \left| \frac{\partial u^V}{\partial y^V} \right|^3 \left[\nu \left| \frac{\partial^2 u^V}{\partial y^{V2}} \right|^2 \right]^{-1}$$

распространяется на задачу о плоском турбулентном следе в области его автомодельности (без изменения экспериментальных постоянных n и κ_n). Показано, что при этом получаются результаты, близкие к теории Шлихтинга. Тем самым установлена взаимосвязь между эмпирической константой в последней теории и константами пристенной турбулентности. В частности, это позволило вычислить, основываясь только на опытах с турбулентными следами, входящую в универсальный логарифмический закон константу κ . Оказалось, что рекомендованному Шлихтингом значению $\beta = 0.18$ соответствует $\kappa = 0.42$, только на 5% отличающееся от общепринятого значения, определенного на основании опытов Никурадзе.

При $n = 1$, $\kappa_n = 0.16$ (0.1) превращается в известную формулу Кармана. Последняя в задачах свободной турбулентности до сих пор не использовалась ввиду наличия у профилей скорости струй и следов точек перегиба (в этих точках $\partial^2 u / \partial y^2 = 0$ и, согласно (0.1), $|\tau| \rightarrow \infty$, что абсурдно). Тем не менее применение (0.1) к струям и следам оказывается возможным, если допустить, что в точке перегиба профиля скорости производная $\partial^2 u / \partial y^2$ в нуль не обращается, а проходит через нее с конечным разрывом вида $\pm a$. Из дальнейшего выяснится, что такое допущение приводит к результатам, достаточно близким к экспериментальным данным (при сохранении тех же значений постоянных n и κ_n , какие были рекомендованы [1, 2] для задач пристенной турбулентности).

1. Примем толщину потери импульса b_{**} за характерный размер и перейдем к безразмерным переменным (галочками обозначены соответствующие размерные величины)

$$x = \frac{x^V}{b_{**}} \frac{1}{R_{**}^{1-n}}, \quad R_{**} = \frac{U_\infty b_{**}}{\nu}$$

$$y = \frac{y^V}{b_{**}}, \quad b = \frac{b^V}{b_{**}}$$

$$u = \frac{U_\infty - u^V}{U_\infty}, \quad v = \frac{v^V}{U_\infty} R_{**}^{1-n}$$