

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В ПОЛОСЕ
С УПРУГИМ ТОНКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Д. В. Грилицкий, А. А. Евтушенко, Г. Т. Сулим

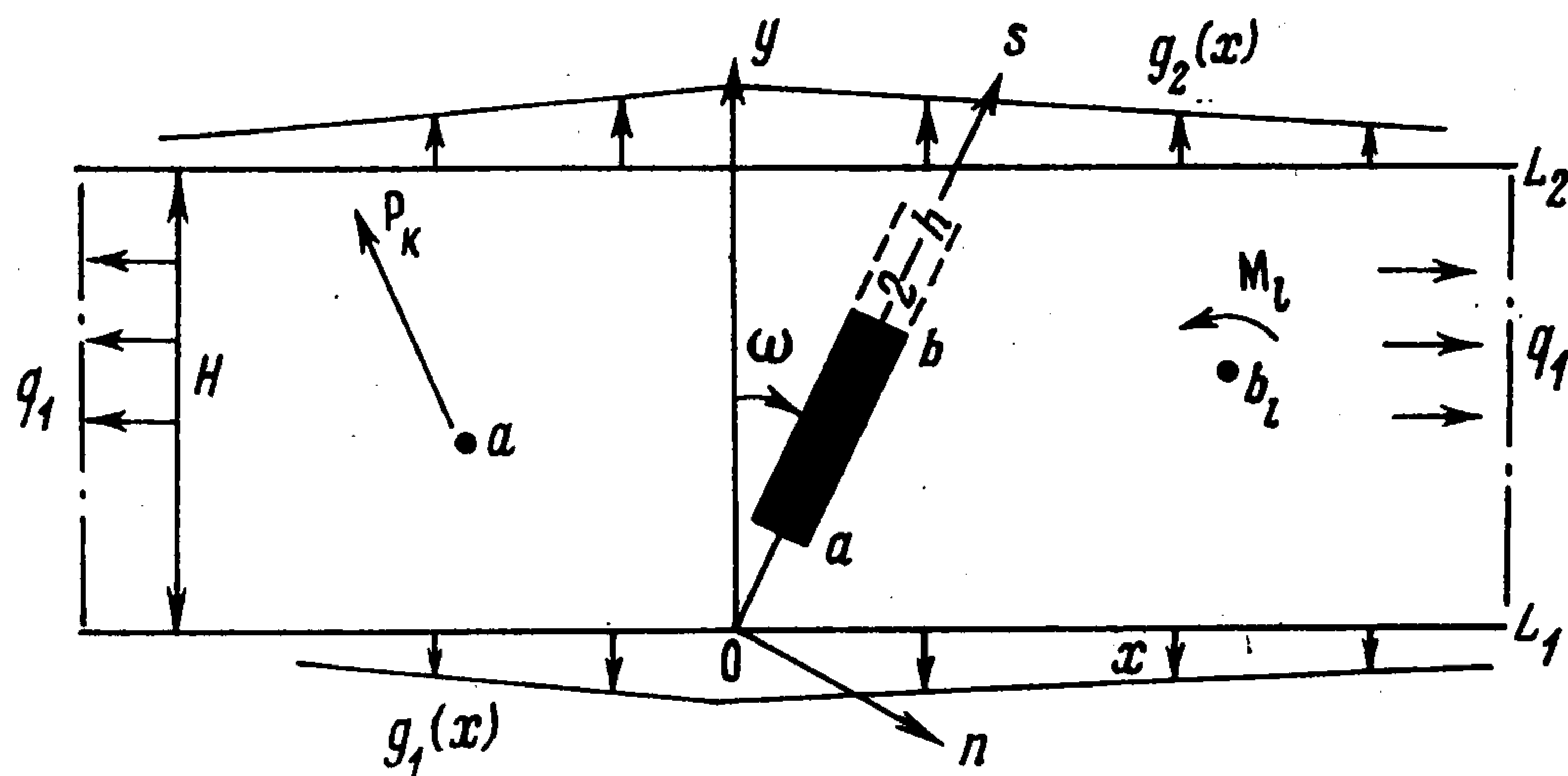
(Львов)

Рассматривается задача о распределении напряжений в полосе с прямолинейным произвольно ориентированным тонкостенным упругим включением конечной длины. С помощью интегрального преобразования Фурье задача сведена к нахождению решения системы четырех сингулярных интегральных уравнений. Приведены численные значения коэффициентов интенсивности напряжений на торцах упругого включения.

Напряженное состояние кусочно-однородной плоскости с тонкостенным упругим включением конечной длины исследовалось в [1,2]. В работе [3] получено решение соответствующей периодической задачи.

1. Рассматривается упругое равновесие однородной изотропной полосы ширины H с произвольно расположенным тонкостенным включением ширины $2h$, локализованным внутри полосы вдоль отрезка $[a, b]$ (фиг. 1).

Наряду с декартовой системой координат xoy введем систему координат son , полученную из системы xoy поворотом на угол ω . Пусть $\{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}\}$



Фиг. 1

$\{\sigma_{ss}, \sigma_{nn}, \sigma_{sn}\}$ — компоненты тензора напряжений, определенные в системах координат xoy и son соответственно.

Полоса находится под действием однородного на бесконечности поля напряжений $\sigma_{xx}(\infty, y) - i\sigma_{xy}(\infty, y) = q_1 - iq_2$, усилий, распределенных по боковым граням полосы $\sigma_{yy} - i\sigma_{xy} = g_j(x)$ на L_j ($j = 1, 2$), причем $\lim_{x \rightarrow \infty} g_j(x) = q_3 - iq_2$, а также системы сосредоточенных сил P_k и моментов M_l , приложенных во внутренних точках полосы a_k и b_l соответственно ($k = 1, \dots, n; l = 1, \dots, m$). Включение свободно от внешних нагрузок. Определим распределение напряжений в полосе в окрестности включения.

Предположение о малой толщине включения позволяет считать, что его наличие можно моделировать скачком напряжений и производных от смещений в однородной полосе на отрезке, совпадающем со срединной линией реального включения, т. е.

$$(1.1) \quad [\sigma_{nn}(s, +0) - i\sigma_{sn}(s, +0)] - [\sigma_{nn}(s, -0) - i\sigma_{sn}(s, -0)] = f_1(s) - if_2(s) \\ [u'(s, +0) + iv'(s, +0)] - [u'(s, -0) + iv'(s, -0)] = f_3(s) + if_4(s) \\ f_j(s) = 0, s \in [a, b]; u' = \partial u / \partial s, v' = \partial v / \partial s$$

Здесь u, v — смещения; индексы плюс и минус характеризуют составляющие поля напряжений и смещений полосы соответственно на верхней и нижней кромках включения.

Для определения неизвестных функций $f_j(s)$ ($j = 1, \dots, 4$) имеем четыре условия [3] взаимодействия тонкостенного упругого включения с окружающей средой

$$(1.2) \quad \partial [u(s, -0) + u(s, +0)] / \partial s = 2k_{10}\sigma_s - k_{20}[\sigma_{nn}(s, -0) + \sigma_{nn}(s, +0)] \\ \partial [v(s, -0) - v(s, +0)] / h = -2k_{20}\sigma_s + k_{10}[\sigma_{nn}(s, -0) + \sigma_{nn}(s, +0)] \\ \partial [v(s, -0) + v(s, +0)] / \partial s + [u(s, -0) + u(s, +0)] / h = [\sigma_{sn}(s, -0) + \sigma_{sn}(s, +0)] / \mu_0 \\ \partial [u(s, -0) - u(s, +0)] / \partial s = k_{30}[\sigma_{nn}(s, +0) - \sigma_{nn}(s, -0)] \\ \sigma_s = N_a - \frac{1}{2h} \int_a^s [\sigma_{sn}(t, -0) - \sigma_{sn}(t, +0)] dt \\ k_{10} = (1 + \nu_0) / (8\mu_0), k_{20} = (3 - \nu_0) / (8\mu_0) \\ k_{30} = [(k_{20})^2 - (k_{10})^2] / k_{10}, \mu_j = E_j / [2(1 + \nu_j)]$$

Здесь для плоской деформации $\nu_j = 3 - 4\nu_j$, для обобщенного плоского напряженного состояния $\nu_j = (3 - \nu_j) / (1 + \nu_j)$; E_j, ν_j — соответственно модуль упругости и коэффициент Пуассона материала включения ($j = 0$) и матрицы ($j = 1$); N_a — нормальное напряжение на торце $s = a$ включения.

2. Решение задачи S представим в виде суммы решения S° соответствующей задачи при отсутствии включения и решения S^* задачи об упругом равновесии полосы с математическим разрезом вдоль отрезка $[a, b]$ при условиях

$$(2.1) \quad \sigma_{nn}^*(s, \pm 0) = \sigma_{nn}(s, \pm 0) - \sigma_{nn}^\circ(s) \\ \sigma_{sn}^*(s, \pm 0) = \sigma_{sn}(s, \pm 0) - \sigma_{sn}^\circ(s) \\ u^{*'}(s, \pm 0) = u'(s, \pm 0) - u^{\circ'}(s) \\ v^*(s, \pm 0) = v'(s, \pm 0) - v^{\circ'}(s) \\ \sigma_{yy}^*(x, 0) = \sigma_{yy}^*(x, H) = 0, \sigma_{xy}^*(x, 0) = \sigma_{xy}^*(x, H) = 0$$

Отметим, что скачки напряжений и производных от смещений на берегах разреза равны соответствующим скачкам на берегах включения.

Функцию напряжений $\Phi^*(s, n)$ будем искать в виде суммы двух функций

$$(2.2) \quad \Phi^*(s, n) = \Phi^1(s, n) + \Phi^2(x, y)$$

Здесь $\Phi^1(s, n)$ определяет решение S^1 задачи для бесконечной плоскости со скачками $f_j(s)$ ($j = 1, \dots, 4$) напряжений и производных от смещений на соответствующем разрезе, а $\Phi^2(x, y)$ — функция напряжений для сплошной полосы, загруженной по боковым граням усилиями, равными по величине и обратными по знаку напряжениям, определяемым функцией $\Phi^1(s, n)$ на L_j ($j = 1, 2$).

Согласно [4], интегральное представление функции напряжений $\Phi^1(s, n)$ имеет вид

$$(2.3) \quad \Phi^1(s, n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_1^\pm(\eta, n) e^{-i\eta s} d\eta$$

$$G_1^+(\eta, n) = [A_1(\eta) + n|\eta|A_2(\eta)] e^{-|\eta|n}, \quad n > 0$$

$$G_1^-(\eta, n) = [A_3(\eta) + n|\eta|A_4(\eta)] e^{|\eta|n}, \quad n < 0$$

Здесь $A_j(\eta)$ ($j = 1, \dots, 4$) — комплексные функции.

Используя выражения для компонент тензора напряжений и производных вектора смещений через функцию $\Phi^1(s, n)$, удовлетворяя условиям (1.1) и применяя обратное преобразование Фурье, получим алгебраическую систему уравнений для определения $A_j(\eta)$ ($j = 1, \dots, 4$) в виде

$$-\eta^2 [A_1(\eta) - A_3(\eta)] = F_1^*(\eta)$$

$$i\eta|\eta| [-A_1(\eta) + A_2(\eta) - A_3(\eta) - A_4(\eta)] = F_2^*(\eta)$$

$$\eta^2 [A_1(\eta) - 2A_2(\eta) - A_3(\eta) - 2A_4(\eta)] = [F_3^*(\eta) + k_2 F_1^*(\eta)] / k_1$$

$$i\eta|\eta| [A_1(\eta) + 3A_2(\eta) - A_3(\eta) - 3A_4(\eta)] = [F_4^*(\eta) + k_3 F_2^*(\eta)] / k_1$$

$$F_j^*(\eta) = \int_a^b f_j(t) e^{i\eta t} dt, \quad k_1 = \frac{(1 + \kappa_1)}{8\mu_1}$$

$$k_2 = \frac{(3 - \kappa_1)}{8\mu_1}, \quad k_3 = \frac{(5 + \kappa_1)}{8\mu_1}$$

Выражения для характеристик напряженно-деформируемого состояния в задаче S^1 через неизвестные скачки $f_j(s)$ ($j = 1, \dots, 4$) имеют вид

$$\{\sigma_{mn}^{1'}, u^{1'}, v^{1'}\} =$$

$$= \sum_{j=1}^4 \frac{1}{\pi} \int_a^b \{P_{mn}(t-s, n), P_u(t-s, n), P_v(t-s, n)\} f_j(t) dt$$

Здесь P_{mn} , P_u , P_v — функции, имеющие в предельном случае $n \rightarrow 0$ как сингулярную, так и регулярную части.

Функция $\Phi^2(x, y)$ имеет представление [4]

$$\Phi^2(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_2(\xi, y) e^{-i\xi x} d\xi$$

$$G_2(\xi, y) = [B_1(\xi) + \xi y B_2(\xi)] e^{-\xi y} + [B_3(\xi) + \xi y B_4(\xi)] e^{\xi y}$$

Здесь $B_j(\xi)$ ($j = 1, \dots, 4$) — неизвестные комплексные функции. Вводя обозначения $\alpha = \cos \omega$, $\beta = \sin \omega$, из (2.1) — (2.3) получим

$$-\frac{\partial^2 \Phi^2}{\partial x^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 \Phi^1}{\partial n^2} + \beta^2 \frac{\partial^2 \Phi^1}{\partial s^2} + 2\alpha\beta \frac{\partial^2 \Phi^1}{\partial s \partial n}$$

$$-\frac{\partial^2 \Phi^2}{\partial x \partial y} = \alpha\beta \left(\frac{\partial^2 \Phi^1}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 \Phi^1}{\partial n^2} \right) + (\alpha^2 - \beta^2) \frac{\partial^2 \Phi^1}{\partial s \partial n} \text{ на } L_j \quad (j = 1, 2)$$

Отсюда следует алгебраическая система четвертого порядка для определения неизвестных $B_j(\xi)$ ($j = 1, \dots, 4$). Решив эту систему, представим решение S^2 в виде

$$\{\sigma_{mn}^2, u^{2'}, v^{2'}\} =$$

$$= \sum_{j=1}^4 \frac{1}{\pi} \int_a^b \{Q_{mn}(t, s, n), Q_u(t, s, n), Q_v(t, s, n)\} f_j(t) dt$$

Здесь Q_{mn}, Q_u, Q_v — регулярные функции.

По известным решениям S^0, S^1 и S^2 определим напряженно-деформируемое состояние рассматриваемого тела в любой его точке

$$(2.4) \quad \sigma_{nn}(s, n) = \sigma_{nn}^0(s, n) + \sigma_{nn}^1(s, n) + \sigma_{nn}^2(s, n)$$

$$\sigma_{sn}(s, n) = \sigma_{sn}^0(s, n) + \sigma_{sn}^1(s, n) + \sigma_{sn}^2(s, n)$$

$$u'(s, n) = u^{0'}(s, n) + u^{1'}(s, n) + u^{2'}(s, n)$$

$$v'(s, n) = v^{0'}(s, n) + v^{1'}(s, n) + v^{2'}(s, n)$$

Переходя в (2.4) к пределу при $n \rightarrow +0$, получим следующие выражения напряжений и производных от смещений на верхнем берегу включения (значения соответствующих величин на нижней кромке включения определяются из (1.1) и (2.5)):

$$(2.5) \quad \sigma_{nn}(s, +0) = \sigma_{nn}^0(s) + 1/2 f_1(s) - m_1 t_2(s) - n_1 t_4(s) + k_1(s)$$

$$\sigma_{sn}(s, +0) = \sigma_{sn}^0(s) + 1/2 f_2(s) + m_1 t_1(s) - n_1 t_3(s) + k_2(s)$$

$$u'(s, +0) = u^{0'}(s) + 1/2 f_3(s) + m_2 t_2(s) + m_1 t_4(s) + k_3(s)$$

$$v'(s, +0) = v^{0'}(s) + 1/2 f_4(s) + m_2 t_1(s) - m_1 t_3(s) + k_4(s)$$

$$t_i(s) = \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{f_j(t) dt}{t-s}, \quad k_{ij}(s) = \sum_{j=1}^4 \int_a^b K_{ij}(s, t) f_j(t) dt \quad (i = 1, \dots, 4)$$

$$K_{1j}(s, t) = S_{1j}(\beta s, \alpha s, t) + S_{2j}(\beta s, \alpha s, t) \cos 2\omega - S_{3j}(\beta s, \alpha s, t) \sin 2\omega$$

$$K_{2j}(s, t) = S_{2j}(\beta s, \alpha s, t) \sin 2\omega + S_{3j}(\beta s, \alpha s, t) \cos 2\omega$$

$$K_{3j}(s, t) = -4 [m_1 S_{1j}(\beta s, \alpha s, t) - n_3 [S_{2j}(\beta s, \alpha s, t) \cos 2\omega - S_{3j}(\beta s, \alpha s, t) \sin 2\omega]]$$

$$K_{4j}(s, t) = -4\alpha [m_1 S_{1j}(\beta s, \alpha s, t) - S_{2j}(\beta s, \alpha s, t)] - \beta [k_3 S_{3j}(\beta s, \alpha s, t) - k_1 S_{4j}(\beta s, \alpha s, t)]$$

$$(2.6) \quad S_{ij}(x, y, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[M_{ij}(x, y, t, \xi) - M_{ij}\left(\beta \frac{H}{\alpha} - x, \alpha \frac{H}{\alpha} - y, \frac{H}{\alpha} - t, \xi\right) \right] d\xi$$

$$(2.7) \quad \begin{aligned} M_{1j}(x, y, t, \xi) &= (\Delta_{1j}H_1^+ - \Delta_{2j}H_1^-) / \Delta_0 \\ M_{2j}(x, y, t, \xi) &= (\Delta_{1j}H_2^+ - \Delta_{2j}H_2^-) / (2 \Delta_0) \quad (j = 1, 2) \\ M_{ij}(x, y, t, \xi) &= (-1)^j [\Delta_{3k}H_i^+ + \Delta_{4k}H_i^-] / (2 \Delta_0) \\ & \quad i = 3, 4; \quad j = 1, 2 \quad (j = 1, k = 2; \quad j = 2, k = 1) \\ \{\Delta_{1i}, \Delta_{2i}, \Delta_{3i}, \Delta_{4i}\} &= \{\Delta_1, \Delta_3 - \Delta_1, -\Delta_3\} \varphi_+ + \\ & \quad + \{\Delta_2, \Delta_4, -\Delta_2, -\Delta_4\} \varphi_- \\ i = 1, \quad \varphi_+ &= n_2 \sin y_+, \quad \varphi_- = n_3 \sin y_- \\ i = 2, \quad \varphi_+ &= -n_2 \cos y_+, \quad \varphi_- = n_3 \cos y_- \\ y_+ &= \xi (\beta t - x) + \omega, \quad y_- = \xi (\beta t - x) - \omega \\ \Delta_0(\xi) &= (e^{\xi H} - e^{-\xi H})^2 - \xi^2 H^2, \quad \Delta_1(\xi) = e^{2\xi H} - 1 \\ \Delta_2(\xi, t) &= 2 \xi H + 2 \alpha t \xi \Delta_1(\xi), \quad \Delta_3(\xi) = 2 \xi H \\ \Delta_4(\xi, t) &= 1 - e^{-2\xi H} + 2 \alpha t \xi \Delta_3(\xi) \\ H_{1\pm}(y, t, \xi) &= e^{-\xi(\alpha t \pm y)} \\ H_{i\pm}(y, t, \xi) &= H_{1\pm}(y, t, \xi) H_{i-1,1}^{\pm}(y, \xi) \quad (i = 2, 3, 4) \\ H_{j,1}^{\pm} &= r_j \pm 2 \xi (H - y) + (-1)^{j-1} \pm \exp[\mp 2 \xi (H - y)] \\ j = 1, 2, 3, \quad r_1 &= r_2 = 1, \quad r_3 = 5 \\ m_1 &= (k_3 / k_1 - 3) / 4, \quad m_2 = (k_1 + k_3 - 4 k_2 m_1) / 4 \\ n_1 &= 1/4 k_1, \quad n_2 = (k_2 / k_1 - 3) / 4, \quad n_3 = (k_2 / k_1 + 1) / 4 \end{aligned}$$

Функции $M_{ij}(x, y, t, \xi)$ ($i = 1, \dots, 4$) определяются по формулам (2.7) при $\varphi_{\pm} = \pm \sin y_{\pm}$, $\varphi_{\pm} = \pm \sin y_{\pm}$ (первый знак соответствует $j = 3$, второй — $j = 4$).

3. Соотношения (2.5) и условия взаимодействия тонкостенного упругого включения с матрицей (1.2) приводят к системе сингулярных интегральных уравнений

$$(3.1) \quad \begin{aligned} t_2(s) + \lambda_{11}t_4(s) - \lambda_1 \int_a^s f_2(t) dt + R_1(s) &= F_1(s) \\ t_2(s) + \lambda_{21}t_1(s) - \lambda_2 \int_a^s f_4(t) dt + R_2(s) &= F_2(s) \\ t_4(s) + \lambda_{31}t_2(s) + \int_a^s [\lambda_3 f_2(t) + \lambda_4 f_4(t)] dt + R_3(s) &= F_3(s) \\ f_3(s) &= -k_{30}f_1(s), \quad s \in [a, b] \\ R_1(s) &= \lambda_{12}k_1(s) - \lambda_{13}k_3(s), \quad R_2(s) = \lambda_{22}k_2(s) + \lambda_{23}k_4(s) \\ R_3(s) &= \lambda_{32}k_1(s), \quad F_1(s) = [k_{10}N_a - u^{\circ\prime}(s) - k_{20}\sigma_{nn}^{\circ}(s)] / \Lambda_1 \\ F_2(s) &= \mu_0 [v^{\circ\prime}(s) - \sigma_{ns}^{\circ}(s) / \mu_0 - c_a / (2h)] / \Lambda_2 \\ F_3(s) &= [\sigma_{nn}^{\circ}(s) + d_a / (2hk_{10}) - v_0 N_a] / \Lambda_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{11} &= (4 m_1 - k_{20} / k_1) / (4 \Lambda_1), \quad \lambda_{12} = k_{20} / \Lambda_1, \quad \lambda_{13} = 1 / \Lambda_1 \\ \lambda_{21} &= (\mu_0 m_2 - m_1) / \Lambda_2, \quad \lambda_{22} = 1 / \Lambda_2, \quad \lambda_{23} = \mu_0 / \Lambda_2 \\ \lambda_{31} &= m_1 / \Lambda_3 \\ \lambda_{32} &= 1 / \Lambda_3, \quad \lambda_1 = k_{10} / (2 h \Lambda_1), \quad \lambda_2 = \mu_0 / (2 h \Lambda_2) \\ \lambda_3 &= \nu_0 / (2 h \Lambda_3), \quad \lambda_4 = -1 / (2 h k_{10} \Lambda_3) \\ \Lambda_1 &= m_2 - k_{20} m_1, \quad \Lambda_2 = (n_1 - m_1 \mu_0), \quad \Lambda_3 = n_1 \end{aligned}$$

Искомые функции удовлетворяют дополнительным условиям (3.2)

$$(3.2) \quad \int_a^b f_j(t) dt = A^j \quad (j = 1, \dots, 4)$$

$$A^1 = 0, \quad A^2 = 2h(N_b - N_a), \quad A^3 = c_b - c_a, \quad A^4 = d_b - d_a$$

Нормальные напряжения N_s на торцах включения, а также перемещения c_s, d_s ($s = a, b$) нижней точки торца включения относительно верхней его точки вычисляются по формулам работы [3].

В случае абсолютно жесткого включения $E_0 \rightarrow \infty$ система (3.1) преобразуется к виду

$$(3.3) \quad m_2 t_1(s) - k_3(s) = -v^{\circ}(s), \quad m_2 t_2(s) - k_4(s) = -u^{\circ}(s)$$

$$f_3(s) = f_4(s) = 0, \quad s \in [a, b]$$

Когда $E_0 \rightarrow 0$, получаем систему сингулярных интегральных уравнений для трещины в полосе

$$(3.4) \quad n_1 t_4(s) + k_1(s) = \sigma_{ss}^{\circ}(s), \quad n_1 t_3(s) + k_2(s) = \sigma_{ns}^{\circ}(s)$$

$$f_1(s) = f_2(s) = 0, \quad s \in [a, b]$$

Уравнения (3.4) совпадают с результатами, полученными в работе [5].

Если в интегральных уравнениях (3.1) устремить H к бесконечности, то получим решение задачи для полуплоскости с включением. В этом случае фредгольмовские ядра $S_{ij}(x, y, t, \xi)$ (2.6) вычисляются в замкнутом виде.

4. Решение системы сингулярных интегральных уравнений (3.1) ищем в виде

$$(4.1) \quad f_j(\xi) = \left[A_0^j + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^j T_n(\xi) \right] \sqrt{1 - \xi^2} \quad (j = 1, \dots, 4)$$

$$\xi = (2s - a - b) / (b - a)$$

Здесь $T_n(\xi)$ — полиномы Чебышева первого рода. Подставляя (4.1) в условия (3.2) и интегрируя, получим $A_0^j = A^j / [\pi 2^{-1}(b - a)]$.

Подстановка ряда (4.1) в систему интегральных уравнений (3.1) и обычная процедура метода ортогональных полиномов [6, 7] приводят к системе алгебраических уравнений для определения искомых коэффициентов разложений

$$(4.2) \quad \frac{\pi}{2} \lambda_{11} A_k^4 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\delta_{kn} \frac{\pi}{2} + \lambda_1 B_{n-1, k-2} \right) A_n^2 + \sum_{j=1}^4 H_{n, k-1}^{1j} A_n^j \right] = F_{k-1}^1$$

$$\frac{\pi}{2} \lambda_{21} A_k^1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\delta_{kn} \frac{\pi}{2} + \lambda_2 B_{n-1, k-2} \right) A_n^3 + \sum_{j=1}^4 H_{n, k-1}^{2j} A_n^j \right] = F_{k-1}^2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\delta_{kn} \frac{\pi}{2} - \lambda_4' B_{n-1, k-2} \right) A_n^4 + \left(\lambda_{31} \delta_{kn} \frac{\pi}{2} - \lambda_3' B_{n-1, k-2} \right) A_n^2 + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^4 H_{n, k-1}^{3j} A_n^j \right] = F_{k-1}^3 \\ A_n^3 = -k_{30} A_n^1 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

$$F_k^i = \Phi_k^i - \lambda_i' \delta_k A_0^{i+1} - \sum_{j=1}^4 H_{0k}^{ij} A_0^j \quad (i = 1, 2)$$

$$F_k^3 = \Phi_k^3 + (\lambda_3' A_0^2 + \lambda_4' A_0^4) \delta_k - \sum_{j=1}^4 H_{0k}^{3j} A_0^j$$

$$\Phi_k^p = \int_{-1}^1 \varphi_p(\zeta) U_k(\zeta) \sqrt{1-\zeta^2} d\zeta$$

$$\varphi_i(\zeta) = F_i(\zeta) + A^{i+1} \lambda_i' / (b-a) \quad (i = 1, 2)$$

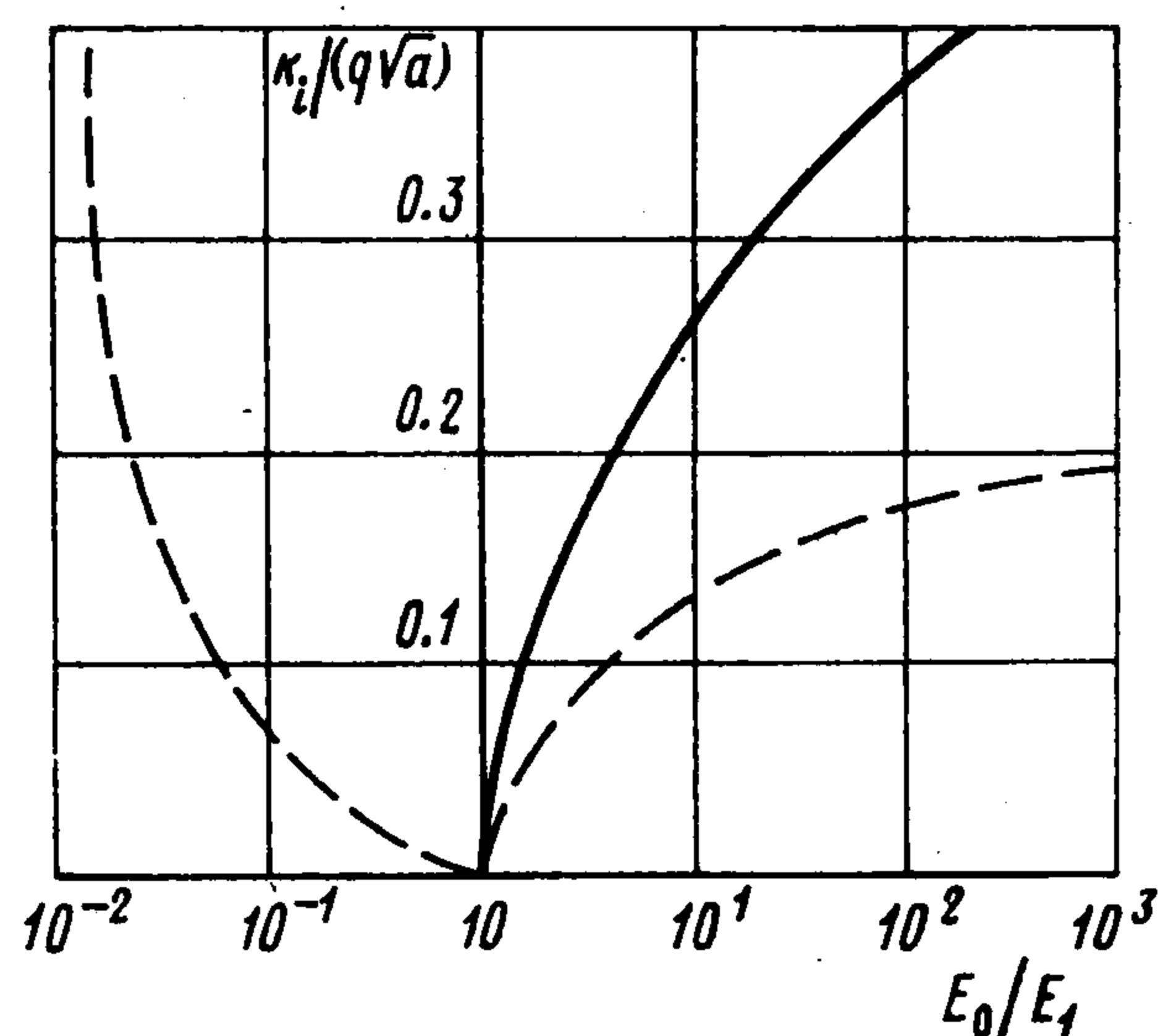
$$\varphi_3(\zeta) = F_3(\zeta) - (\lambda_3' A^2 + \lambda_4' A^4) / (b-a)$$

$$B_{n-1, k} = \frac{1}{n^2 - k^2} - \frac{1}{n^2 - (k-2)^2} \lambda_i' = \lambda_i' \frac{(b-a)}{2}$$

$$H_{nk}^{ij} = \int_{-1}^1 U_k(\zeta) \sqrt{1-\zeta^2} \int_{-1}^1 K_{ij}(\zeta, \tau) T_n(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} d\zeta$$

Здесь $U_k(\zeta)$ — полиномы Чебышева второго рода, $\delta_k = 0$ для четных k , $\delta_k = B_{-1, k}$ для нечетных k .

В виде примера рассмотрим случай равновесия полосы с тонкостенным упругим включением длины $2a$, расположенным на линии симметрии полосы под действием постоянных нормальных усилий на гранях полосы $\sigma_{yy}(x, 0) = \sigma_{yy}(x, H) = q$.



Фиг. 2

В этом случае $A^j = 0$, $\varphi_p(\zeta) = F_p(\zeta)$, $F_2(\zeta) = 0$ ($j = 1, \dots, 4$; $p = 1, 2, 3$), $F_1(\zeta)$, $F_3(\zeta)$ — нечетные функции. Тогда из системы уравнений (4.2) следует

$$(4.3) \quad f_j(\xi) = \left[\sum_{n=1}^{\infty} A_{2n-1}^j T_{2n-1}(\xi) \right] / \sqrt{1-\xi^2} \quad (j = 2, 4)$$

$$f_1(s) = f_3(s) = 0, \quad A_{k^1} = A_{k^3} = 0, \quad A_{2k^2} = A_{2k^4} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Коэффициенты интенсивности напряжений у правого торца включения определяются по формулам

$$\{k_{-1}^{\pm}(a), k_{-2}^{\pm}(a)\} = \lim_{s \rightarrow a-0} [\sqrt{a-s} \{\sigma_{nn}(s, \pm 0), \sigma_{sn}(s, \pm 0)\}]$$

$$\{k_{+1}(a), k_{+2}(a)\} = \lim_{s \rightarrow a+0} [\sqrt{s-a} \{\sigma_{nn}(s, 0), \sigma_{sn}(s, 0)\}]$$

В рассматриваемом случае система сингулярных интегральных уравнений решалась численно. Для достижения точности вычислений в 2% при разных значениях относительной ширины полосы H/a требуется от 15 до 40 членов разложения (4.3). Сходимость процесса вычислений исследовалась путем сравнения последующих приближений с предыдущими. На фиг. 2 представлены результаты вычислений зависимости коэффициентов интенсивности напряжений k_1 и k_2 от относительной жесткости включения E_0/E_1 . Сплошная линия соответствует k_2 , штриховая — k_1 .

Поступила 20 II 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Сулим Г. Т. Концентрация напряжений на тонкостенном включении в кусочно-однородной плоскости. Вісник Львівськ. ун-ту. Сер. механ., матем., 1974, вип. 9.
2. Сулим Г. Т., Грилицкий Д. В. Напряженное состояние кусочно-однородной плоскости с тонкостенным упругим включением конечной длины. Прикл. механ., 1972, т. 8, вып. 11.
3. Грилицкий Д. В., Сулим Г. Т. Периодическая задача для упругой плоскости с тонкостенными включениями. ПММ, 1975, т. 39, вып. 3.
4. Снеддон И. Преобразования Фурье. М., Изд-во иностр. лит., 1955.
5. Krenk Steen. The problem of an inclined cracking an elastic strip. Rapp. Afd. bae rende konstr. Denm. tekn. højsk., 1974, N 50, II.
6. Сулим Г. Т., Грилицкий Д. В. Решение сингулярных интегральных уравнений плоской задачи об упругом равновесии составных тел с трещинами. Физико-химическая механика полимеров, 1976, № 2.
7. Erdogan F., Gupta G. D., Cook T. S. Numerical solution of singular integral equations. In: Mechanics of fracture, vol. 1. Leyden, Noordhoff Internat. Publ., 1973, p. 385—425.