Прикладная математика и механика. Том 43, 1979

УДК 539.3

НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Б. Е. Победря

(Москва)

Дается постановка квазистатических смешанных задач механики деформируемого твердого тела в перемещениях (задача А) и в напряжениях (задача В). Приводится соответствующая вариационная формулировка этих задач на основе введения лагранжиана и кастильяниана, а также определение обобщенного решения этих задач. При некоторых ограничениях на определяющие соотношения доказываются теоремы существования обобщенного решения задачи А и его единственности, теорема о минимуме лагранжиана, а также сходимость метода последовательных приближений при условии, что соответствующая линейная задача имеет единственное решение. Рассматриваются методы ускорения сходимости, в том числе и «быстро сходящийся» метод последовательных приближений, имеющий скорость сходимости, существенно более высокую, чем геометрическая прогрессия. Приводится новая постановка квазистатической задачи механики деформируемого твердого тела в напряжениях (задача Б), которая сводится к решению шести уравнений относительно компонент тензора напряжений при шести граничных условиях. Доказывается эквивалентность постановки задачи Б и классических постановок.

1. Пусть в некоторой декартовой системе координат определяющие соотношения, связывающие тензор напряжений σ и тензор деформации ε, задаются в операторном виде [1]

$$\sigma_{ij} = F_{ij}(\varepsilon) \tag{1.1}$$

Деформации будем считать малыми, так что выполняются соотношения Коши, связывающие их с вектором перемещения

$$\varepsilon_{ij} = {}^1/_2\,(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (\varepsilon = \operatorname{Def} \mathbf{u}) \tag{1.2}$$

Пусть заданы уравнения равновесия среды ($\mathbf{X}$ — заданные объемные силы) и граничные условия смешанного типа: на части границы тела Σ_1 заданы перемещения $\mathbf{u}^\circ$, а на другой части Σ_2 — нагрузки S°

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0 \quad u_i|_{\Sigma_1} = u_i^\circ, \quad \sigma_{ij}n_j|_{\Sigma_2} = S_i^\circ \tag{1.3}$$

Будем считать, что все рассматриваемые функции обладают гладкостью, необходимой для проведения используемых преобразований, и изменяются на временном отрезке $[0, t_1]$, т. е. $0 \leqslant t \leqslant t_1$. Кроме того, будем предполагать наличие «естественного» состояния, т. е. считать, что в момент, предшествующий $t = 0$, тензоры деформаций и напряжений вместе со всеми своими производными равны нулю. Оператор (1.1) будем считать локальным по координатам $\mathbf{x}$.

Подставив соотношения (1.2) в (1.1), а результат в (1.3), получим систему трех уравнений относительно компонент вектора перемещения $\mathbf{u}$ с заданными граничными условиями

(1.4) $$\sigma_{ij,j}(\mathbf{u}) + X_i = 0$$
$$u_i|_{\Sigma_1} = u_i^\circ, \quad \sigma_{ij}(\mathbf{u})n_j|_{\Sigma_2} = S_i^\circ$$

Сокращенная запись $\sigma_{ij}(\mathbf{u})$ означает следующее:

$$\sigma_{ij}(\mathbf{u}) \equiv F_{ij}(\varepsilon(\mathbf{u}))$$

где $\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})$ определяются соотношениями (1.2).

Соотношениями (1.1) — (1.3) или (1.4) дается постановка квазистатической (статической) задачи механики деформируемого твердого тела в перемещениях (задача А).

Помножим скалярно уравнения (1.4) на произвольный пока вектор $\mathbf{v}$ и проинтегрируем по объему V, занимаемому телом. Тогда, используя теорему Остроградского — Гаусса [1] и статические граничные условия в (1.5), получим

(1.5) $$\int\limits_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}(\mathbf{v})\,dV = A^e(\mathbf{v}) + A_{\Sigma_1}(\mathbf{v})$$
$$A^e(\mathbf{v}) \equiv \int\limits_V X_i v_i\,dV + \int\limits_{\Sigma_2} S_i^\circ v_i\,d\Sigma$$
$$A_{\Sigma_1}(\mathbf{v}) \equiv \int\limits_{\Sigma_1} \sigma_{ij}n_j v_i\,d\Sigma$$

где $A^e(\mathbf{v})$ — работа внешних сил на перемещении $\mathbf{v}$, а $A_{\Sigma_1}(\mathbf{v})$ — работа внутренних сил на заданном перемещении $\mathbf{v}$.

Назовем кинематической системой произвольное векторное поле $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, а статической системой — произвольное поле симметричных тензоров второго ранга $\tau(\mathbf{x}, t)$. Кинематически допустимой называется кинематическая система, удовлетворяющая кинематическим граничным условиям в (1.3). Будем писать

$$\mathbf{v} \in U, \quad \text{если} \quad v_i|_{\Sigma_1} = u_i^\circ$$

Статически допустимой называется система, удовлетворяющая уравнениям равновесия (1.3) и статическим граничным условиям. Будем писать

$$\tau \in T, \quad \text{если} \quad \tau_{ij,j} + X_i = 0, \quad \tau_{ij}n_j|_{\Sigma_2} = S_i^\circ$$

Разность двух кинематически допустимых систем удовлетворяет однородным кинематическим граничным условиям

(1.6) $$\mathbf{v} \in U_0, \quad \text{если} \quad v_i|_{\Sigma_1} = 0$$

а разность двух статически допустимых систем — однородным уравнениям равновесия и однородным статическим граничным условиям

(1.7) $$\tau \in T_0, \quad \text{если} \quad \tau_{ij,j} = 0, \quad \tau_{ij}n_j|_{\Sigma_2} = 0$$

Из (1.6) и (1.5) вытекает, что для функции $\mathbf{v}(\mathbf{x}) \in U_0$ из (1.4) следует

(1.8) $$\int\limits_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}(\mathbf{v})\,dV = A^e(\mathbf{v})$$

2. Назовем обобщенным решением задачи А функцию $\mathbf{u} \in U$, для которой справедливы соотношения Коши (1.2) и определяющие уравнения (1.1) и которая удовлетворяет тождествам (1.8) для всякой достаточно гладкой функции $\mathbf{v} \in U_0$. Другими словами, обобщенным решением задачи А называется функция $\mathbf{u} \in U$, удовлетворяющая для всякой гладкой функции $\mathbf{v} \in U_0$ интегральному тождеству

$$\int\limits_V \sigma_{ij}(\mathbf{u})\,\varepsilon_{ij}(\mathbf{v})\,dV = A^e(\mathbf{v}) \tag{2.1}$$

Выше было показано, что решение задачи А является также обобщенным ее решением.

Теорема 2.1. Если обобщенное решение достаточно гладкое, то оно является решением задачи А.

В самом деле, решение задачи А должно удовлетворять условиям (1.1) — (1.3). По определению обобщенного решения выполняются соотношения (1.1), (1.2), первое из граничных условий в (1.3). Применяя к тождеству (1.8) теорему Остроградского — Гаусса, получим

$$\int\limits_V (\sigma_{ij,\,j} + X_i)\,v_i\,dV - \int\limits_{\Sigma_2} (\sigma_{ij}n_j - S_i^\circ)\,v_i\,d\Sigma = 0 \tag{2.2}$$

В силу произвольности поля $\mathbf{v} \in U_0$ отсюда следуют уравнения равновесия и статические граничные условия (1.3).

Предположим теперь, что тензор напряжений потенциальный. Это означает, что существует такой скалярный оператор от деформаций $W(\boldsymbol{\varepsilon})$, что

$$\sigma_{ij} = F_{ij}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{\partial W(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \varepsilon_{ij}} \tag{2.3}$$

Здесь имеется в виду функциональная производная, которая определяется следующим образом вместе с дифференциалом Df оператора $f(\mathbf{a})$:

$$Df\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\} \equiv \left[\frac{\partial f}{\partial a_{ij}}\,b_{ij}\right] \equiv \frac{d}{d\xi} f(\mathbf{a} + \xi\mathbf{b})\,|_{\xi=0}$$

где ξ — числовой параметр.

Если справедливы соотношения (2.3) и массовые и поверхностные силы обладают потенциалом, то можно ввести «лагранжиан» L по формуле

$$L(\mathbf{u}) \equiv \Phi(\mathbf{u}) - A^e(\mathbf{u}), \qquad \Phi(\mathbf{u}) \equiv \int\limits_V W\,dV \tag{2.4}$$

Тогда, очевидно, тождество (2.1) можно записать в виде

$$DL\,\{\varepsilon(\mathbf{u}),\ \ \varepsilon(\mathbf{v})\} \equiv D\,\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} = 0$$

Итак, задача отыскания обобщенного решения задачи А эквивалентна задаче отыскания «стационарной точки» лагранжиана $L(\mathbf{u})$.

Если соотношения (2.3) достаточно гладки, то можно построить функциональные производные типа

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) \equiv \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}(\mathbf{u}) \tag{2.5}$$

Лемма 1. Если существуют функциональные производные (2.5) определяющих соотношений (2.3), то справедливо тождество

$$\Phi(\mathbf{u}_2) = \Phi(\mathbf{u}_1) + A^e(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) + \tag{2.6}$$
$$+\frac{1}{2}\int_V \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\varepsilon_{kl}}\{\mathbf{u}_1 + \eta(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1)\}[\varepsilon_{kl}(\mathbf{u}_2) - \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}_1)] \times$$
$$\times[\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}_2) - \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}_1)]\,dV$$

В самом деле, введем функцию числового аргумента ξ

$$f(\xi) \equiv \Phi\{\mathbf{u}_1 - \xi(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1)\},\quad 0 \leqslant \xi \leqslant 1 \tag{2.7}$$

которая допускает на указанном отрезке представление

$$f(1) = f(0) + f'(0) + {}^1/_2 f''(\eta),\quad 0 < \eta < 1 \tag{2.8}$$

Подставляя в (2.8) выражения, полученные из (2.7), и учитывая (2.3) и (2.4), получим

$$\Phi(\mathbf{u}_2) = \Phi(\mathbf{u}_1) + \int_V \sigma_{ij}(\mathbf{u}_1)[\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}_2) - \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}_1)]\,dV +$$
$$+\frac{1}{2}\int_V \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\varepsilon_{kl}}\{\mathbf{u}_1 + \eta(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1)\}[\varepsilon_{kl}(\mathbf{u}_2) - \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}_1)][\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}_2) - \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}_1)]\,dV$$

Учитывая (1.8), отсюда получим (2.6).

Теорема 2.2. Предположим, что определяющие уравнения (1.1) таковы, что для всякого симметричного тензора второго ранга $\mathbf{h}$ выполняется неравенство

$$\left[\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\varepsilon_{kl}}h_{kl}\right]h_{ij} \geqslant m_0 h_{ij}h_{ij},\quad m_0 > 0 \tag{2.9}$$

Тогда стационарная точка лагранжиана (2.5) имеет минимум.

В самом деле, полагая в тождестве (2.6) $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v} \in U_0$, а $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}^*$, где $\mathbf{u}^*$ — решение задачи A, имеем, учитывая (2.9)

$$L(\mathbf{v}) \equiv \Phi(\mathbf{v}) - A^e(\mathbf{v}) \geqslant \Phi(\mathbf{u}^*) - A^e(\mathbf{u}^*) +$$
$$+\frac{m_0}{2}\int_V \varepsilon_{ij}(\mathbf{v} - \mathbf{u}^*)\,\varepsilon_{ij}(\mathbf{v} - \mathbf{u}^*)\,dV \geqslant \Phi(\mathbf{u}^*) - A^e(\mathbf{u}^*) \equiv L(\mathbf{u}^*)$$

что и требовалось доказать.

Теорема 2.3. Если выполняются условия (2.9), то существует не более одного обобщенного решения задачи A.

Предположим противное: существуют решения $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$. Тогда из (2.1) следует, что они удовлетворяют тождеству

$$\int_V [\sigma_{ij}(\mathbf{u}_2) - \sigma_{ij}(\mathbf{u}_1)]\,\varepsilon_{ij}(\mathbf{v})\,dV \tag{2.10}$$

Далее

$$[\sigma_{ij}(\mathbf{u}_2) - \sigma_{ij}(\mathbf{u}_1)]\,\varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) = \tag{2.11}$$
$$= \int_0^1 \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\varepsilon_{kl}}\{\mathbf{u}_1 + \xi(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1)\}[\varepsilon_{kl}(\mathbf{u}_2) - \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}_1)]\,\varepsilon_{ij}(\mathbf{v})\,d\xi$$

Поэтому, полагая в (2.11) $\varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) \equiv \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}_2) - \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}_1)$, получим из (2.9)

$$0 \geqslant \int_V [\sigma_{ij}(\mathbf{u}_2) - \sigma_{ij}(\mathbf{u}_1)][\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}_2) - \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}_1)]\,dV \geqslant$$
$$\geqslant m_0 \int_V \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1)\,\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1)\,dV$$

Отсюда следует, что

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}_2) \equiv \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}_1)$$

т. е. поля $\mathbf{u}_1(\mathbf{x})$ и $\mathbf{u}_2(\mathbf{x})$ могут различаться только на смещение как жесткого целого. Однако в силу первого из граничных условий в (1.4) такие смещения недопустимы. Отсюда следует единственность решения задачи А.

Теорема 2.4. Точка минимума лагранжиана является единственной. Пусть $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ — две точки минимума фунционала L. Тогда для них выполняется условие (2.10) и в силу теоремы 2.3 $\mathbf{u}_2 \equiv \mathbf{u}_1$.

3. Рассмотрим теперь некоторый линейный тензор-оператор от деформаций

$$p_{ij} = P_{ij}(\varepsilon) \tag{3.1}$$

такой, что в функциональном пространстве $\mathbf{u} \in U_0$ величина

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_p \equiv \int_V p_{ij}(\mathbf{u})\,\varepsilon_{ij}(\mathbf{v})\,dV \tag{3.2}$$

удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения [2], так что рассматриваемое функциональное пространство П гильбертово. Пусть, кроме того, оператор (3.1) таков, что для произвольного симметричного тензора $\mathbf{h}$ выполняются неравенства

$$m p_{ij}(\mathbf{h}) h_{ij} \leqslant \left[\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} h_{kl}\right] h_{ij} \leqslant M p_{ij}(\mathbf{h}) h_{ij}, \quad 0 < m \leqslant M \tag{3.3}$$

Заметим, что если

$$p_{ij}(\varepsilon) \equiv {}^1/_2\,(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})\,\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{ij}$$

то первое из неравенств (3.3) эквивалентно при $m = m_0$ неравенству (2.9), причем гильбертовость пространства П в этом случае следует из неравенств Корна [3].

Если теперь существует единственное обобщенное решение задачи А для случая, когда оператор определяющих соотношений (1.1) является оператором P_{ij} (3.1) (задача A_p), можно организовать метод последовательных приближений

$$\begin{gathered} p_{ij,j}(\mathbf{u}^{(n+1)}) = p_{ij,j}(\mathbf{u}^{(n)}) - \beta^{(n)}[\sigma_{ij,j}(\mathbf{u}^{(n)}) + X_i] \\ u_i^{(n+1)}|_{\Sigma_1} = u_i^\circ, \quad p_{ij}(\mathbf{u}^{(n+1)}) n_j|_{\Sigma_2} = \\ = p_{ij}(u^{(n)}) n_j|_{\Sigma_2} - \beta^{(n)}[\sigma_{ij}(u^{(n)}) n_j|_{\Sigma_2} - S_i^\circ] \end{gathered} \tag{3.4}$$

начиная с некоторого нулевого приближения $\mathbf{u}^{(0)}$ и полагая $n = 0, 1, \ldots$.

Теорема 3.1. Пусть существует единственное обобщенное решение задачи A_p, справедливы условия (3.3), объемные и поверхностные силы принадлежат пространствам L_q [2], причем [4]

$$X \in L_q(V), \quad q > {}^6/_5; \quad S^\circ \in L_q(\Sigma_2), \quad q > {}^4/_3 \tag{3.5}$$

Пусть, кроме того, для нулевого приближения $\mathbf{u}^{(0)}$ для произвольного симметричного тензора $\mathbf{h}$ выполняется условие

$$[\sigma_{ij}(\mathbf{u}^{(0)}) - p_{ij}(\mathbf{u}^{(0)})]\, h_{ij} \leqslant m p_{ij}(\mathbf{h})\, h_{ij} \tag{3.6}$$

Тогда в некоторой окрестности

$$\| \mathbf{u} - \mathbf{u}^{(0)} \|_p \leqslant r \tag{3.7}$$

существует обобщенное решение $\mathbf{u}^*$ задачи А, единственное в этой окрестности, и при любом значении итерационного параметра $\beta \in (0, 2/M]$ к нему сходится начинающийся с $\mathbf{u}^{(0)}$ процесс последовательных приближений (3.4), причем

$$\| \mathbf{u}^{(n)} - \mathbf{u}^{(0)} \|_p \leqslant q^n \| \mathbf{u}^{(0)} - \mathbf{u}^* \|_p \tag{3.8}$$
$$q \equiv \max(| 1 - \beta m |, \ | 1 - \beta M |) < 1$$

Для доказательства рассмотрим тождество

$$\begin{gathered}\int\limits_V p_{ij}(\mathbf{u})\, \varepsilon_{ij}(\mathbf{v})\, dV = \int\limits_V p_{ij}(\mathbf{u})\, \varepsilon_{ij}(\mathbf{v})\, dV - \\ - \beta \left[\int\limits_V \sigma_{ij}(\mathbf{u})\, \varepsilon_{ij}(\mathbf{v})\, dV - A^e(\mathbf{v})\right]\end{gathered} \tag{3.9}$$

Слева в (3.9) стоит скалярное призведение $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_p$. Правая часть представляет собой, согласно (3.3), линейный функционал от $\mathbf{v}$. Используя теоремы вложения С. Л. Соболева [5], можно установить, что для этого необходимо, чтобы выполнялось условие (3.5). Тогда по теореме Рисса этот функционал может быть представлен в виде скалярного произведения $(\mathbf{u}', \mathbf{v})$, где $\mathbf{u}' \in \Pi$. Следовательно, некоторый оператор Q ставит в соответствие каждой функции $\mathbf{u} \in \Pi$ функцию $\mathbf{u}' \in \Pi$. Поэтому нахождение обобщенного решения задачи А сводится к решению операторного уравнения

$$\mathbf{u} = Q\mathbf{u}$$

Для двух векторных полей $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ и их разности $\mathbf{w} = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1$ имеем из (3.9), используя равенство (2.11) и условие (3.3)

$$\begin{gathered}| (Q\mathbf{u}_2 - Q\mathbf{u}_1, \mathbf{w})_p | = | (\mathbf{w}, \mathbf{w})_p - \\ - \beta \int\limits_V [\sigma_{ij}(\mathbf{u}_2) - \sigma_{ij}(\mathbf{u}_1)]\, w_{ij}\, dV | \leqslant q \| \mathbf{w} \|_p^2 \\ w_{ij} \equiv \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}_2) - \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}_1)\end{gathered} \tag{3.10}$$

где q определяется из второго соотношения (3.8). При этом

$$| 1 - \beta m | \geqslant | 1 - \beta M |, \quad 0 < \beta \leqslant 2/(m + M)$$
$$| 1 - \beta M | \geqslant | 1 - \beta m |, \quad 2/(m + M) \leqslant \beta \leqslant 2/M$$

Поэтому при $0 < \beta \leqslant 2/M$ выполняется условие $q < 1$, и неравенство (3.15) удовлетворяется, если

$$\| Q\mathbf{u}_2 - Q\mathbf{u}_1 \|_p \leqslant q \| \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1 \|_p \tag{3.11}$$

Заметим, что наименьшее значение $q = (M - m)/(M + m)$ величина q достигает при $\beta = 2/(m + M)$. Заметим также, что на каждом итерационном шаге можно изменять значения β так, чтобы $\beta^{(n)} \in (0, 2/M]$.

Из неравенства (3.11) следует, что оператор Q осуществляет в П сжатые отображения [2]. Далее имеем

$$(Q\mathbf{u} - Q\mathbf{u}^{(0)}, \mathbf{v})_p = (Q\mathbf{u} - Q\mathbf{u}^{(0)}, \mathbf{v})_p + (Q\mathbf{u}^{(0)} - \mathbf{u}^{(0)}, \mathbf{v})_p \tag{3.12}$$

Но из тождества (3.9) следует

$$(Q\mathbf{u}^{(0)} - \mathbf{u}^{(0)}, \mathbf{v})_p = \beta \int\limits_V [\sigma_{ij}(\mathbf{u}^{(0)}) - p_{ij}(\mathbf{u}^{(0)})]\, \varepsilon_{ij}(\mathbf{v})\, dV \tag{3.13}$$

Применяя к (3.13) условие (3.6) и полагая в (3.12) $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^{(0)}$, получим

$$\| Q\mathbf{u} - \mathbf{u}^{(0)} \|_p \leqslant (q + \beta m)\, r \leqslant r$$

т. е. оператор Q, совершая сжатые отображения, не выводит ни одну точку из окрестности (3.7). Поэтому, согласно принципу сжатых отображений [2], существует обобщенное решение задачи А. Его единственность следует из соответствующего применения теоремы 2.3.

Из формулы (3.11) следует, что процесс последовательных приближений сходится как геометрическая прогрессия со знаменателем q. Более практическое значение имеет следствие формулы (3.11)

$$\| \mathbf{u}^{(n)} - \mathbf{u}^* \|_p \leqslant \frac{q^n}{1-q} \| \mathbf{u}^{(1)} - \mathbf{u}^{(0)} \|_p$$

Теорема доказана.

Из сходимости $\mathbf{u}^{(n)}$ к $\mathbf{u}^*$ следует также сходимость $L(\mathbf{u}^{(n)})$ к $L(\mathbf{u}^*)$ [6].

Для того чтобы получить сходимость итерационного процесса более быструю, чем геометрическая прогрессия, следует наложить ограничения на вторые функциональные производные определяющих соотношений (1.1). Пусть для произвольного симметричного тензора $\mathbf{h}$ справедливо неравенство

$$\left| \left[\frac{\partial^2 \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}\, \partial \varepsilon_{mn}} h_{kl} h_{mn} \right] h_{ij} \right| \leqslant \Lambda\, (h_{ij} h_{ij})^{3/2}, \quad \Lambda > 0 \tag{3.14}$$

Предположим далее, что пространство Π_1 с введенным скалярным произведением

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_1 \equiv \int\limits_V \left[\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) \right] \varepsilon_{kl}(\mathbf{v})\, dV$$

является гильбертовым для функций $\mathbf{u} \in U_0$, определенных в конечной области V. Тогда справедлива следующая теорема

Теорема 3.2. («Быстро сходящийся» метод.) Пусть оператор P_{ij} (3.1) имеет вид

$$p_{ij}(\mathbf{h}) \equiv \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} h_{kl}$$

и существует единственное обобщенное решение соответствующей задачи A_p. Пусть выполнены неравенство (3.14) и неравенство

$$m_1 h_{ij} h_{ij} \leqslant \left[\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} h_{kl} \right] h_{ij} \leqslant M_1 h_{ij} h_{ij}, \quad 0 < m_1 \leqslant M_1$$

Пусть, кроме того, a — такое положительное число, что

$$\int\limits_V [\sigma_{ij}(\mathbf{u}^{(0)}) - p_{ij}(\mathbf{u}^{(0)})]\, \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}^{(0)})\, dV \leqslant m_1 a \int\limits_V \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}^{(0)})\, \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}^{(0)})\, dV$$

Тогда найдется такое число α

$$0 < \alpha \leqslant 1$$

что задача А имеет единственное обобщенное решение $\mathbf{u}^*$ в окрестности

$$\| \mathbf{u}^{(0)} - \mathbf{u}^* \|_1 \leqslant r_0$$

если выполняется неравенство

$$q \leqslant a^{-\alpha} C; \quad q \equiv {}^3/_2 \frac{\Lambda}{m_1} V^{-\alpha/2}, \quad C \equiv \alpha (1 + \alpha)^{-(1+\alpha)/\alpha}$$

где r_0 — меньший корень уравнения

$$qr^{1+\alpha} - r + a = 0$$

При $\beta = 1$ к этому решению сходится начинающийся с $\mathbf{u}^{(0)}$ процесс последовательных приближений, причем

$$\| \mathbf{u}^{(n)} - \mathbf{u}^* \|_1 \leqslant C_1 \delta^{(1+\alpha)^n}$$

$$\delta \equiv C^{1/\alpha}, \quad C_1 \equiv \frac{a}{\delta (1 - \delta)}$$

Доказательство этой теоремы приведено в работе [6]. Там же построены некоторые примеры применения теорем 3.1 и 3.2 к конкретным вязкоупругим и упругопластическим средам.

4. Предположим теперь, что операторные соотношения (1.1) однозначно разрешимы относительно деформаций

$$\varepsilon_{ij} = G_{ij}(\sigma) \tag{4.1}$$

Как известно, условиями интегрируемости системы дифференциальных уравнений (1.2) относительно перемещений являются уравнения совместности Сен-Венана, обращающие в нуль симметричный тензор несовместности η

$$\eta_{ij} \equiv \epsilon_{ikl} \epsilon_{jmn} \varepsilon_{kn,\, lm} = 0 \quad (\eta \equiv \operatorname{Ink} \varepsilon = 0) \tag{4.2}$$

Для односвязной области V условия (4.2) являются необходимыми и достаточными для однозначной разрешимости уравнений (4.2) относительно перемещений, например, в виде, предложенном Чезаро [7]

$$u_i(\mathbf{x}) = u_i' - (x_j - x_j')\, \omega_{ij}' + \int\limits_{M'(\mathbf{x}')}^{M(\mathbf{x})} [\varepsilon_{im} + (x_j - \xi_j)(\varepsilon_{mi,\, j} - \varepsilon_{mj,\, i})]\, d\xi_m \tag{4.3}$$

где u_i' и ω_{ij}' — известные значения перемещений и поворотов в некоторой точке M' $(\mathbf{x}')$ области V. Таким образом, если выполняются условия (4.2), то найдется такой вектор $\mathbf{u}$, для которого справедливы соотношения Коши. Очевидно, что девиатор и шаровая часть тензора η, согласно (4.2), обращаются в нуль. Поэтому их комбинация также обращается в нуль

$$\Delta \varepsilon_{ij} + \theta_{,\, ij} - \varepsilon_{ik,\, kj} - \varepsilon_{jk,\, ki} + \xi_{ij} (\varepsilon_{kl,\, kl} - \Delta \theta) = 0 \tag{4.4}$$

где ξ — произвольный симметричный постоянный тензор.

Подставив соотношения (4.1) в (4.2) и (4.3), получим систему шести уравнений относительно компонент тензора напряжений и граничные условия

(4.5) $$\eta_{ij}(\sigma) = 0$$
$$u_i(\sigma)|_{\Sigma_1} = u_i^\circ, \quad \sigma_{ij}n_j|_{\Sigma_2} = S_i^\circ$$

Таким образом, соотношениями (1.3), (4.2), (4.1) или уравнениями (1.3) и соотношениями (4.5) дается постановка квазистатической (статической) задачи механики деформируемого твердого тела в напряжениях (задача В). Очевидно, что постановки задач А и В эквивалентны между собой.

Помножим скалярно соотношения (1.2) на тензор $\tau \in T_0$ и проинтегрируем по объему V. Тогда, используя теорему Остроградского — Гаусса и условия (1.1), получим

(4.6) $$\int\limits_V \varepsilon_{ij}\tau_{ij}\,dV = A_{\Sigma_1}(u^\circ)$$

Назовем обобщенным решением задачи В тензор $\sigma \in T$, для которого справедливы определяющие соотношения (4.1) и который удовлетворяет тождествам (4.6) для всякой достаточно гладкой тензор-функции $\tau \in T_0$. Другими словами, обобщенным решением задачи В называется тензор-функция $\sigma \in T$, удовлетворяющая для всякой гладкой тензор-функции $\tau \in T_0$ интегральному тождеству

(4.7) $$\int\limits_V \varepsilon_{ij}(\sigma)\,\tau_{ij}\,dV = A_{\Sigma_1}(\mathbf{u}^\circ)$$

Выше было показано, что решение задачи В является также обобщенным ее решением.

Теорема 4.1. Если обобщенное решение достаточно гладкое, то оно является решением задачи В.

В самом деле, решение задачи В в односвязной области должно удовлетворять условиям (1.3), (4.2), (4.1). По определению обобщенного решения выполняются уравнение (1.3), соотношения (4.1) и второе из граничных условий в (1.3). Вводя систему гладких функций $\varkappa_i(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in V$ и $\varkappa_i'(\mathbf{y})$, $\mathbf{y} \in \Sigma_2$ (обобщенные множители Лагранжа), можно записать

(4.8) $$\int\limits_{\Sigma_1} \tau_{ij}n_j u_i^\circ\,d\Sigma - \int\limits_V \varepsilon_{ij}\tau_{ij}\,dV - \int\limits_V \varkappa_i(\sigma_{ij,j} + X_i)\,dV -$$
$$- \int\limits_{\Sigma_2} \varkappa_i'(\sigma_{ij}n_j - S_i^\circ)\,d\Sigma = 0$$

Применяя к (4.8) теорему Остроградского — Гаусса в силу произвольности поля $\tau \in T_0$, получим

(4.9) $$\varepsilon_{ij} = {}^1/_2\,(\varkappa_{i,j} + \varkappa_{j,i}), \quad \varkappa_i|_{\Sigma_1} = u_i^\circ$$

Для того чтобы существовало непрерывное поле $\varkappa$, необходимо и достаточно выполнения условий (4.2), причем из (4.9) следует выполнение первого из граничных условий (1.3).

Предположим теперь, что тензор деформаций потенциальный, т. е. существует такой скалярный оператор от напряжений $w(\sigma)$, что

(4.10) $$\varepsilon_{ij} = G_{ij}(\sigma) = \partial w(\sigma)/\partial\sigma_{ij}$$

В этом случае можно ввести так называемый «кастильяниан» K по формуле

$$K(\sigma) \equiv -\varphi(\sigma) + A_{\Sigma_1}(\mathbf{u}^\circ), \quad \varphi(\sigma) \equiv \int\limits_V w\,dV$$

Тогда, очевидно, тождество (4.7) можно записать в виде

$$DK\{\sigma, \tau\} = 0$$

Следовательно, задача отыскания обобщенного решения задачи В эквивалентна задаче отыскания «стационарной точки» кастильяниана $K(\sigma)$.

Не останавливаясь на условиях существования максимума кастильяниана, отметим следующее. Согласно обобщенному преобразованию Лежандра, поставим в соответствие оператору $W(\varepsilon)$, для которого справедливы соотношения (2.3), оператор $w(\sigma)$, для которого выполняются соотношения (4.10), таким образом, что выполняется тождество

$$W + w - \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = \text{const} \tag{4.11}$$

При этом, если $W(0) = 0$ и $w(0) = 0$, то постоянная в правой части (4.11) равна нулю.

Теорема 4.2. В положении равновесия лагранжиан совпадает с кастильянианом.

В самом деле, рассмотрим тождество (1.5). Используя соотношения (4.11), получим из него

$$L(\mathbf{u}^*) = K(\sigma^*)$$

где $\mathbf{u}^*$, σ^* — решения соответственно задачи А и В.

5. Дадим теперь новую постановку задачи механики деформируемого твердого тела в напряжениях. Для этого применим оператор Def к уравнениям равновесия (1.3)

$$S_{ij} \equiv {}^1/_2(\sigma_{ik,kj} + \sigma_{jk,ki} + X_{i,j} + X_{j,i}) \tag{5.1}$$

С помощью уравнений совместности (4.4), записанных в напряжениях и соотношений (5.1), образуем уравнения

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon_{ij}(\sigma) + \theta_{,ij}(\sigma) - \varepsilon_{ik,kj}(\sigma) - \varepsilon_{jk,ki}(\sigma) + \xi_{ij}(\varepsilon_{kl,kl}(\sigma) - \Delta\theta(\sigma)) +\\ + Q_{ij}(S) + (\xi_{ij} - \delta_{ij})\,Q_{mm}(S) = 0\end{aligned} \tag{5.2}$$

где Q_{ij} — компоненты симметричного тензора-оператора от тензора (5.1). Запишем уравнения равновесия для точек, лежащих на поверхности тела Σ

$$(\sigma_{ij,j} + X_i)|_\Sigma = 0 \tag{5.3}$$

Таким образом, имеем шесть уравнений (5.2) относительно шести независимых компонент тензора напряжений σ и шесть граничных условий (4.5), (5.3). Это и есть новая постановка задачи механики деформируемого твердого тела в напряжениях (задача Б) [8].

Теорема 5.1. Если операторы определяющих соотношений (1.1) и (4.1) взаимно-обратные, то задача А и задача Б эквивалентны между собой.

Выше было показано, что из постановки задачи А следует постановка задачи Б. Пусть теперь дана постановка задачи Б. Свернем уравнения (5.2) с единичным тензором δ_{ij}

$$(2-\xi_{mm})\,[\Delta\theta(\sigma)-\varepsilon_{kl,\,kl}(\sigma)-Q_{mm}(S)] \tag{5.4}$$

Применим теперь к уравнениям (5.2) оператор Div

$$(\delta_{ij}-\xi_{ij})\,[\Delta\theta(\sigma)-\varepsilon_{kl,\,kl}(\sigma)-Q_{mm}(S)]_{,j}+Q_{ij,\,j}(S)=0 \tag{5.5}$$

Из (5.5) и (5.4) следует, что при $\xi_{mm}\neq 2$

$$Q_{ij,\,j}(S)=0 \tag{5.6}$$

Если оператор Q таков, что его функциональные производные по тензору (5.1) удовлетворяют условиям (2.9), то из (5.6) и (5.3) следует уравнение (1.3). Отсюда следует справедливость условий совместности (4.4), а значит, и (4.2). Поэтому существует вектор $\mathbf{u}$, для которого справедливы соотношения (1.2). Теорема доказана.

Поступила 23 V 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Победря Б. Е.* Лекции по тензорному анализу. Изд-во МГУ, 1974.
2. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. М., «Наука», 1965.
3. *Михлин С. Г.* Проблема минимума квадратичного функционала. М., Гостехиздат, 1952.
4. *Ворович И. И., Красовский Ю. П.* О методе упругих решений. Докл. АН СССР, 1959, т. 126, № 4.
5. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд-во ЛГУ, 1950.
6. *Победря Б. Е.* Математическая теория нелинейной вязкоупругости. В сб.: Упругость и неупругость, вып. 3, Изд-во МГУ, 1973.
7. *Новацкий В.* Теория упругости. М., «Мир», 1975.
8. *Победря Б. Е.* О задаче в напряжениях. Докл. АН СССР, 1978, т. 240, № 3.