Прикладная математика и механика, Том 43, 1979

УДК 539.3

О НЕКОТОРЫХ ТИПАХ ОСОБЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ВСТРЕЧАЮЩИХСЯ В ПРИЛОЖЕНИЯХ

Д. И. Шерман

(Москва)

Достаточно подробно изучаются интегральные уравнения, ядра которых, помимо хорошо знакомой составляющей, так называемого ядра Коши, осложнены наличием дополнительного слагаемого, обладающего неинтегрируемыми особенностями в концах интервала изменения независимой переменной. К подобного рода уравнениям приводит рассмотрение комплекса избранных смешанных задач теории потенциала и теории упругости.

Намечены возможные подходы к интерпретации особых уравнений иной композиции, вообще говоря, не только с симметричными (различающимися лишь знаком) пределами интегрирования. Они, несомненно, заслуживают пристального внимания в связи с запросами приложений.

1. Займемся детальным анализом решений следующего уравнения первого рода:

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma_0}\omega(t)\left[\frac{1}{t-t_0}-\lambda\frac{1}{t-\rho^2/t_0}\right]dt=f(t_0),\quad -\rho\leqslant t_0\leqslant\rho \tag{1.1}$$

где λ — параметр, принимающий любые вещественные и комплексные значения, а свободный член $f(t_0)$ — любая произвольно задаваемая гельдерова функция на замкнутом вещественном отрезке γ_0 $(-\rho\leqslant t_0\leqslant\rho)$.

Своеобразная методика, развитая применительно к анализу избранных смешанных задач теории потенциала, во многом способствовала (при ее дальнейшем углубленном продвижении) обнаружению подступов к средствам обращения сингулярных интегральных уравнений частной структуры, а затем и выявлению свойств их решений.

Отметим, что в предлагаемой работе почти начисто выпускается гармоничное претворение отработанного процесса, а приводится лишь проверка и уточнение добытых при его содействии результатов. Отправным пунктом исследования, позволившего впоследствии подойти к изучению уравнения (1.1), явилось комментирование одной смешанной задачи теории потенциала для полукруга.

Вначале уравнение (1.1) было рассмотрено лишь для вещественных значений параметра λ в пределах $-1<\lambda<1$ (крайние случаи $\lambda=\pm1$ нуждаются в особом анализе). Беря $\lambda=\cos\theta$, мы закономерно полагали $0<\theta/\pi<1$; в добавлении к величине θ оказалось целесообразным ввести еще постоянную $\alpha=1-\theta/\pi$ (далее (см. п. 3) решение будет обобщено на случай любого вещественного и комплексного λ).

Уравнение (1.1) обладает, вообще говоря, решениями двоякого сорта. Одно из них, как увидим, непрерывное в закрытом интервале $-\rho\leqslant t\leqslant\rho$ и обращающееся в нуль в его концах $t = \pm \rho$, имеет такую структуру:

$$(1.2)\qquad \omega(t_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_0} \chi(\alpha; t, t_0) f(t) \left[\frac{1}{t-t_0} - \frac{1}{t-\rho^2/t_0}\right] dt$$

$$\chi(t, t_0) = \left(\frac{\rho - t_0}{-\rho - t_0}\right)^{\alpha}\left(\frac{\rho - t}{-\rho - t}\right)^{-\alpha} + \left(\frac{\rho - t_0}{-\rho - t_0}\right)^{-\alpha}\left(\frac{\rho - t}{-\rho - t}\right)^{\alpha}$$

Однако оно сохраняет силу лишь при дополнительном условии, которому должен быть подчинен свободный член $f(t)$ (предельные случаи $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ исключаются из рассмотрения)

$$(1.3)\qquad i \operatorname{ctg}\frac{\pi\alpha}{2}\Lambda[\alpha; f(t)] = 0$$

$$\Lambda[\alpha; f(t)] = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_0}\left[e^{-\pi i\alpha}\left(\frac{\rho - t}{-\rho - t}\right)^{\alpha} - e^{\pi i\alpha}\left(\frac{\rho - t}{-\rho - t}\right)^{-\alpha}\right]\frac{f(t)}{t}dt$$

Без должного обоснования это решение было выписано в статье [1]. К сожалению, в помещенном там же ограничительном условии (1.3) опущен перед интегралом множитель $i \operatorname{ctg}(\pi\alpha / 2)$, впрочем он имеет значение лишь в предельных случаях $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$, требующих (равно как и в им соответствующих случаях $\theta = \pi$ и $\theta = 0$) самостоятельного рассмотрения.

Другое, качественно иное разрывное решение (с интегрируемыми особенностями в точках $t = \pm \rho$) было найдено гораздо позже и приводится здесь впервые; оно выглядит так:

$$(1.4)\qquad \mu(t_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_0}\chi\left(\frac{\theta}{\pi}; t, t_0\right) f(t)\left(\frac{1}{t-t_0} + \frac{1}{t-\rho^2/t_0}\right) dt \mp$$

$$\mp e^{\pm i\theta}\left(\frac{\rho - t_0}{-\rho - t_0}\right)^{\mp\theta/\pi}\Lambda\left(\frac{\theta}{\pi}; f(t)\right) + 2i\sin\vartheta\, A(\vartheta)\times$$

$$\times\left[e^{-i\vartheta}\left(\frac{\rho - t_0}{-\rho - t_0}\right)^{\vartheta/\pi} + e^{i\theta}\left(\frac{\rho - t_0}{-\rho - t_0}\right)^{-\vartheta/\pi}\right], \qquad -\rho < t_0 < \rho$$

Содержащийся здесь двучлен с постоянным множителем $A(\upsilon)$ является решением однородного уравнения (1.1) (при $f(t) = 0$). Его, конечно, следует не упускать из вида, однако не обязательно сохраняя в выражении (1.4). (Это решение однородного уравнения (1.1) было в иной записи также приведено в [1]; выписанная там же рядом, якобы иная форма решения просочилась по недоразумению.)

Приведем некоторые из интегральных формул, которые могут понадобиться при выверке итоговых заключений

$$(1.5)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_0}\left(\frac{\rho - t}{-\rho - t}\right)^{\pm\alpha}\frac{dt}{t-z} = \mp\frac{ie^{\pm\pi i\alpha}}{2\sin\pi\alpha}\left[\left(\frac{\rho - z}{-\rho - z}\right)^{\pm\alpha} - 1\right]$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_0}\left(\frac{\rho - t}{-\rho - t}\right)^{\pm\alpha}\frac{dt}{t-t_0} = \mp\frac{i}{2}\left[\operatorname{ctg}\pi\alpha\left(\frac{\rho - t_0}{-\rho - t_0}\right)^{\pm\alpha} - \frac{e^{\pm\pi i\alpha}}{\sin\pi\alpha}\right]$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_0}\left(\frac{\rho - t}{-\rho - t}\right)^{\pm\alpha}\frac{dt}{t-\rho^2/t_0} = \mp\frac{i}{2\sin\pi\alpha}\left[\left(\frac{\rho - t_0}{-\rho - t_0}\right)^{\pm\alpha} - e^{\pm\pi i\alpha}\right]$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_0}\left(\frac{\rho - t}{-\rho - t}\right)^{\pm\alpha}\frac{dt}{t} = \pm\frac{i}{2}e^{\pm\pi i\alpha}\operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}$$

где z — аффикс произвольной точки, лежащей вне отрезка γ_0; точка t_0

расположена на γ_0, так что второй (по порядку) интеграл слева понимается в смысле главного значения.

Содержащаяся под знаками интегралов дробно-линейная степенная функция есть предельное значение функции

$$\left(\frac{\rho - z}{-\rho - z}\right)^{\pm\alpha} = \exp\left(\pm \alpha \ln \frac{\rho - z}{-\rho - z}\right) \to \left(\frac{\rho - t_0}{-\rho - t_0}\right)^{\pm\alpha} \qquad (z \to t_0)$$

причем z стремится к точке t_0 верхнего берега разреза, проведенного вдоль отрезка γ_0; вместе с тем

$$\ln \frac{\rho - z}{-\rho - z} = \int\limits_{\gamma_0} \frac{dt}{t - z}, \qquad \left(\ln \frac{\rho - z}{-\rho - z}\right)_{z \to 0} = \pi i$$

Одновременно введем функцию, регулярную вне лучей γ_1 ($-\rho$, $-\infty$; ∞, ρ) (дополняющих γ_0 до всей вещественной оси)

$$\ln \frac{\rho - \rho^2/z}{-\rho - \rho^2/z} = \int\limits_{\gamma_0} \frac{dt}{t - \rho^2/z}$$

Далее многозначаща и знаменательна роль соотношений

$$\left(\frac{\rho - \rho^2/z}{-\rho - \rho^2/z}\right)^{\pm\alpha} = \left(\frac{\rho - z}{-\rho - z}\right)^{\pm\alpha} \times \begin{cases} e^{\mp\pi i\alpha}, & \operatorname{Im} z > 0 \\ e^{\pm\pi i\alpha}, & \operatorname{Im} z < 0 \end{cases} \tag{1.6}$$

Как видим, связь между входящими сюда функциями неодинакова в различных полуплоскостях изменения переменной z.

Примечание 1. Если задаваемый свободный член уравнения (1.1) автоматически обращает в нуль функционал (1.3), то формулы (1.2) и (1.4) выдают два решения уравнения (1.1). Одно из них непрерывно на замкнутом интервале $-\rho \leqslant t_0 \leqslant \rho$ и принимает нулевые значения в его концах, другое же имеет в них интегрируемые особенности. Очевидно, оба решения разнятся между собой на некоторое (с точностью до постоянного множителя) решение однородного уравнения (1.1).

Примечание 2. Нетрудно видеть, что для свободного члена уравнения (1.1), равного некоторой постоянной C, отвечающая ему, согласно (1.2), плотность $\omega(t)$ тождественно обращается в нуль; следовательно, и самой постоянной C должно при этом (в соответствии с (1.3)) придать нулевое значение. В этом убеждаемся сразу, беря в расчет наряду с формулой (1.2) также интегральные соотношения (1.5). Действительно, формула (1.2), как отмечалось, доставляет лишь те решения уравнения (1.1), что непрерывны на замкнутом отрезке γ_0, а это, в свою очередь, возможно только в том случае, когда задаваемая в нем правая часть удовлетворяет ограничительному условию (1.3). Отсюда сразу явствует, что если свободный член уравнения (1.1) является постоянной величиной, то таковая, когда речь идет об извлечении в качестве решения плотности (1.2), может принимать лишь нулевое значение; при этом и сама плотность неизбежно обращается тождественно в нуль. Однако решение другого типа (предоставляемое формулой (1.4)) заведомо отлично от нуля для постоянного же по величине свободного члена уравнения (1.1). Возьмем его равным единице; нетрудно видеть, что в этом простейшем случае решение дается любой из следующих ниже формул (они различаются между собой на некоторое решение того же однородного уравнения)

$$\mu(t_0) = \frac{i}{2\sin\theta}\left[e^{i\theta}\left(\frac{\rho - t_0}{-\rho - t_0}\right)^{-\theta/\pi} - e^{-i\theta}\left(\frac{\rho - t_0}{-\rho - t_0}\right)^{\theta/\pi}\right] \mp$$
$$\mp i \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\, e^{\pm i\theta}\left(\frac{\rho - t_0}{-\rho - t_0}\right)^{\mp\theta/\pi}$$

2. Как можно установить, плотность $\omega(t)$, доставляемая формулой (1.2) при любой гельдеровой функции $f(t)$, в действительности удовлетво-

ряет уравнению (1.1) лишь с точностью до некоторой постоянной, даваемой функционалом, содержащимся слева в первом равенстве (1.3). (Всякая функция $f(t)$, дополненная функционалом, стоящим слева в первом равенстве (1.3), обращает в нуль функционал во втором из этих же равенств.) Эта плотность, в отличие от другой, $\mu(t)$, не только ограничена на замкнутом отрезке γ_0, но и принимает нулевые значения в его концах $t_0 = \pm\rho$. Автор убедился в этом, выписав решение (1.2) для сравнительно простых частных значений свободного члена. Нетрудно установить справедливость этого положения и в общем случае; для упрощения доказательства примем, что задаваемая функция $f(t)$ дифференцируема требуемое число раз.

Рассматриваемой плотности (1.2) придадим следующий вид:

$$\omega(t_0) = f(t_0)\, p(\alpha; t_0) + q(\alpha; t_0) \tag{2.1}$$

$$p(\alpha; t_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_0} \chi(\alpha; t, t_0)\left[\frac{1}{t-t_0} - \frac{1}{t-\rho^2/t_0}\right]dt$$

$$q(\alpha; t_0) = \left(t_0 - \frac{\rho^2}{t_0}\right)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_0} \chi(\alpha; t, t_0)\, g(t, t_0)\frac{dt}{t-\rho^2/t_0}$$

$$g(t, t_0) = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

Выражение для функции $q(\alpha; t_0)$ можно записать и так:

$$q(\alpha, t_0) = \left(t_0 - \frac{\rho^2}{t_0}\right)\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_0} \chi(\alpha; t, t_0)\frac{g(t, t_0) - g(t_0, t_0)}{t-\rho^2/t_0}dt + {}\right.$$
$$\left. + g(t_0, t_0)\, r(\alpha; t_0)\right\}$$

где вновь введенная функция

$$r(\alpha; t_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_0} \chi(\alpha; t, t_0)\frac{dt}{t-\rho^2/t_0}$$

или по исчислении входящего сюда интеграла

$$r(\alpha; t_0) = -\frac{i}{2\sin\pi\alpha}\left[e^{-\pi i\alpha}\left(\frac{\rho - t_0}{-\rho - t_0}\right)^{\alpha} - e^{\pi i\alpha}\left(\frac{\rho - t_0}{-\rho - t_0}\right)^{-\alpha}\right]$$

Окинув взглядом элементарные (в сравнении с другими далее используемыми) формулы (1.5) и (1.6) и учитывая определение функции $\chi(\alpha; t, t_0)$ в (1.2), заключаем, что $p(\alpha; t_0) = 0$. Вследствие этого приходим к более упрощенной (по сравнению с начальной) формуле

$$\omega(t_0) = q(\alpha; t_0) = \left(t_0 - \frac{\rho^2}{t_0}\right)\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_0} \chi(\alpha; t, t_0)\, h(t, t_0)\frac{t-t_0}{t-\rho^2/t_0}dt + {}\right. \tag{2.2}$$
$$\left. + g(t_0, t_0)\, r(\alpha; t_0)\right\}$$

$$h(t, t_0) = \frac{g(t, t_0) - g(t_0, t_0)}{t - t_0}$$

где функция $h(t_1, t_0)$ непрерывна на γ_0 вследствие условия, наложенного на $f(t)$.

Для выявления поведения (дробно-линейной относительно t) функции, входящей тут в качестве третьего сомножителя под знак интеграла и (нелинейно) зависящей также от переменной t_0, необходимо лишь проследить за ее изменением вблизи концов отрезка γ_0; иначе говоря, при следующих одновременных значениях их аффиксов: $t = \pm (\rho - \varepsilon)$ и $t_0 = \pm (\rho - \varepsilon_0)$, где ε и ε_0 — какие угодно малые положительные величины. Поведение названной функции в окрестности этих аффиксов определяется (с учетом малых высшего порядка) равенством

$$(2.3)\qquad \left|\frac{t-t_0}{t-\rho^2/t_0}\right| = |\varepsilon - \varepsilon_0| \left[\varepsilon + \varepsilon_0 + \rho \sum_{\nu=2}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon_0}{\rho}\right)^{\nu}\right]^{-1}$$

указывающим, что по модулю она не превосходит единицы.

Стало быть, разбираемая функция остается ограниченной на закрытом интервале γ_0, следовательно, интеграл в (2.2) абсолютно сходится. Отсюда и явствует, что плотность $\omega(t)$ превращается в нуль на краях отрезка γ_0 $(0 < \alpha < 1)$.

Итак, принятое предположение о вещественности параметра λ, к тому же строго изменяющегося в пределах $-1 < \lambda < 1$, и предопределило (вкупе с другими факторами) возможность корректной реализации намеченного автором пути извлечения решения уравнения (1.1).

3. Допустим теперь, что параметр λ принимает любое вещественное или комплексное значение, так что $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$, где λ_1 и λ_2 — вещественные (положительные или отрицательные) числа. Целесообразно сохранить прежнее представление параметра λ, правда, теперь уже в виде косинуса комплексного аргумента $\vartheta = \vartheta_1 + i\vartheta_2$ с вещественными ϑ_1 и ϑ_2, определяемыми через задаваемые λ_1 и λ_2. И тут наряду с комплексным аргументом ϑ рационально ввести комплексную величину $\alpha = 1 - \vartheta/\pi$. При этом положенная в основу формула

$$(3.1)\qquad \lambda = \cos\vartheta = \cos\vartheta_1 \operatorname{ch}\vartheta_2 - i \sin\vartheta_1 \operatorname{sh}\vartheta_2$$

распадается на два следующих вещественных равенства:

$$(3.2)\qquad \lambda_1 = \cos\vartheta_1 \operatorname{ch}\vartheta_2, \quad \lambda_2 = -\sin\vartheta_1 \operatorname{sh}\vartheta_2$$

На первый взгляд, может показаться, что независимо от тех или иных величин λ_1 и λ_2 (произвольно задаваемых) нельзя сохранить одинаковым, скажем точнее,— неотрицательным знак $\sin\vartheta_1$; напротив, представляется вероятным, что знак этой величины (при переходе от одних λ к другим) претерпевает изменения. Между тем, как вскоре станет ясно, достижение цели в направлении намеченного обобщения оказывается возможным лишь при заранее определяемом неотрицательном знаке $\sin\vartheta_1$, иначе говоря, для вещественной компоненты аргумента ϑ_1 в пределах $0 < \vartheta_1 < \pi$. (Возможность такого выбора интервала изменения для величины ϑ_1 важна еще по той причине, что при этом вещественная часть параметра $\alpha = 1 - \vartheta/\pi$ остается меньшей единицы, за исключением предельного случая $\vartheta_1 = 0$, требующего особого рассмотрения.) Забегая несколько вперед, заметим, что в конечном счете все же удается (в соответствии со своими целями) зафиксировать интервал $0 < \vartheta_1 < \pi$; он вбирает в себя всякое значение ϑ_1, отвечающее (по выписываемым ниже формулам) каким угодно (вещественным) величинам λ_1 и λ_2.

По исключении из (3.2) величины ϑ_2 приходим к уравнению

$$\xi^2 + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 1)\,\xi - \lambda_2^2 = 0, \quad \xi = \sin^2\vartheta_1 \tag{3.3}$$

При рассмотрении этого уравнения приходится иметь дело с радикалом

$$R = [(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 1)^2 + 4\lambda_2^2]^{1/2} = [(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 1)^2 - 4\lambda_1^2]^{1/2} \tag{3.4}$$

не упуская из виду следующие очевидные неравенства:

$$|\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 1| \leqslant R \leqslant \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 1 \tag{3.5}$$

Здесь, как и везде в последующем, под радикалами из стоящих под ними неотрицательных величин понимаются их арифметические значения.

Для всякого значения v_1, не выходящего за указанные пределы, из уравнения (3.3) находим (по очевидной причине перед R выбираем знак плюс)

$$\sin\theta_1 = [-{}^1/_2\,(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 1) + {}^1/_2 R]^{1/2} \tag{3.6}$$

Эта формула непротиворечива: выражение в квадратных скобках в ее правой части неотрицательно и не превосходит единицы; последнее нетрудно усмотреть из правого неравенства (3.5).

Вместо (3.3) можно было бы сначала построить уравнение

$$\eta^2 - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 1)\,\eta + \lambda_1^2 = 0, \quad \eta = \cos^2 v_1$$

Из него имеем

$$\cos v_1 = \pm\,[{}^1/_2\,(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 1) - {}^1/_2 R]^{1/2} \tag{3.7}$$

В этом месте перед R удерживается знак минус, ибо в противном случае выражение в квадратных скобках, согласно левому неравенству (3.5) (как при $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \geqslant 1$, так и при $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 < 1$), заведомо превосходило бы единицу (будучи в первом случае равным единице лишь при $\lambda_1 = \pm 1$ и $\lambda_2 = 0$, когда $R = 0$).

Очевидно, что величина в квадратных скобках в (3.7) неотрицательна и, как подобает, не превосходит единицы. Это явствует из выражения (3.4) для R и левого неравенства (3.5).

Обращаясь теперь к первому из равенств (3.2) и беря в расчет, что величина $\operatorname{ch}\vartheta_2$ положительна для любой (вещественной) ϑ_2, заключаем, что в формуле (3.7) надлежит перед внешним радикалом оставить знак, одинаковый со свойственным действительной составляющей λ_1. Это обстоятельство весьма важно. В самом деле, ориентируясь на знак, приписываемый, как рекомендовано, правой части (3.7), можно (по выдаваемому (3.6) неотрицательному $\sin\vartheta_1$) уже однозначно зафиксировать аргумент v_1, неукоснительно заимствуя его из интервала $0 \leqslant v_1 < \pi$.

Необходимо подчеркнуть, что фиксация величины и знака чисто мнимой составляющей аргумента ϑ производится вполне однозначно. Действительно, сообразуясь со вторым равенством (3.2), приходим к выводу, что компоненте ϑ_2 следует каждый раз приписывать знак, противоположный знаку чисто мнимой составляющей задаваемого комплексного параметра λ.

Положим теперь (величины δ и η следует считать известными)

$$(3.8)\qquad \delta = \frac{\lambda_1}{\cos\vartheta_1} = \operatorname{ch}\vartheta_2, \quad \eta = -\frac{\lambda_2}{\sin\theta_1} = \operatorname{sh}\vartheta_2$$

$$h = \frac{\delta}{\eta}, \quad \sqrt{\delta^2 - \eta^2} = 1$$

Далее, желательно удостовериться, что (положительная) величина δ действительно (в согласии с первым равенством (3.8)) не менее единицы. Это усматривается из легко проверяемого неравенства

$$\left(\frac{\lambda_1}{\cos\vartheta_1}\right)^2 - 1 = \frac{1}{2}[(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 1) + R] \geqslant 0$$

Из первого равенства, поскольку $\delta \geqslant 1$, находим

$$(3.9)\qquad \vartheta_2 = \ln(\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 1})$$

где знак плюс берется при $\vartheta_2 > 0$, и минус — при $\vartheta_2 \leqslant 0$, причем нулевое значение ϑ_2 достигается для $\delta = 1$.

Проделав стандартные вычисления, найдем

$$h^2 = 1 + \frac{2}{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 1) + R}$$

откуда следует, что $|h| > 1$ $(\delta > |\eta|)$.

Составляющую ϑ_2 допустимо определить в форме, несколько отличной от (3.9), составив отношение первого равенства (3.8) ко второму

$$(3.10)\qquad \vartheta_2 = \frac{1}{2}\ln\frac{h+1}{h-1}$$

Как видим, при $h > 1$ величина ϑ_2 положительна, а при $h < -1$ отрицательна. Ясно, что формулы (3.9) и (3.10) адекватны.

Итак, изучаемый тут более сложный вариант различается с первоначальным $[-1 < \lambda < 1]$, — и это много значит, гораздо более расширенным диапазоном изменения параметров ϑ (α).

4. При более или менее обстоятельном постижении развернутого процесса в целом все более отчетливо и настойчиво западает мысль о правомерности истолкования тех же формул (1.2) и (1.4) в качестве разрешающих исходное уравнение (1.1) при любом (в том числе и комплексном) постоянном λ. И здесь подлинная выверка предположительно высказанного итогового заключения, как прежде [2], проще всего осуществляется напрямую, формальной подстановкой в особое уравнение (1.1) значений плотностей, выделяемых соотношениями (1.2) и (1.4).

В самом деле, подставим попеременно в исходное уравнение (1.1) пару разнотипных выражений (1.2) и (1.4) для искомой плотности; при этом в обоих случаях получим довольно сложные и малообозримые по содержанию сингулярные кратные интегралы; каждый из них, в свою очередь, разбивается на ряд типичных и односложных кратных интегралов. С таковыми приходилось уже иметь дело в несколько завуалированной форме при разборе начального случая $-1 < \lambda < 1$, т. е. для вещественных ϑ и α (к соответственно измененным по структуре кратным сингулярным интегралам автор также пришел и в статье [2]). Они подвергались радикальным преобразованиям, заключавшимся в изменении порядка следования ординарных интегралов в каждом из них. Затем во вновь образовавшихся таким образом двойных сингулярных интегралах подсчитывались в замкнутой форме содержащиеся в них внутренние ординарные интегралы. В результате исходные кратные интегралы приводились к более элементарным однократным интегралам, наделенным особенностями того же склада. (Как указывалось, не будучи явно воспроизведены в систематизированной записи, эти соотношения фактически использовались и ранее.)

Легко далее усмотреть, что выражения, теперь извлекаемые таким путем для названных кратных интегралов, оказываются по своей наружной структуре тождественными с прежними, отличаясь от них лишь комплексностью параметров ϑ и α (неявно заложенной в самих принятых для них обозначениях).

Подчеркнем повторно, что таковые добываются в неуклонном и точном соответствии с формулами (1.2), первым равенством (3.2) и формулой (3.7), ни в чем не урезывающими, как уже отмечалось, беспрепятственность выбора α и ϑ (и нерушимо дополняемыми условиями $0 < \operatorname{Re}\vartheta / \pi < 1$, $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$; лишь при соблюдении первого из них неизменно наличествует второе условие). Сказанное в достаточной мере очевидно, поскольку уравнение (1.1) не содержит взаимно сопряженных значений плотности, а лишь самую отыскиваемую плотность.

Упоминавшиеся формулы, заключающие переустройство конкретных сингулярных парных интегралов в подобного же типа одномерные интегралы, выглядят так (они нигде ранее не приводились и выписываются тут впервые в полном объеме, необходимом для выполнения должных операций):

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_0}\left(\frac{\rho-t}{-\rho-t}\right)^{\pm\alpha}\frac{dt}{t-t_0}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_0} g(t_1)\left(\frac{\rho-t_1}{-\rho-t_1}\right)^{\mp\alpha}\frac{dt_1}{t_1-t} = \frac{1}{4}g(t_0)\pm$$

$$\pm\frac{\operatorname{ctg}\pi\alpha}{4\pi}\int\limits_{\gamma_0} g(t)\left[1-\left(\frac{\rho-t_0}{-\rho-t_0}\right)^{\pm\alpha}\left(\frac{\rho-t}{-\rho-t}\right)^{\mp\alpha}\right]\frac{dt}{t-t_0}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_0}\left(\frac{\rho-t}{-\rho-t}\right)^{\pm\alpha}\frac{dt}{t-\rho^2/t_0}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_0} g(t_1)\left(\frac{\rho-t_1}{-\rho-t_1}\right)^{\mp\alpha}\frac{dt_1}{t_1-t} = \pm\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\gamma_0} g(t)\Big[\operatorname{ctg}\pi\alpha-$$

$$-\frac{1}{\sin\pi\alpha}\left(\frac{\rho-t_0}{-\rho-t_0}\right)^{\pm\alpha}\left(\frac{\rho-t}{-\rho-t}\right)^{\mp\alpha}\Big]\frac{dt}{t-\rho^2/t_0}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_0}\left(\frac{\rho-t}{-\rho-t}\right)^{\pm\alpha}\frac{dt}{t-\rho^2/t_0}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_0} g(t_1)\left(\frac{\rho-t_1}{-\rho-t_1}\right)^{\mp\alpha}\frac{dt_1}{t_1-\rho^2/t} =$$

$$=\mp\frac{1}{4\pi\sin\pi\alpha}\int\limits_{\gamma_0} g(t)\left\{\left[\left(\frac{\rho-t_0}{-\rho-t_0}\right)^{\pm\alpha}\left(\frac{\rho-t}{-\rho-t}\right)^{\mp\alpha}-1\right]\frac{1}{t-t_0}-\right.$$

$$\left.-\left[e^{\pm\pi i\alpha}\left(\frac{\rho-t}{-\rho-t}\right)^{\mp\alpha}-1\right]\frac{1}{t}\right\}dt$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_0}\left(\frac{\rho-t}{-\rho-t}\right)^{\pm\alpha}\frac{dt}{t-t_0}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_0} g(t_1)\left(\frac{\rho-t_1}{-\rho-t_1}\right)^{\mp\alpha}\frac{dt_1}{t_1-\rho^2/t} =$$

$$
= \mp \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\gamma_0} g(t) \left\{ \left[\operatorname{ctg} \pi\alpha \left(\frac{\rho - t_0}{-\rho - t_0} \right)^{\pm\alpha} \left(\frac{\rho - t}{-\rho - t} \right)^{\mp\alpha} - \frac{1}{\sin \pi\alpha} \right] \times \right.
$$

$$
\left. \times \frac{1}{t - \rho^2 / t_0} + \frac{1}{\sin \pi\alpha} \left[1 - e^{\pm\pi i\alpha} \left(\frac{\rho - t}{-\rho - t} \right)^{\mp\alpha} \right] \frac{1}{t} \right\} dt
$$

Обозревая эти формулы, непосредственно видим, что они на самом деле не теряют смыслового значения и остаются незыблемыми и для комплексных ϑ (α) при соблюдении тех же, не раз фиксировавшихся условий, лимитирующих пределы изменения их вещественных частей. Указанные интегральные соотношения приходят на выручку при прямом контроле правомерности разрешающих формул (1.2) и (1.4). При этом наряду с (4.1) следует держать в поле зрения формулы, получаемые из названных формальной заменой параметра α на θ / π.

Так обстоит дело, когда Re (ϑ/π) и Re (α) численно меньше единицы. Во взаимоисключающих предельных случаях, когда Re $(\vartheta/\pi) = 1$ либо Re $(\alpha) = 1$, за отвечающую каждому из них разрешающую формулу всякий раз берется та, что приноровлена к другому параметру, подчиняемому соответственно ограничительному условию Re $(\alpha) = 0$ либо Re $(\vartheta / \pi) = 0$. (Подразумевается, что формула (1.2) остается решением уравнения (1.1) и при Re $(\alpha) = 0$; как известно, последнее имеет место при соблюдении (1.3) — только при этом будет в полной мере справедливо сказанное. Независимое рассмотрение предельных случаев Re $(\vartheta / \pi) = 1$ и Re $(\alpha) = 1$ до какой-то степени затруднено.

5. Укажем один возможный подход к изучению сингулярных интегральных уравнений некоего типа; более сложные уравнения подобного рода выступают при интерпретации избранных, как правило, смешанных задач двумерной теории упругости для областей специальной конфигурации.

Идея, лежащая в основе предлагаемого приема, может представляться взору малоискушенного читателя несколько искусственной и надуманной. Тем не менее, процесс ее претворения оказывается незатейливым и в основных пунктах понятным и доходчивым. В то же время становление и оформление самой идеи протекало сравнительно замедленно и затрудненно. Видимо, происходило это из-за подхода к вопросу с заметно видоизмененных и обновленных позиций по сравнению с теми, коих автор придерживался в своих прежних работах, посвященных развитию схожей методики в применении к основным задачам двумерной теории упругости.

Допустим, что правая полуплоскость переменного $z = x + iy$ разрезана вдоль (идущего из начала координат) вещественного отрезка γ длиной a. Для образовавшейся таким образом (справа) полубесконечной области, назовем ее S, поставим следующую краевую задачу. Пусть требуется определить пару функций $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$, регулярных в этой области и исчезающе малых по модулю в ее удаленной части по следующим краевым условиям. На верхнем и нижнем берегах разреза γ задаются соответственно условия

$$
\varkappa\varphi_1^+(t) + \overline{\psi_1^+(t)} = f(t), \quad \varkappa\varphi_1^-(t) + \overline{\psi_1^-(t)} = f(t); \quad 0 < t < a \tag{5.1}
$$

где $\varkappa$ — некоторая, вообще говоря, комплексная постоянная, а $f(t)$ — заданная на том же отрезке гельдерова функция. На мнимой оси те же функции подчинены краевому условию довольно стандартного типа

$$
\varphi_1(t) + \overline{\psi_1(t)} = 0, \quad t = iy \quad (-\infty < y < \infty) \tag{5.2}
$$

Как известно, элементарная функция

$$
w = \sqrt{a^2 - z^2} \tag{5.3}
$$

дает (при надлежаще выбранной ее ветви, $w^+ = a$ при $z = 0$) конформное отображение взятой области S на нижнюю полуплоскость переменной w. При этом на верхнем и нижнем берегах разреза имеем $w^\pm(x) = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$, $0 < x < a$; на мнимой же оси $w(\pm iy) = \pm\sqrt{a^2 + y^2}$, $0 < y < \infty$.

При помощи названной конформно отображающей функции сформулированная задача может быть сведена к сравнительно легко анализируемому уравнению Карлемана (поскольку в исходных краевых условиях не фигурируют производные от искомых функций). Имея в виду подобную возможность, мы, сообразуясь со своими целями, продолжим исследование той же краевой задачи в ином плане.

Сложив и вычтя почленно одно из другого предельные равенства (5.1), получим (им же адекватные) соотношения такого рода

$$\varkappa[\varphi_1^+(t) + \varphi_1^-(t)] + [\overline{\psi_1^+(t)} + \overline{\psi_1^-(t)}] = 2f(t) \tag{5.4}$$

$$\varkappa[\varphi_1^+(t) - \varphi_1^-(t)] + [\overline{\varphi_1^+(t)} - \overline{\psi_1^-(t)}] = 0, \quad 0 < t < a \tag{5.5}$$

Присоединим к ним равенство, определяющее вспомогательную функцию $\omega(t)$, вводимую на том же отрезке γ, соотношением

$$\varkappa[\varphi_1^+(t) - \varphi_1^-(t)] - [\overline{\psi_1^+(t)} - \overline{\psi_1^-(t)}] = 2\omega(t), \qquad 0 < t < a \tag{5.6}$$

Назначение этой подсобной функции далеко выходит за пределы комментирования стоящей в поле зрения частной задачи теории потенциала. За вовлечением ее в дело в форме (5.6) кроется замысел, он станет ясным из дальнейшего.

Сложив почленно краевое условие (5.5) (уже в видоизмененной записи) с только что введенным подсобным соотношением (5.6), а затем вычтя почленно те же равенства одно из другого, получим

$$\varphi_1^+(t) - \varphi_1^-(t) = \frac{1}{\varkappa}\omega(t) \quad \text{на } \gamma, \quad 0 < t < a \tag{5.7}$$

$$\overline{\psi_1^+(t)} - \overline{\psi_1^-(t)} = -\omega(t) \quad \text{на } \gamma, \quad 0 < t < a$$

Первому краевому равенству (5.7) целесообразно придать форму

$$\underset{z \to t_0 \text{ сверху } \gamma}{\varphi_1^+(t_0) - \frac{1}{2\pi i\varkappa}\int_\gamma \frac{\omega(t)}{t - z}dt} = \underset{z \to t_0 \text{ снизу } \gamma}{\varphi^-_1(t_0) - \frac{1}{2\pi i\varkappa}\int_\gamma \frac{\omega(t)}{t - z}dt} \quad \text{на } \gamma$$

Введем новую, регулярную в области S функцию $\varphi(z)$ согласно равенству

$$\varphi(z) = \varphi_1(z) - \frac{1}{2\pi i\varkappa}\int_\gamma \frac{\omega(t)}{t - z}dt \tag{5.8}$$

Из предшествующего равенства вытекает, что

$$\varphi^+(t_0) = \varphi^-(t_0) \text{ на } \gamma$$

Стало быть, функция $\varphi(z)$ продолжима сквозь отрезок γ и регулярна всюду в правой полуплоскости; как видно, в удаленной части области эта функция становится сколь угодно малой по модулю.

Поступая аналогичным образом со вторым основным равенством (5.7), введем регулярную в той же правой полуплоскости (и превращающуюся в нуль на бесконечности) функцию

$$\psi(z) = \psi_1(z) + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\overline{\omega(t)}}{t-z}\,dt \tag{5.9}$$

Теперь значения функций $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$, выраженные (по порядку) из равенств (5.8) и (5.9) через $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, внесем в (соблюдающееся на мнимой оси) краевое условие (5.2). Оно при этом трансформируется в следующее соотношение:

$$\varphi(t_0) + \overline{\psi(t_0)} = -\frac{1}{2\pi i\varkappa}\int_\gamma \frac{\omega(t)}{t-t_0}\,dt - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\omega(t)}{t+t_0}\,dt$$

$$t_0 = iy \quad (-\infty < y < \infty)$$

Из него приходим к такой форме проявления тех же функций:

$$\varphi(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\omega(t)}{t+z}\,dt, \quad \psi(z) = \frac{1}{2\pi i\bar{\varkappa}}\int_\gamma \frac{\overline{\omega(t)}}{t+z}\,dt$$

Принимая в расчет эти равенства, обретем из (5.8) и (5.9) такие выражения для искомых функций:

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{2\pi i\varkappa}\int_\gamma \frac{\omega(t)}{t-z}\,dt - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\omega(t)}{t+z}\,dt \tag{5.10}$$

$$\psi_1(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\overline{\omega(t)}}{t-z}\,dt + \frac{1}{2\pi i\bar{\varkappa}}\int_\gamma \frac{\overline{\omega(t)}}{t+z}\,dt$$

Переходя в первом из них к пределу $z \to t_0$ поочередно сверху и снизу отрезка γ и складывая почленно получаемые при этом равенства (предварительно умноженные на $\varkappa$), имеем

$$\varkappa\,[\varphi_1^+(t_0) + \varphi_1^-(t_0)] = \frac{1}{\pi i}\int_\gamma \frac{\omega(t)}{t-t_0}\,dt - \frac{\varkappa}{\pi i}\int_\gamma \frac{\omega(t)}{t+t_0}\,dt \quad \text{на } \gamma$$

Проделывая сходные элементарные выкладки в применении к предельным величинам функции $\psi_1(z)$, даваемым формулой (5.10), приходим к равенству похожей (с предыдущим) структуры; сопряженное с ним выглядит так:

$$\overline{\psi_1^+(t_0)} + \overline{\psi^-(t_0)} = \frac{1}{\pi i}\int_\gamma \frac{\omega(t_0)}{t-t_0}\,dt - \frac{1}{\pi i\varkappa}\int_\gamma \frac{\omega(t)}{t+t_0}\,dt \quad \text{на } \gamma$$

Прибегая к еще неиспользованному (в видоизмененной записи) предельному условию (5.4), выявляем особое интегральное уравнение, коему удовлетворяет вспомогательная функция $\omega(t)$. Убеждаемся, что это уравнение имеет следующий вид (надлежащим выбором $\varkappa$ придадим параметру λ предписанное значение):

$$\frac{1}{\pi i}\int_\gamma \omega(t)\left(\frac{1}{t-t_0} - \lambda\frac{1}{t+t_0}\right)dt = f(t_0), \quad \lambda = \frac{\varkappa^2+1}{2\varkappa} \tag{5.11}$$

Допустим теперь, что уравнение (5.11) каким-то образом разрешено, и найденная из него вспомогательная функция $\omega(t)$ внесена под знаки соответствующих интегралов в формулах (5.10). Тогда придем к паре функций $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$, разрешающих исходную краевую задачу.

Как уже отмечалось, та же задача решается относительно несложно при использовании конформно отображающей функции; в связи с этим справедливо и следующее. Разыскав, как указывалось, при помощи отображающей функции (5.3) решение краевой задачи по прямым условиям (5.1) и (5.2), составим затем по найденным $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ левую часть равенства (5.6). Полученное выражение дает величину удвоенного значения плотности $\omega(t)$; последняя как раз удовлетворяет особому уравнению (5.11).

Необходимо заметить, что при тех частных значениях функции $f(t)$, когда интегральное уравнение (5.11) поддается эффективному анализу, удается быстро завершить разбор поставленной краевой задачи, опираясь непосредственно на формулы (5.10). Следует упомянуть, что то же уравнение (5.11) рассматривалось по-другому для вещественных значений параметра λ в статье [3].

Поступила 13 VI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шерман Д. И.* По поводу одного особого интегрального уравнения и его применения в некоторых задачах теории упругости. Изв. АН АрмССР. Механика, 1969, т. 22, № 3.
2. *Шерман Д. И.* Об одном способе рассмотрения пары взаимосвязанных интегральных уравнений. ПММ, 1973, т. 37, вып. 6.
3. *Bueckner H. F.* On a class of singular integral equations. J. Math. Analysis and Appl., 1966, vol. 14, No. 3.
4. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., «Наука», 1968.