

О ПОВЕРХНОСТЯХ РАЗРЫВА В СРЕДЕ, ЛИШЕННОЙ «СОБСТВЕННОГО» ДАВЛЕНИЯ

А. Н. Крайко

(Москва)

Рассматривается новый тип поверхностей разрыва, которые необходимо вводить в рамках некоторых моделей сред, лишенных собственного давления. Такие модели находят достаточно широкое распространение при описании различных течений, например диспергированных компонент многофазных смесей, исследуемых в приближении многожидкостной сплошной среды, движения капель жидкости в области разрушения ее сплошности («откола») при быстро протекающих процессах в устройствах импульсного типа, соударения гиперзвуковых потоков в предельном случае бесконечного уплотнения (возрастания плотности) на скачках и т.п. Главная особенность, отличающая указанные разрывы от ударных волн и контактных (тангенциальных) разрывов в классической газовой динамике, связана с конечными поверхностными (или даже линейными) плотностями среды на них. В силу этого разрыв имеет собственные массу, импульс и энергию, изменение которых обусловлено, в частности, выпадением вещества той же фазы на него. Естественно, что, как и поверхностные заряды и токи в электродинамике и в магнитной гидрогазодинамике идеально проводящих сред, конечные поверхностные и линейные плотности и отвечающие им бесконечные объемные плотности — следствие схематизации, вводимой при построении математической модели среды.

1. Посмотрим сначала, что происходит с уравнениями, описывающими течение идеальной (невязкой и нетеплопроводной) среды при $p \equiv 0$ и $\rho \neq 0$, где p — давление, а ρ — плотность. В исходную систему дифференциальных уравнений идеальной среды входит, во-первых, $\text{grad } p$ в уравнения движения и, во-вторых, p / ρ в формулу для удельной энтальпии: $i = e + p / \rho$ в уравнение энергии (e — удельная внутренняя энергия). Поэтому, если, например, в уравнениях одномерного нестационарного течения пренебречь давлением, то уравнение движения станет

$$(1.1) \quad \frac{du}{dt} + u \frac{du}{dx} = 0$$

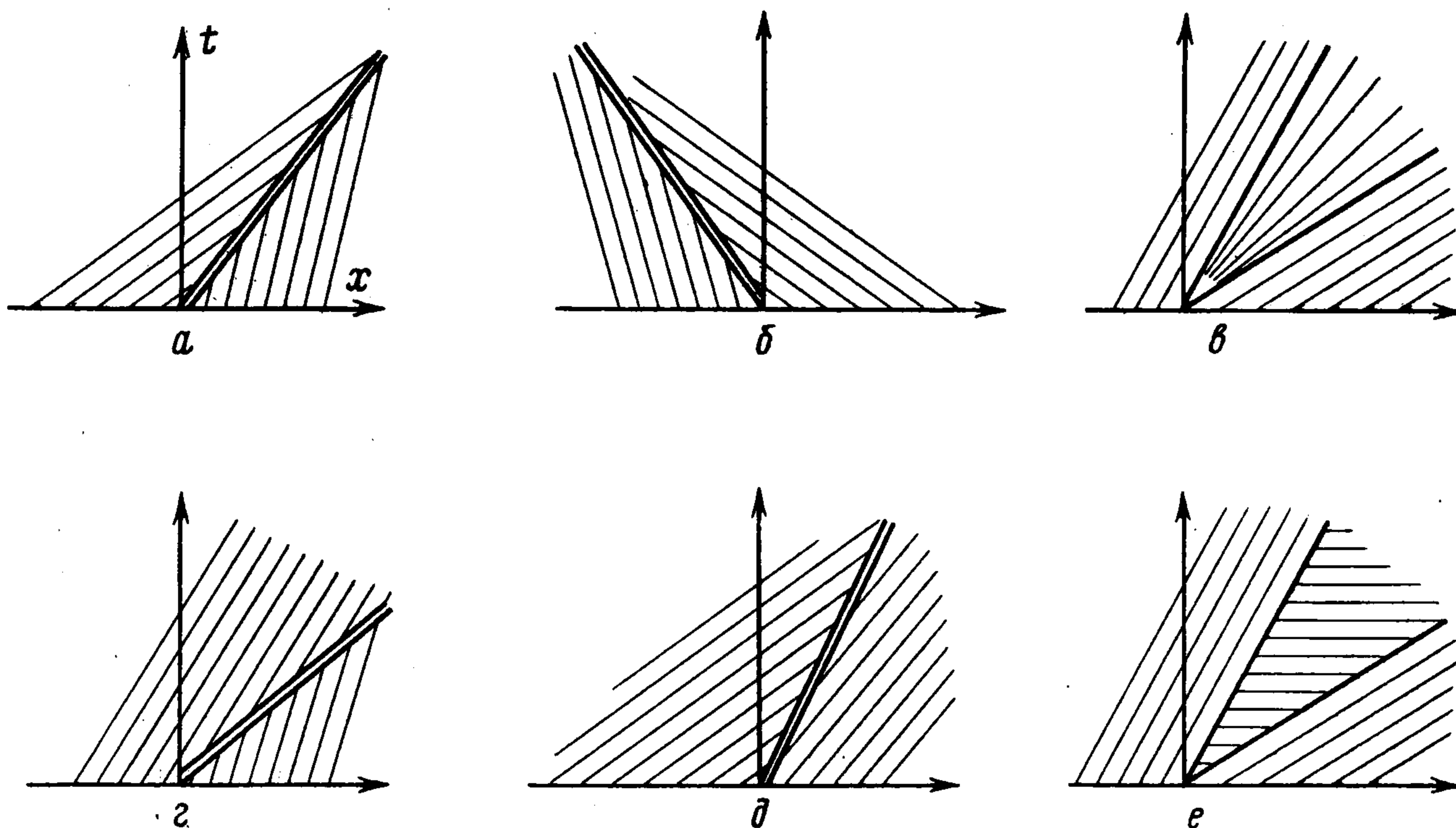
где t — время, x — пространственная координата, u — x -компонента вектора скорости. Уравнение (1.1) обычно привлекается для иллюстрации свойств разрывных (обобщенных) решений. При этом показывается (см., например, [1]), что свойства разрывов (в частности скорость их распространения D) зависят от того, какое интегральное уравнение берется в качестве исходного по отношению к (1.1). Так, если в качестве исходного взять интегральное уравнение

$$(1.2) \quad \oint_{\gamma} u dx - \frac{u^2}{2} dt = 0$$

в котором γ — произвольный замкнутый контур плоскости xt , то

$$(1.3) \quad D = (u_+ + u_-) / 2$$

Здесь и далее индекс плюс (минус) приписывается параметрам справа (слева) от разрыва. Разрыв данного типа реализуется лишь при $u_- > u_+$, причем он движется с большей (по модулю) скоростью, чем частицы перед ним, и с меньшей, чем частицы за ним. Указанную ситуацию иллюстрируют фиг. 1, а и б, на которых разрыв (двойная линия) распространяется соответственно вправо ($D > 0$) и влево ($D < 0$). Одиночными сплошными



Фиг. 1

линиями изображаются траектории частиц: $dx/dt = u$, являющиеся характеристиками уравнения (1.1). При $u_- < u_+$ вместо разрыва образуется центрированная волна разрежения (фиг. 1, е), в которой u принимает все значения между u_- и u_+ .

В действительности произвола в выборе интегрального уравнения (или уравнений) нет, поскольку исходными являются законы сохранения, записанные не в дифференциальной, а в интегральной форме. Точнее, если такой произвол и имеется, то разные интегральные законы сохранения (например количества движения и момента количества движения) приводят не к разным, а к одинаковым соотношениям на разрывах (как и к дифференциальным уравнениям).

Так, при $p \equiv 0$ и $\rho \neq 0$ система интегральных уравнений одномерного нестационарного течения с плоскими волнами записывается в форме

$$(1.4) \quad \oint_{\gamma} \rho a (dx - udt) = 0$$

где a — вектор с компонентами 1, u и $2e + u^2$. Система (1.4) выписана для случая, когда поток направлен по оси x . Из (1.4) обычным путем выводятся соотношения на разрывах, не обладающих «поверхностной» плот-

ностью. Вот они:

$$(1.5) \quad [\rho (D - u)] = 0, \quad [\rho (D - u) u] = 0, \quad [\rho (D - u)(2e + u^2)] = 0 \\ ([\varphi] = \varphi_+ - \varphi_-)$$

Видно, что на разрывах данного типа, как и на обычных контактных разрывах, $D = u_- = u_+$. Поэтому в общем случае, например в задаче о распаде произвольного разрыва при $u_- \neq u_+$, для построения решения необходимы разрывы, отличные от (1.5), а следовательно, несущие массу, импульс и энергию. Соотношения, которые обязаны выполняться на них, также получаются из (1.4) и имеют вид

$$(1.6) \quad dR / dt = [\rho (D - u)], \quad dRD / dt = [\rho (D - u) u] \\ dR (2E + D^2) / dt = [\rho (D - u)(2e + u^2)]$$

Здесь d / dt — полная производная по t вдоль траектории разрыва, R — поверхностная плотность, RE — поверхностная внутренняя энергия (энергия единицы площади), а E — удельная (приходящаяся на единицу массы) внутренняя энергия на разрыве.

В общем случае, согласно (1.6), R , D и E подобных разрывов определяются всей предысторией их движения от момента возникновения. Исключение в некотором смысле составляет автомодельная задача о распаде произвольного разрыва. Рассмотрим ее, тем более, что получающееся в результате решение интересно не только само по себе. Оно дает начальные значения R , D и E для любых разрывных распределений параметров, т. е. ρ , u и e при $t = 0$. Как следует из анализа размерностей, в рассматриваемой автомодельной задаче D и E — постоянные, а $R = \beta t$, где β — также постоянная. Отсюда и из (1.6) получим

$$(1.7) \quad \beta = [\rho (D - u)], \quad \beta D = [\rho (D - u) u] \\ \beta (2E + D^2) = [\rho (D - u)(2e + u^2)]$$

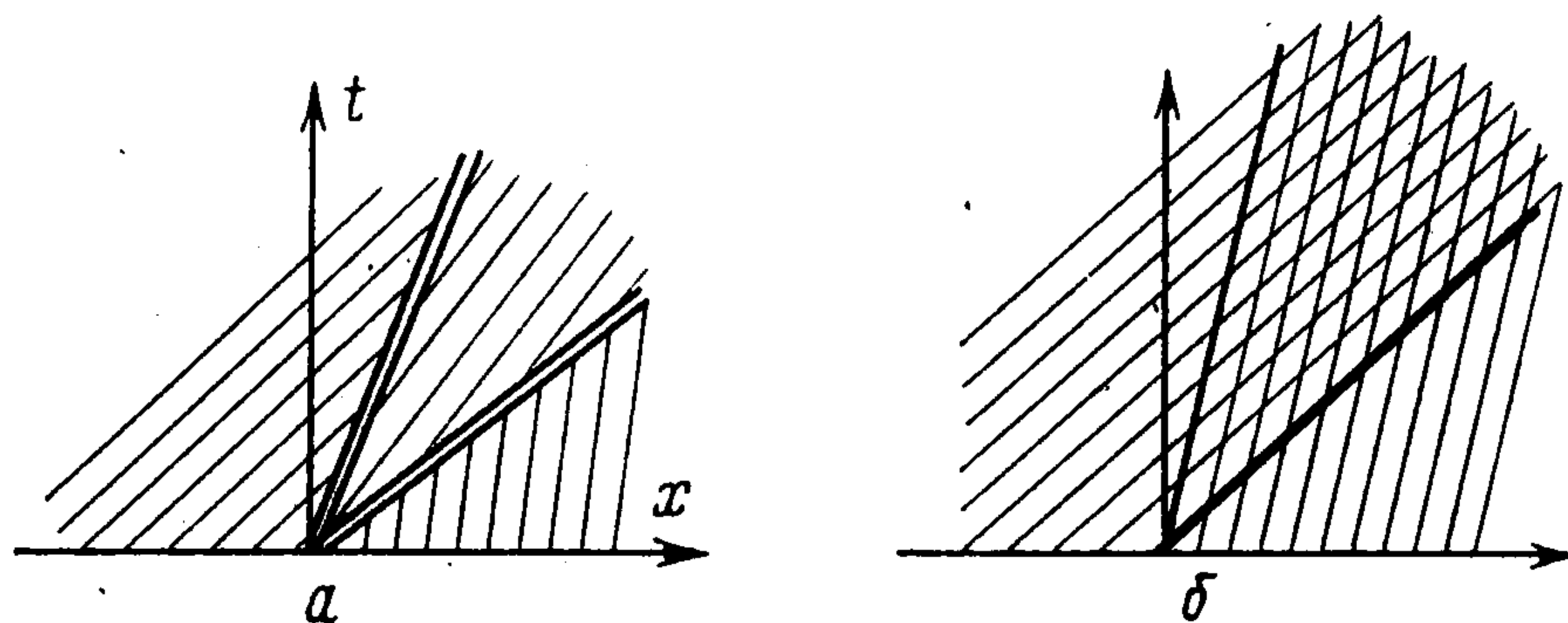
Исключив β из первых двух равенств этой системы, придем к квадратному уравнению для D . Корень этого уравнения, удовлетворяющий при $u_- > u_+$ неравенствам $u_- > D > u_+$, которые служат условиями прихода частиц на разрыв с обеих его сторон, равен

$$(1.8) \quad D = (u_+ \alpha_+ + u_- \alpha_-) / (\alpha_+ + \alpha_-), \quad \alpha = \sqrt{\rho}$$

Значения β и E находятся затем из первого и третьего уравнений (1.7). При $u_+ = u_-$ из (1.8) следует $D = u_+ = u_-$, а поэтому в силу (1.7) и $\beta = 0$. Таким образом, в этом случае (1.7) и (1.8) ведут к тем же результатам, что и (1.5). Последнее естественно, поскольку разрывы, на которых выполняются условия (1.5), — частный случай разрывов, подчиняющихся условиям (1.6), при $R = 0$, а из $\beta = 0$ следует, что $R = \beta t = 0$. Для корня (1.8) ориентация траекторий разрыва и частиц та же, как и в случае (1.3), т. е. дается фиг. 1, а и б. Более того, при $\rho_+ = \rho_-$ (1.8) сводится к (1.3). Второй корень упомянутого выше квадратного уравнения есть $D = (u_+ \alpha_+ - u_- \alpha_-) / (\alpha_+ - \alpha_-)$ и дает случаи, изображенные на фиг. 1, в и д. Здесь в отличие от фиг. 1, а и б частицы попадают на разрыв не с двух,

а с одной стороны и «испускаются» — с другой. Какая это будет сторона при $u_- > u_+$, зависит только от соотношения между ρ_- и ρ_+ . Так, фиг. 1, *г* соответствует $\rho_+ < \rho_-$, а фиг. 1, *д* — $\rho_+ > \rho_-$. Хотя при отсутствии специальных дополнительных механизмов испускание частиц разрывом кажется физически нереальным, не исключено, что в некоторых ситуациях второй корень может оказаться полезным даже несмотря на то, что при $\rho_+ = \rho_-$ он дает бесконечную скорость разрыва.

При $u_+ > u_-$ в результате распада произвольного разрыва в системе, описываемой уравнениями (1.4), возникает область, свободная от частиц



Фиг. 2

($\rho \equiv 0$). На фиг. 1, *е* она заштрихована. В задаче об отколе этот случай недавно был рассмотрен Г. А. Атановым. При $u_+ > u_-$ можно построить еще два решения с разрывом (1.7), которые отвечают обоим корням для D . Эти решения, однако, в отличие от предыдущего «неустойчивы» по отношению к малому «сглаживанию» начального разрыва. Соответствующие рассуждения аналогичны тем, которые приводятся, например, в [1] при анализе подобной ситуации для (1.1) и (1.2). Обратим, наконец, внимание на принципиальное различие случаев, изображенных на фиг. 1, *в* и *е*.

2. Приведем теперь две сравнительно простые задачи, в которых среду в той или иной степени можно считать лишенной собственного давления. Сначала попытаемся выяснить, чему в рамках газовой динамики могли бы отвечать исследованные выше разрывы, называемые далее разрывами «типа пелены» или просто «пеленой». С этой целью рассмотрим автомодельную задачу о соударении двух однородных потоков газа. Пусть относительная скорость потоков гиперзвуковая, т. е. много больше скорости звука в каждом из них. В результате взаимодействия возникнут две ударные волны, ограничивающие ударный или сжатый слой, как показано на фиг. 2, *а*. Газ в сжатый слой поступает через обе ударные волны, причем плотности ρ^+ и ρ^- газов, пришедших в слой с разных сторон, в общем случае различаются. Указанные газы разделены контактным разрывом (штриховая линия на фиг. 2, *а*). По давлению и скорости сжатый слой однороден, т. е. $p^+ = p^- = P$ и $u^+ = u^- = D$. Пусть далее относительные скорости распространения ударных волн по газу перед ними ($D_{\pm} - u_{\pm}$) по модулю намного превосходят соответствующие скорости звука a_{\pm} , т. е. $M_{\pm} \equiv |D_{\pm} - u_{\pm}| / a_{\pm} \gg 1$. Тогда в условиях сохранения импульса на скачке можно, как известно [2], опустить давление набегающего потока p_+ или p_- . В итоге эти условия для обоих скачков примут

вид

$$\begin{aligned} P + \rho^+ (D_+ - D)^2 &= \rho_+ (D_+ - u_+)^2 \\ P + \rho^- (D_- - D)^2 &= \rho_- (D_- - u_-)^2 \end{aligned}$$

Исключим из этих равенств P и, используя условия сохранения массы

$$(2.1) \quad \rho^\pm (D_\pm - D) = \rho_\pm (D_\pm - u_\pm)$$

избавимся от ρ^+ и ρ^- . Это даст соотношение

$$(2.2) \quad \rho_+ (D_+ - u_+)^2 - \rho_+ (D_+ - u_+)(D_+ - D) = \rho_- (D_- - u_-)^2 - \rho_- (D_- - u_-)(D_- - D)$$

Пусть теперь наряду с $M_\pm \rightarrow \infty$ растет уплотнение газов на скачках, т. е. отношения ρ^\pm / ρ_\pm также стремятся к бесконечности. Для совершенного газа с показателем адиабаты κ эти отношения стремятся к $\varepsilon^{-1} \equiv \equiv (\kappa + 1) / (\kappa - 1)$ и подобная ситуация означает, что $\kappa \rightarrow 1$, а $\varepsilon \rightarrow 0$. При этом, как следует из условия сохранения потока энергии на скачке, для бесконечного уплотнения необходимо, чтобы $M_\pm \gg \varepsilon^{-1/2}$. Если $\rho^\pm / \rho_\pm \rightarrow \rightarrow \infty$, то, согласно (2.1), $D_\pm \rightarrow D$, что позволяет опустить вторые слагаемые в (2.2). Извлекая из обеих частей полученного равенства квадратный корень, получим оба корня п. 1 для D . Поскольку, однако, в данной задаче газ входит в сжатый слой через оба скачка, то физический смысл имеет только первый корень, т. е. (1.8). Если для ударного слоя, толщина которого при $\varepsilon = 0$ также равна нулю, ввести поверхностную плотность R и удельную внутреннюю энергию E , то уравнения для их определения совпадут с (1.7), а для неавтомоделных задач — с (1.6). Поверхностную плотность R можно ввести и при $\varepsilon > 0$. Для ее определения получится уравнение

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= \rho_+ (D_+ - u_+) - \rho_- (D_- - u_-) \equiv [\rho (D - u)] + \\ &+ \frac{\rho_+^2}{\rho^+} (D_+ - u_+) - \frac{\rho_-^2}{\rho^-} (D_- - u_-), \quad R(t) = \int_{x_-(t)}^{x_+(t)} \rho(x, t) dx \end{aligned}$$

Здесь $x = x_\pm(t)$ — уравнения траекторий ударных волн; вторая запись правой части получена из первой с учетом (2.1). Как было показано выше, с ростом отношений ρ^\pm / ρ_\pm правая часть (2.3) стремится к $[\rho (D - u)]$. Поэтому для $\varepsilon \neq 0$ ее второе и третье слагаемые дают погрешность модели среды с нулевым собственным давлением.

В только что рассмотренном примере «гиперзвукового» соударения потоков пренебрежение давлением допустимо лишь вне ударного слоя. Внутри же слоя, напротив, $p \equiv P \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и естественно, что давление не может не учитываться. Тем не менее, и в этом случае введение разрывов типа пелены дает правильную качественно (а при $\varepsilon = 0$ и количественно) картину течения вне ударных слоев. К тому же во многих случаях ширина этих слоев, уменьшающаяся при $\varepsilon \rightarrow 0$, может быть мала по сравнению с характерным размером задачи.

Обратимся к другой задаче, также имеющей точное решение. Выше газ вне ударного слоя имел собственное давление, просто его вклад в потоки импульса и энергии был пренебрежимо мал. Пусть теперь собственное

давление действительно отсутствует, а исследуемая среда есть совокупность невзаимодействующих частиц. В таком случае при $u_- > u_+$ в задаче о распаде разрыва возникнет «уплотненный» слой, в который частицы попадают и справа и слева (фиг. 2, б), а объемная плотность $\rho = \rho_+ + \rho_-$ хотя и превосходит и ρ_+ и ρ_- , но не стремится к бесконечности. При сильном разрежении, когда роль столкновений в слое несущественна, течение в нем будет «двускоростным». Именно данное обстоятельство (переход от односкоростной к двускоростной модели) позволяет построить, как это сделано на фиг. 2, б, решение без пелены. Однако и здесь можно ввести поверхностную плотность $R = (\rho_+ + \rho_-)(x_+ - x_-)$, причем отличие R от нуля в этом случае есть результат конечности $(x_+ - x_-)$, а не обращения в бесконечность объемной плотности. Из-за столкновений частиц, которые всегда все же происходят, потоки частиц не смогут совершенно беспрепятственно проникать один сквозь другой. В результате ρ в уплотненном слое будет расти, а его ширина — уменьшаться. С ростом ρ частота столкновений, а вместе с ней и собственное давление увеличиваются. В конце концов учет давления становится необходимым. Например, в задаче об отколе последнее заведомо произойдет после того, как $\rho_+ + \rho_-$ превысит некоторое критическое значение ρ_0 , являющееся физической характеристикой среды. После этого взаимодействие типа изображенного на фиг. 2, б заменится соударением с образованием ударного слоя (фиг. 2, а), в котором среда будет восстанавливать свою «сплошность». Насколько известно автору, на отмеченное обстоятельство до сих пор не обращалось должного внимания, в том числе, при расчете течений с отколом методом С. К. Годунова (как известно [3], в основе этого метода лежит решение задачи о распаде разрыва).

Отметим, наконец, весьма своеобразный характер «сходимости», который следует ожидать при численном интегрировании системы (1.4) методами «сквозного» счета. Если h — шаг разностной сетки, то при ее измельчении ($h \rightarrow 0$) объемная плотность на «размазанной» пелене будет расти, как h^{-1} . В рамках одножидкостной модели это, однако, не только не должно вызывать беспокойства, а напротив, служит доказательством правильности получающихся результатов. Вне пелены характер сходимости результатов обычный.

3. Наиболее важным примером сред без собственного давления является диспергированная фаза смеси газа с инородными частицами. Как и выше, здесь разрывы типа пелены приходится вводить тогда, когда имеет место пересечение траекторий (или линий тока) частиц, но несмотря на это анализ по-прежнему ведется в рамках двухжидкостной модели (одна «жидкость» — газ, другая — частицы). Перейдем к рассмотрению указанных разрывов, имея в виду, что параметры газа при его прохождении через пелену меняются скачком из-за конечного воздействия частиц.

Заметим, что ранее (см., например, [4,5]) при анализе поверхностей разрыва в двухжидкостной сплошной среде подобные разрывы не исследовались. По-видимому, впервые на возможность образования пелены указано в [6], хотя соображения, имеющие некоторое отношение к подобным разрывам, ранее высказывались А. М. Гиляровской и Р. Е. Соркиным.

Не останавливаясь на основных допущениях, которые лежат в основе модели двухжидкостной сплошной среды рассматриваемого типа, выпишем необходимые для дальнейшего интегральные законы сохранения. Пусть Ω — произвольный, не зависящий от t объем, целиком заполненный хотя бы одной из взаимодействующих сред; σ — его граница; \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали к σ ; $U_n = \mathbf{U} \cdot \mathbf{n}$, где \mathbf{U} — вектор скорости. Кроме того, параметрам частиц (второй фазы) будем приписывать индекс s , а параметры газа (несущей фазы) обозначать теми же буквами без индекса. Тогда интегральным законам сохранения, описывающим в двухжидкостном приближении течение смеси газа и частиц, можно придать вид

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho d\Omega + \iint_{\sigma} \rho U_n d\sigma &= 0 \\ \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho \mathbf{U} d\Omega + \iint_{\sigma} (\rho U_n \mathbf{U} + p \mathbf{n}) d\sigma + \iiint_{\Omega} \rho_s \mathbf{f} d\Omega &= 0 \\ \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho E d\Omega + \iint_{\sigma} \rho U_n I d\sigma + \iiint_{\Omega} \rho_s (\mathbf{U}_s \mathbf{f} + q) d\Omega &= 0 \\ \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho_s d\Omega + \iint_{\sigma} \rho_s U_{sn} d\sigma &= 0 \\ \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho_s U_s d\Omega + \iint_{\sigma} \rho_s U_{sn} U_s d\sigma - \iiint_{\Omega} \rho_s \mathbf{f} d\Omega &= 0 \\ \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho_s E_s d\Omega + \iint_{\sigma} \rho_s U_{sn} E_s d\sigma - \iiint_{\Omega} \rho_s (\mathbf{U}_s \mathbf{f} + q) d\Omega &= 0 \\ E = e + U^2/2, \quad I = E + p/\rho \end{aligned}$$

Здесь \mathbf{f} — удельная (приходящаяся на единицу массы частиц) сила, с которой газ действует на частицы, а q — также удельный тепловой поток от газа к частицам; \mathbf{f} и q всюду, в частности на пелене, считаются известными функциями параметров обеих сред. Тогда (3.1) имеет смысл при любых (в том числе, разрывных) распределениях параметров, например, для пелены, на которой при бесконечной ρ_s конечна поверхностная плотность, а также для линий, называемых далее «шнуром». На шнуре конечна не поверхностная, а линейная плотность. Будем далее приписывать верхние индексы σ и l поверхностным и линейным параметрам для пелены и шнура соответственно. Так, ρ_s^σ будет означать поверхностную, т. е. приходящуюся на единицу поверхности пелены, а ρ_s^l — линейную, т. е. приходящуюся на единицу длины шнура, плотности частиц.

Не останавливаясь на тангенциальных разрывах для газа и частиц и на ударных волнах (в газе), которые рассматривались и ранее, отметим следующее. При пренебрежении объемом частиц, что далее предполагается, параметры газа на тангенциальных разрывах частиц непрерывны, а параметры газа при переходе через тангенциальные разрывы в газе и ударные волны рвутся [4,5]. Если в последних двух случаях \mathbf{f} и q конечны, то параметры частиц на этих разрывах сохраняют непрерывность, причем явный вид выражений для \mathbf{f} и q здесь не имеет значения. Как видно из дальнейшего, аналогичные требования к знанию \mathbf{f} и q предъявляются и в случае шнура. Для пелены в общем случае знание выражений для \mathbf{f} и q необходимо, хотя и здесь возможны ситуации, когда достаточно существенно меньшая информация.

Различие в требованиях к знанию f и q на пелене, с одной стороны, и на прочих разрывах — с другой, обусловлено двумя причинами. Во-первых, частицы движутся вдоль пелены, а не пересекают ее. Во-вторых, плотность ρ_s на пелене бесконечна (при конечном значении ρ_s^0), что вызывает конечные изменения параметров газа, протекающего через пелену. Поэтому явные выражения для f и q нужны и для описания движения самой пелены и для определения скачков параметров газа на ней. В шнуре плотность ρ_s настолько велика, что газ обтекает его как бесконечно тонкую твердую нить, не влияя при конечных f^l и q^l на ее движение, а так как f^l и q^l — величины, приходящиеся на единицу массы частиц, то предположение об их конечности представляется естественным.

Записывая соотношения на пелене, ограничимся случаем стационарного течения. Пусть σ — произвольная площадка на пелене с границей γ , а единичный вектор нормали к σ , т. е. n , направлен по потоку. По определению

$$(3.2) \quad n \cdot U_s^\sigma = 0$$

Пусть далее N — единичный вектор внешней нормали к γ , касающийся пелены; $U_{sN}^\sigma = U_s^\sigma \cdot N$, а $U_\tau = U - U_n n$ — касательная к пелене компонента U . Тогда соотношения, выполняющиеся в силу (3.1) на стационарной пелене, записываются в форме

$$(3.3) \quad \begin{aligned} [\rho U_n] = 0, \quad [p + \rho U_n^2] + \rho_s^\sigma f_n^\sigma = 0, \quad (\rho U_n)_- [U_\tau] + \rho_s^\sigma f_\tau^\sigma = 0 \\ (\rho U_n)_- [I] + \rho_s^\sigma (U_s^\sigma f^\sigma + q^\sigma) = 0 \\ \iint_\sigma [\rho_s U_{sn}] d\sigma + \oint_\gamma \rho_s^\sigma U_{sN}^\sigma d\gamma = 0, \quad \iint_\sigma ([\rho_s U_{sn} U_s] - \\ - \rho_s^\sigma f^\sigma) d\sigma + \oint_\gamma \rho_s^\sigma U_{sN}^\sigma U_s^\sigma d\gamma = 0, \quad \iint_\sigma \{[\rho_s U_{sn} E_s] - \\ - \rho_s^\sigma (U_s^\sigma f^\sigma + q^\sigma)\} d\sigma + \oint_\gamma \rho_s^\sigma U_{sN}^\sigma E_s^\sigma d\gamma = 0 \end{aligned}$$

где f_n^σ и f_τ^σ — соответствующие компоненты f^σ . Отметим, что в данной модели, согласно последнему уравнению (3.3), на пелене имеет место обмен кинетической и внутренней энергий в «газе частиц», хотя вне пелены такого обмена нет.

Если вектор A^σ , касающийся пелены, имеет непрерывную нормальную компоненту A_N^σ к любой кривой γ на пелене, то справедлива формула

$$(3.4) \quad \oint_\gamma A_N^\sigma d\gamma = \iint_\sigma \nabla_\sigma A^\sigma d\sigma \quad \left(\nabla_\sigma A^\sigma = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma} \oint_\gamma A_N^\sigma d\gamma \right)$$

с «оператором дивергенции» ∇_σ на σ .

Пусть A_k — проекция A на ось k декартовой системы координат. Тогда в случаях, когда справедливо (3.4), три последних равенства (3.3) дают три уравнения в частных производных с двумя независимыми переменными (например криволинейными ортогональными координатами на σ), которым должны удовлетворять непрерывные поверхностные параметры частиц на пелене

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \nabla_\sigma (\rho_s^\sigma U_s^\sigma) + [\rho_s U_{sn}] = 0 \\ \nabla_\sigma (\rho_s^\sigma U_s^\sigma U_{sk}^\sigma) + [\rho_s U_{sn} U_{sk}] - \rho_s^\sigma f_k^\sigma = 0 \\ \nabla_\sigma (\rho_s^\sigma U_s^\sigma E_s^\sigma) + [\rho_s U_{sn} E_s] - \rho_s^\sigma (U_s^\sigma f^\sigma + q^\sigma) = 0 \end{aligned}$$

Переход в (3.5) от ∇_σ к оператору, записанному в декартовых или других координатах, производится по известным правилам. Не делая этого в общем случае, перепишем в качестве примера (3.5) для плоского и осесимметричного течений. Здесь наряду с первыми четырьмя конечными равенствами (3.3) на пелене, согласно (3.2) и (3.5), выполняются соотношения

$$(3.6) \quad \begin{aligned} x' &= u_s^\sigma / V_s^\sigma, \quad y' = v_s^\sigma / V_s^\sigma, \quad (y^\nu \rho_s^\sigma V_s^\sigma)' + y^\nu [\rho_s V_{sn}] = 0 \\ (y^\nu \rho_s^\sigma V_s^\sigma u_s^\sigma)' + y^\nu ([\rho_s V_{sn} u_s] - \rho_s^\sigma f_x^\sigma) &= 0 \\ (y^\nu \rho_s^\sigma V_s^\sigma v_s^\sigma)' + y^\nu ([\rho_s V_{sn} v_s] - \rho_s^\sigma f_y^\sigma) &= 0 \\ (y^\nu \rho_s^\sigma V_s^\sigma \Gamma_s^\sigma)' + y^\nu ([\rho_s V_{sn} \Gamma_s] - \rho_s^\sigma y^\nu f_{z,\omega}^\sigma) &= 0 \\ (y^\nu \rho_s^\sigma V_s^\sigma E_s^\sigma)' + y^\nu \{[\rho_s V_{sn} E_s] - \rho_s^\sigma (U_s^\sigma f^\sigma + q^\sigma)\} &= 0 \end{aligned}$$

В (3.6) штрихом обозначена производная $d/d\tau$, где τ — расстояние, отсчитываемое вдоль линии пересечения пелены с плоскостью xy ; x, y, z или x, y, ω — декартовы или цилиндрические координаты; $\nu = 0$ и 1 в плоском и осесимметричном случаях соответственно; индексы x, y, z и ω приписаны проекциям f^σ на соответствующие оси; $\Gamma = y^\nu \omega$; проекции U на оси координат обозначены через u, v и w ; V — «меридиональная» компонента U , $V = \sqrt{u^2 + v^2}$.

В некоторых случаях, например если пелена образуется на плоскости симметрии, $U_{n-} = U_{n+} = 0$, т. е. газ не пересекает ее. Здесь первое уравнение (3.3) удовлетворяется автоматически, второе в силу $f_n^\sigma = 0$ приводит к нулевому скачку давления: $[p] = 0$, а третье и четвертое дают $f_\tau^\sigma = 0$ и $q^\sigma = 0$. Для пелены подобного типа f^σ и q^σ выпадают из (3.3), (3.5) и (3.6), а это делает ненужными явные выражения для f^σ и q^σ . Что касается тех частей газа, чьи линии тока лежат на пелене, то для них в таком случае, согласно полученным равенствам, $U_\tau^\sigma = U_{s\tau}^\sigma$ и $T^\sigma = T_s^\sigma$, где T — температура. Здесь и выше использовались предположения о том, что $f \sim U - U_s$ и $q \sim T - T_s$, и, следовательно, равенство нулю q^σ , f^σ или любой компоненты f^σ означает совпадение температур и скоростей газа и частиц или их компонент.

При пересечении траекторий «частиц пелены» на ней возникает линия разрыва, названная ранее шнуром и характеризующаяся конечной линейной плотностью ρ_s^l . Соотношения, выполняющиеся на стационарном шнуре, нетрудно получить из трех последних уравнений (3.3). Не выписывая их, заметим, что на шнуре из-за обращения в бесконечность ρ_s^σ имеют место равенства: $f^l = 0$ и $q^l = 0$. Поэтому для описания движения шнура в общем случае не требуются явные выражения для f^l и q^l , а сам шнур оказывается «особой» линией тока газа. Последняя, впрочем, никак не влияет на течение газа вне шнура. Иногда шнур может возникнуть не на пелене, а в области непрерывности потока. В качестве примера укажем на возможность его формирования на оси симметрии осесимметричного потока. Момент, точка или линия зарождения шнура или пелены определяются условиями, аналогичными условиям возникновения ударных волн в газовой динамике. Как правило, в точке и на линии «зарождения» поверхностная или линейная плотность частиц равна нулю. Исключение

составляют фокусировка траекторий (линий тока) частиц, а также, по существу, уже рассмотренный в п. 1 разрыв, образующийся на линии или на поверхности «начальных данных».

4. Остановимся на некоторых особенностях, возникающих при введении пелены в электрогазодинамике. Для двухжидкостной модели (газ плюс заряженные частицы), которой ограничивается дальнейший анализ, эти особенности состоят в следующем. Пусть \mathbf{E} — вектор напряженности электрического поля, диэлектрическая постоянная газа не отличается от соответствующей константы для вакуума, напряженность магнитного поля пренебрежимо мала, а g и g^σ — объемная и поверхностная плотности заряда частиц и пелены соответственно. Если δ — заряд единицы массы частиц, то $g = \delta\rho_s$ и $g^\sigma = \delta\rho_s^\sigma$. Для нормальной E_n и касательной E_τ к пелене компонент вектора \mathbf{E} имеем

$$[E_n] = \delta\rho_s^\sigma, \quad [E_\tau] = 0$$

При написании уравнений движения пелены должны быть учтены все внешние по отношению к рассматриваемому элементу пелены силы, в том числе электрические. Касательная к пелене составляющая этих сил равна $\delta\rho_s^\sigma E_\tau$. Проекция тех же сил на нормаль к пелене вычисляется по соответствующей компоненте напряженности поля, создаваемого «внешними» к данному элементу зарядами. Пренебрегая толщиной пелены, нетрудно показать, что указанная компонента есть $(E_{n+} + E_{n-})/2$, и, следовательно, искомая проекция равна $\delta\rho_s^\sigma (E_{n+} + E_{n-})/2$.

В заключение, не вдаваясь в детали, отметим следующее. В выполненном выше рассмотрении появление пелены и шнура есть не столько «физический феномен», сколько результат использования фиксированной (одножидкостной, двухжидкостной и т. п.) модели сплошной среды. По указанной причине не следует удивляться тому, что в пелене ρ_s обращается в бесконечность, т. е. превышает плотность материала частиц, или тому, что пелена из электрически заряженных частиц в данном приближении не разлетается из-за взаимного расталкивания одноименных зарядов. Эти же обстоятельства ограничивают ценность результатов анализа эволюционности пелены. Тем не менее, укажем, что в двухжидкостной модели с незаряженными частицами пелена эволюционна, если частицы выпадают на нее с обеих сторон, а нормальные компоненты скорости газа (в системе координат, связанной с пеленой) либо дозвуковые, либо сверхзвуковые до и после пелены. При невыполнении перечисленных условий незаряженная пелена становится неэволюционной.

Переход к многожидкостной модели без ограничения числа сред является, как уже отмечалось, одним из способов исключения разрывов типа пелены и шнура. Последняя ситуация вполне аналогична учету вязкости и теплопроводности, которые размазывают скачки уплотнения в идеальном газе. В то же время следует помнить, что переход к более чем двухжидкостным моделям в каждом случае не только усложняет исследование и расчеты, но и требует дополнительной информации о взаимодействии разных сред. В модели, допускающей пелену и шнуры, требуемая информация более «феноменологична» и сводится к заданию выражений для f^σ и q^σ , причем, как было показано выше, в ряде случаев удастся обойтись и без этих выражений. Кроме того, взаимодействие частиц, имеющих пересекающиеся траектории, будет сужать ширину зон многожидкостного течения и уменьшать погрешности, связанные с заменой таких зон разрывами рассмотренного выше типа. Заметим, наконец, что исследовавшиеся ранее в электрогазодинамике разрывы с поверхностным зарядом [7] отличаются от разрывов типа пелены.

Автор признателен В. И. Копченону, Л. Е. Стернину и А. Б. Ватажину за полезные обсуждения.

Поступила 15 VI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Годунов С. К., Рябенский В. С. Разностные схемы (введение в теорию). М., «Наука», 1973.
2. Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М., Физматгиз, 1959.
3. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М., «Наука», 1976.
4. Крайко А. Н., Стернин Л. Е. К теории течений двухскоростной сплошной среды с твердыми или жидкими частицами. ПММ, 1965, т. 29, вып. 3.
5. Крайко А. Н., Нигматулин Р. И., Старков В. К., Стернин Л. Е. Механика многофазных сред. Итоги науки и техники. Гидромеханика, т. 6. М., ВИНТИ, 1972.
6. Крайко А. Н. Решение прямой задачи теории сопла Лавала при течении смеси газа и инородных (твердых или жидких) частиц. В сб.: Парожидкостные потоки. Минск, Изд-во ин-та тепло- и массообмена им. А. В. Лыкова, 1977.
7. Гогосов В. В., Полянский В. А. Электродинамика: задачи и приложения, основные уравнения, разрывные решения. Итоги науки и техники. Механика жидкости и газа, т. 10. М., ВИНТИ, 1976.