

О КОНСТРУИРОВАНИИ МОДЕЛЕЙ ПОЛЯРИЗУЮЩИХСЯ ДИСПЕРСНЫХ И МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СРЕД

В. В. Гогосов, В. А. Налетова, Г. А. Шапошникова

(Москва)

Выводится система уравнений, описывающая движение поляризующихся многофазных (дисперсных) сред в электромагнитном поле в приближении электрогидродинамики при использовании идей термодинамики и гидродинамики поляризующихся сред, изложенных в работах [1-4].

Система состоит из уравнений движения и энергии для смеси в целом, «диффузионных» соотношений, заменяющих уравнения движения и энергии для каждой фазы, уравнений неразрывности, состояния и уравнений Максвелла. Предполагается, что среда состоит из k фаз, которые можно считать несжимаемыми, и $N - k$ сжимаемых фаз; каждая из фаз поляризуется по своему закону и имеет свою температуру.

Получена формула для силы, действующей на рассматриваемую среду со стороны электромагнитного поля, часть которой, связанная с неравновесностью процесса, включает в себя производные от средней скорости, разности давлений, химических потенциалов и температур различных фаз. Давление среды, несущая фаза которой несжимаема, в отличие от смеси сжимаемых фаз [2] не определяется термодинамикой среды, а должно находиться из решения задачи.

Выводятся уравнения для изменения объемных концентраций сжимаемых фаз, которые связывают изменения истинной плотности этих фаз с разностью давлений, температур, химических потенциалов и градиентами скорости. Отмечается возможность задания внутренней энергии в виде функции как зависимых, так и независимых параметров. Указывается на эквивалентность уравнений, получаемых в обоих случаях. Как частный случай из результатов данной работы следуют уравнения для поляризующейся несжимаемой гомогенной среды или для смеси нескольких несжимаемых фаз.

Выводятся уравнения движения поляризующихся и намагничивающихся многокомпонентных сред. Подробно обсуждаются уравнения диффузии в многокомпонентных средах в магнитном поле, когда каждая компонента намагничивается по своему закону.

Наличие в дисперсных системах фаз, которые можно считать несжимаемыми, существенно усложняет описание таких систем. Это обусловлено тем, что введение таких параметров, как давление, химические потенциалы, энтропия фаз, таких понятий, как плотность энергии и плотность потока энергии и т. д., определяется термодинамикой системы. Последовательное использование такого подхода для описания движения многофазной намагничивающейся среды в приближении феррогидродинамики, когда все фазы сжимаемы, приведено в [2]. Результаты [2] не применимы, когда часть фаз можно считать несжимаемыми. Наличие несжимаемых фаз требует введения новых, не связанных с термодинамикой параметров, и переопределения использовавшихся ранее параметров системы: давления и т. д. Таким образом, формулы для сил, действующих на среду, для работы этих сил, диффузионные соотношения и другие формулы и уравнения, описывающие многофазные среды, содержащие несжимаемые фазы, существенно изменятся по сравнению с результатами работы [2].

1. Вывод уравнений, описывающих движение намагничивающихся дисперсных сред. Рассмотрим движение дисперсной поляризующейся среды, состоящей из N фаз: несущего газа или жидкости, в которых диспергированы $N - 1$ сортов заряженных фаз (капель, пузырей, твердых частиц и т. д.) в электрическом поле. Каждая из фаз может поляризоваться, вообще говоря, по своему закону.

Пусть фазы обладают некоторыми проводимостями, а в среде имеются два сорта заряженных частиц: свободные положительные ионы и отрицательные ионы или электроны. Будем считать, что, помимо этих свободных заряженных частиц, имеются элементарные заряды, налипшие на диспергированные частицы и относительно них не перемещающиеся (диспергированные частицы заряжены). Предположим, что в рассматриваемой среде k фаз можно считать несжимаемыми, а остальные $N - k$ фаз — сжимаемыми. Обозначим цифрами $1, 2, \dots, k$ ($k + 1, k + 2, \dots, N$) параметры, относящиеся к несжимаемым (сжимаемым) фазам, а цифрами $N + 1, N + 2$ — параметры, относящиеся к свободным положительно и отрицательно заряженным ионам соответственно.

Будем считать, что фаза α занимает объем Γ_α в единице объема ($\Gamma_1 + \Gamma_2 + \dots + \Gamma_N = 1$) и имеет плотность ρ_α° , (истинная плотность фазы). Введем температуру T_α , энтропию единицы массы s_α , среднюю скорость v_α и размазанную плотность $\rho_\alpha = \Gamma_\alpha \rho_\alpha^\circ$ каждой фазы. Пусть для определенности ионы и электроны занимают весь объем, т. е. $\Gamma_{N+1} = \Gamma_{N+2} = 1$.

Обозначим посредством q_α плотность объемного заряда фазы α и свободных положительно и отрицательно заряженных частиц; $j_\alpha = q_\alpha v_\alpha$ — плотность электрического тока фазы α или свободных зарядов. Говоря о некотором параметре с индексом α или об уравнениях, в которые входят параметры с индексом α , всюду, где не оговорено противоположное, будем подразумевать, что соответствующий параметр или уравнение определены для значений α , изменяющихся от 1 до $N + 2$. Величины $\rho_\alpha^\circ = \text{const}$, когда $\alpha = 1, 2, \dots, k$. Величина $q_\eta = 0$; индексом η здесь и далее обозначаются параметры, относящиеся к дисперсной (несущей) фазе.

Определим средние плотность ρ , скорость смеси u , плотность заряда q и полный ток j формулами (здесь и далее Σ и $\Sigma_{\alpha \neq \beta}$, если не оговорено противоположное, означают, что суммирование ведется соответственно от 1 до $N + 2$ и от 1 до $N + 2$, за исключением $\alpha = \beta$)

$$(1.1) \quad \rho = \sum \rho_\alpha, \quad \rho u = \sum \rho_\alpha v_\alpha, \quad q = \sum q_\alpha, \quad j = \sum j_\alpha$$

Будем рассматривать движение среды в приближении электрогидродинамики [3,5,6]. В этом приближении векторы электрического поля и электрической индукции не преобразуются при переходе от одной инерциальной системы к другой. Уравнения Максвелла в рассматриваемом приближении запишутся в виде

$$(1.2) \quad \text{rot } E = 0, \quad \text{div } D = 4\pi q$$

$$\text{rot } H = \frac{4\pi}{c} j + \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t}, \quad \text{div } B = 0$$

Предположим, что внутренняя энергия единицы массы среды и поля U есть функция энтропий каждой фазы и свободных заряженных частиц, рассчитанных на единицу массы смеси $c_\alpha s_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, \dots, N + 2$), плотности смеси ρ , концентраций фаз и свободных заряженных частиц $c_\alpha = \rho_\alpha / \rho$ ($\alpha = 1, 2, \dots, N + 2$), объемных концентраций фаз Γ_α ($\alpha = 1, 2, \dots, N$), абсолютной величины вектора электрической индукции D (кинетической энергией несущей фазы, связанной с пульсациями диспергированных фаз, пренебрегается, для сокращения записи не учитывается также зависимость внутренней энергии системы от величины межфазных поверхностей)

$$(1.3) \quad U = U(c_\alpha s_\alpha, \rho, c_\alpha, \Gamma_\alpha, D)$$

Изменение внутренней энергии запишется в виде (по одинаковым латинским индексам здесь и далее предполагается суммирование от единицы до трех)

$$(1.4) \quad dU = \sum T_\alpha dc_\alpha s_\alpha + \frac{p^c}{\rho^2} d\rho + \\ + \sum \xi_\alpha dc_\alpha - \sum \frac{p_\alpha}{\rho} d\Gamma_\alpha + \frac{E_k dD_k}{4\pi\rho} \\ T_\alpha = \frac{\partial U}{\partial c_\alpha s_\alpha}, \quad \frac{p^c}{\rho^2} = \frac{\partial U}{\partial \rho}, \quad \xi_\alpha = \frac{\partial U}{\partial c_\alpha}, \quad \frac{p_\alpha}{\rho} = - \frac{\partial U}{\partial \Gamma_\alpha} \\ \frac{E_k}{4\pi\rho} = \frac{\partial U}{\partial D_k}$$

Всюду предполагается, что частные производные любой функции f нескольких заданных параметров по одному из них берутся в предположении, что остальные параметры постоянны, например

$$\frac{\partial f(c_\alpha s_\alpha, \rho, c_\alpha, \Gamma_\alpha, D)}{\partial c_\gamma s_\gamma} = \left(\frac{\partial f}{\partial c_\gamma s_\gamma} \right)_{c_\alpha s_\alpha (\alpha \neq \gamma), \rho, c_\alpha, \Gamma_\alpha, D}$$

Из последнего равенства (1.4) следует, что векторы электрического поля и электрической индукции параллельны: $D = \varepsilon E$, $\varepsilon = (8\pi\rho \partial U / \partial D^2)^{-1}$. Диэлектрическая проницаемость среды ε является в общем случае функцией параметров $c_\alpha s_\alpha$, ρ , c_α , Γ_α , D , определяющих внутреннюю энергию.

Уравнения неразрывности для плотности фаз и компонент, плотности смеси ρ , концентраций c_α и заряда каждой фазы q_α имеют вид

$$(1.5) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho u = 0, \quad \rho \frac{dc_\alpha}{dt} = \kappa_\alpha^p - \operatorname{div} J_\alpha, \quad J_\alpha = \rho_\alpha (v_\alpha - u) \\ \frac{\partial q_\alpha}{\partial t} + \operatorname{div} j_\alpha = \kappa_\alpha^q \quad (\alpha = 1, 2, \dots, N, \alpha \neq \eta), \quad q_\eta = 0 \\ q_{N+1(N+2)} = \frac{z_{N+1(N+2)} e_{N+1(N+2)} \rho_{N+1(N+2)}}{m_{N+1(N+2)}}, \quad \sum \kappa_\alpha^p = 0$$

Здесь $z_{N+1(N+2)}$, $m_{N+1(N+2)}$ — соответственно кратность и масса положительных (отрицательных) свободных зарядов $e_{N+1} = e$, $e_{N+2} = -e$, e — заряд протона, κ_α^p , κ_α^q — скорость рождения массы и заряда α -й фазы или компоненты.

Из первого и второго уравнений (1.5) получим уравнения для Γ_α несжимаемых фаз.

$$(1.6) \quad d\Gamma_\alpha / dt + \Gamma_\alpha \operatorname{div} \mathbf{u} = (\kappa_\alpha^\rho - \operatorname{div} \mathbf{J}_\alpha) / \rho_\alpha^\circ, \quad \alpha = 1, \dots, k$$

Уравнение импульса для среды и поля в пренебрежении импульсом поля можно записать в виде (силой тяжести для простоты пренебрегается)

$$(1.7) \quad \partial \rho u_i / dt = -\partial (\rho u_i u_k - p_{ik}) / \partial x_k$$

Вводя давление смеси p , тензор напряжений p_{ik} запишем следующим образом:

$$(1.8) \quad p_{ik} = -p\delta_{ik} + \tau_{ik}$$

Представим давление p в виде

$$(1.9) \quad p = p^c + p^{inc}$$

Здесь p^{inc} — часть давления смеси, не связанная с термодинамическими параметрами сжимаемых фаз. Слагаемое p^{inc} вводится для учета не выражающегося через термодинамические функции давления несжимаемых фаз. В случае, когда все фазы сжимаемы, давление p^{inc} вводить в определяющие параметры среды не нужно. Этот случай рассмотрен в работе [2].

Используя тождество Гиббса (1.4) и уравнения (1.5), (1.7) — (1.9), получим

$$(1.10) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{u^2}{2} + \rho U \right) = & - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\rho u_k \left(\frac{u^2}{2} + U + \frac{p}{\rho} \right) + \right. \\ & + \frac{c}{4\pi} [\mathbf{EH}]_k + q_k - u_i \Pi_{ik} \left. \right] + \sum \rho T_\alpha \frac{dc_\alpha s_\alpha}{dt} + p^{inc} \operatorname{div} \mathbf{u} + \operatorname{div} \mathbf{q} + \\ & + \sum \xi_\alpha (\kappa_\alpha^\rho - \operatorname{div} \mathbf{J}_\alpha) - (\mathbf{j} - q\mathbf{u}) \mathbf{E} - \sum_{\alpha=1}^N p_\alpha \frac{d\Gamma_\alpha}{dt} - \Pi_{ik} \nabla_k u_i + \\ & + u_i \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\tau_{ik} - \frac{E_i D_k}{4\pi} + \frac{\mathbf{E} \mathbf{D}}{4\pi} \delta_{ik} - \Pi_{ik} \right) \end{aligned}$$

В правую часть выражения (1.10) добавлено и вычтено из него слагаемое $\partial (q_k - u_i \Pi_{ik}) / \partial x_k$. Физический смысл и выражения для вектора \mathbf{q} и тензора Π_{ik} приведены ниже.

Следуя работе [2], сделаем далее три предположения, определяющие модель.

1°. Будем считать, что полная энергия среды и поля и поток энергии к среде и полю соответственно равны

$$(1.11) \quad \rho \frac{u^2}{2} + \rho U, \quad \rho u \left(\frac{u^2}{2} + U + \frac{p}{\rho} \right) + \frac{c}{4\pi} [\mathbf{EH}] + \mathbf{q} - u_i \Pi_{ik} \mathbf{E}_k$$

(\mathbf{E}_k — единичные векторы базиса). При этом уравнение энергии среды и поля запишется в виде

$$(1.12) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{u^2}{2} + \rho U \right) = & - \operatorname{div} \left[\rho u \left(\frac{u^2}{2} + U + \frac{p}{\rho} \right) + \right. \\ & + \frac{c}{4\pi} [\mathbf{EH}] + \mathbf{q} - u_i \Pi_{ik} \mathbf{E}_k \left. \right] \end{aligned}$$

2°. Будем считать, что уравнение изменения энтропии смеси имеет вид

$$(1.13) \quad \sum \rho T_\alpha \frac{dc_\alpha s_\alpha}{dt} - p^{inc} \operatorname{div} \mathbf{u} + \operatorname{div} \mathbf{q} + \sum \xi_\alpha (\kappa_\alpha^\rho - \operatorname{div} \mathbf{J}_\alpha) - \\ - (\mathbf{j} - q\mathbf{u}) \mathbf{E} - \sum_{\alpha=1}^N p_\alpha \frac{d\Gamma_\alpha}{dt} - \Pi_{ik} \nabla_k u_i = 0$$

Из уравнений (1.10), (1.12), (1.13) следует, что

$$(1.14) \quad \frac{\partial}{\partial x_k} \tau_{ik} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{E_i D_k}{4\pi} - \frac{\mathbf{E} \mathbf{D}}{4\pi} \delta_{ik} + \Pi_{ik} \right)$$

3°. Предположим, что диссипативная функция σ имеет вид

$$(1.15) \quad \sigma = \sum_{\alpha \neq \eta} \frac{\rho_\alpha}{T_\eta} \frac{d_\alpha s_\alpha}{dt} (T_\eta - T_\alpha) + \sum_{\alpha \neq \eta} \frac{\kappa_\alpha^\rho l_\alpha}{T_\eta} + \\ + \sum_{\substack{\alpha=k+1 \\ \alpha \neq \eta}}^N \frac{\rho_\alpha}{T_\eta} \frac{d_\alpha (\Gamma_\alpha / \rho_\alpha)}{dt} (p_\alpha^* - p_\eta^*) + \sum_{\alpha \neq \eta} \mathbf{J}_\alpha \xi_\alpha - \mathbf{q} \frac{\nabla T_\eta}{T_\eta^2} + \\ + \left\{ \Pi_{ik} - \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq \eta}}^N \Gamma_\alpha (p_\alpha^* - p_\eta^*) \delta_{ik} \right\} \frac{\nabla_k u_i}{T_\eta}$$

$$\xi_\alpha^* = \xi_\alpha, \quad p_\alpha^* = p_\alpha \quad (\alpha = k+1, \dots, N+2)$$

$$\xi_\alpha^* = \xi_\alpha + p^{inc} \left(\rho_\alpha^\circ \sum_{\gamma=1}^k \Gamma_\gamma \right)^{-1}$$

$$p_\alpha^* = p_\alpha + p^{inc} \left(\sum_{\gamma=1}^k \Gamma_\gamma \right)^{-1} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k)$$

$$l_\alpha = \xi_\eta^* - \xi_\alpha^* + s_\alpha (T_\eta - T_\alpha) + (p_\alpha^* - p_\eta^*) \frac{\Gamma_\alpha}{\rho_\alpha}$$

$$(\alpha \neq N+1, N+2, \eta)$$

$$l_\alpha = \xi_\eta^* - \xi_\alpha^* + s_\alpha (T_\eta - T_\alpha) \quad (\alpha = N+1, N+2)$$

$$\xi_\alpha = \nabla \frac{\xi_\eta^* - \xi_\alpha^*}{T_\eta} + \frac{q_\alpha \mathbf{E}}{\rho_\alpha T_\eta} + s_\alpha \nabla \frac{T_\eta - T_\alpha}{T_\eta} + \frac{\Gamma_\alpha}{\rho_\alpha} \times \\ \times \nabla \frac{p_\alpha^* - p_\eta^*}{T_\eta} \quad (\alpha \neq \eta, N+1, N+2)$$

$$\xi_\alpha = \nabla \frac{\xi_\eta^* - \xi_\alpha^*}{T_\eta} + \frac{q_\alpha \mathbf{E}}{\rho_\alpha T_\eta} + s_\alpha \nabla \frac{T_\eta - T_\alpha}{T_\eta} \quad (\alpha = N+1, N+2)$$

Выражение для диссипативной функции (1.15) существенно отличается от соответствующего выражения (1.20) работы [2]. Отличие связано, во-первых, с тем, что рассматривается поляризуемая, а не намагничиваемая, как в работе [2], среда и, во-вторых, с введением в определяющие параметры системы давления p^{inc} .

Вводя энтропию смеси S формулой $S = \sum c_\alpha s_\alpha$, из уравнений (1.13), (1.15) с учетом выражения для σ (1.15) и определения $\mathbf{j} - q\mathbf{u} = \sum q_\alpha \mathbf{J}_\alpha / \rho_\alpha$

получим уравнение изменения энтропии смеси в виде

$$(1.16) \quad \frac{\partial}{\partial t} \rho S = - \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \rho u_k S + \frac{q_k}{T_\eta} + \frac{1}{T_\eta} \sum_{\alpha \neq \eta} J_{\alpha k} l_\alpha \right\} + \sigma$$

Применяя теорему Кюри и правило Онзагера, получим

$$(1.17) \quad \mathbf{J}_\alpha = \sum_{\nu \neq \eta} L_{\alpha, \nu} \boldsymbol{\xi}_\nu + L_{\alpha, N+3} \nabla T_\eta$$

$$(1.18) \quad - \frac{\mathbf{q}}{T_\eta^2} = \sum_{\nu \neq \eta} L_{N+3, \nu} \boldsymbol{\xi}_\nu + L_{N+3, N+3} \nabla T_\eta$$

$$(1.19) \quad \frac{1}{T_\eta} \rho_\alpha \frac{d_\alpha s_\alpha}{dt} = \sum_{\nu \neq \eta} \Phi_{\alpha, \nu} (T_\eta - T_\nu) + \sum_{\nu \neq \eta} \Phi_{\alpha, N+2+\nu} l_\nu + \\ + \sum_{\substack{\nu=k+1 \\ \nu \neq \eta}}^N \Phi_{\alpha, 2N+4+\nu} (p_\nu^* - p_\eta^*) + \Phi_{ij}^\alpha \nabla_i u_j, \quad \alpha \neq \eta$$

$$(1.20) \quad \frac{\kappa_\alpha^\rho}{T_\eta} = \sum_{\nu \neq \eta} \Phi_{N+2+\alpha, \nu} (T_\eta - T_\nu) + \sum_{\nu \neq \eta} \Phi_{N+2+\alpha, N+2+\nu} l_\nu + \\ + \sum_{\substack{\nu=k+1 \\ \nu \neq \eta}}^N \Phi_{N+2+\alpha, 2N+4+\nu} (p_\nu^* - p_\eta^*) + \Phi_{ij}^{N+2+\alpha} \nabla_i u_j, \quad \alpha \neq \eta$$

$$(1.21) \quad \frac{\rho_\alpha}{T_\eta} \frac{d_\alpha (\Gamma_\alpha / \rho_\alpha)}{dt} = \sum_{\nu \neq \eta} \Phi_{2N+4+\alpha, \nu} (T_\eta - T_\nu) + \\ + \sum_{\nu \neq \eta} \Phi_{2N+4+\alpha, N+2+\nu} l_\nu + \sum_{\substack{\nu=k+1 \\ \nu \neq \eta}}^N \Phi_{2N+4+\alpha, 2N+4+\nu} (p_\nu^* - p_\eta^*) + \\ + \Phi_{ij}^{2N+4+\alpha} \nabla_i u_j, \quad \alpha = k+1, k+2, \dots, N, \alpha \neq \eta$$

$$(1.22) \quad T_\eta^{-1} \left\{ \Pi_{ik} - \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq \eta}}^N \Gamma_\alpha (p_\alpha^* - p_\eta^*) \delta_{ik} \right\} = \sum_{\nu \neq \eta} \Psi_{ik}^\nu (T_\eta - T_\nu) + \\ + \sum_{\nu \neq \eta} \Psi_{ik}^{N+2+\nu} l_\nu + \sum_{\substack{\nu=k+1 \\ \nu \neq \eta}}^N \Psi_{ik}^{2N+4+\nu} (p_\nu^* - p_\eta^*) + L_{ikjl} \nabla_j u_l$$

Уравнения (1.17) и (1.20) верны для $\alpha \neq \eta$, но поскольку $\sum \kappa_\alpha^\rho = 0$, $\sum \mathbf{J}_\alpha = 0$, выражения для \mathbf{J}_η , κ_η^ρ можно выписать в аналогичном виде [2]. и считать эти уравнения верными и для $\alpha = \eta$.

В случае, когда электрическое поле достаточно мало и среду можно считать изотропной, коэффициенты в уравнениях (1.17) — (1.22) предполагаются не зависящими от электрического поля и удовлетворяющими обычным соотношениям взаимности Онзагера для изотропной среды

$$(1.23) \quad L_{\alpha, \mu} = L_{\mu, \alpha}, \quad L_{\alpha, N+3} = L_{N+3, \alpha} \\ (\alpha, \mu = 1, 2, \dots, N+2; \quad \alpha, \mu \neq \eta); \quad \Phi_{\alpha, \nu} = \Phi_{\nu, \alpha} \\ \Phi_{ij}^\alpha = -\Psi_{ij}^\alpha \quad (\alpha, \nu = 1, 2, \dots, 3N+4; \quad \alpha, \nu \neq \eta), \quad N+2+\eta, \\ 2N+5, \dots, 2N+4+k, 2N+4+\eta); \quad L_{ijkl} = L_{klij}$$

Уравнения (1.17) служат для определения векторов диффузии, а (1.19) — для определения температур (либо энтропий) фаз и компонент, заменяя громоздкие уравнения энергии для каждой фазы и компоненты. Кинетические уравнения (1.17) можно записать в виде законов Ома для движения зарядов фаз и компонент аналогично тому, как это делалось в работе [2].

Уравнения (1.21) для значений $\alpha = k + 1, \dots, N, \alpha \neq \eta$ позволяют определить скорость изменения объемных концентраций сжимаемых фаз, не используя для этого уравнение типа уравнения Релея для пульсаций пузырька, которое при принятых предположениях не следует из используемого формализма термодинамики необратимых процессов.

Вводя U_0 — внутреннюю энергию среды в отсутствие поля, из последнего соотношения (1.4) получим

$$(1.24) \quad U = U_0 + \frac{1}{4\pi\rho} \int_0^D \mathbf{E}d\mathbf{D}$$

Выражение для тензора напряжений и силы, а также соотношения для химического потенциала ξ_α и давления p_α с учетом формул (1.8), (1.14), (1.24), (1.4) запишутся в виде

$$(1.25) \quad p_{ik} = - \left(p^c + p^{inc} + \frac{\mathbf{E}\mathbf{D}}{4\pi} \right) \delta_{ik} + \frac{E_i D_k}{4\pi} + \Pi_{ik}, \quad f_i = \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k}$$

$$p^c = \rho^2 \frac{\partial U}{\partial \rho} = p_0^c - \frac{1}{4\pi} \int_0^D \left(1 + \frac{\rho}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right) \frac{\mathbf{D}d\mathbf{D}}{\varepsilon}, \quad p_0^c = \rho^2 \frac{\partial U_0}{\partial \rho}$$

$$p_\alpha = p_{0\alpha} + \frac{1}{4\pi} \int_0^D \frac{\partial \varepsilon}{\partial \Gamma_\alpha} \frac{\mathbf{D}d\mathbf{D}}{\varepsilon^2}, \quad p_{0\alpha} = -\rho \frac{\partial U_0}{\partial \Gamma_\alpha}$$

$$\xi_\alpha = \xi_{0\alpha} - \frac{1}{4\pi\rho} \int_0^D \frac{\partial \varepsilon}{\partial c_\alpha} \frac{\mathbf{D}d\mathbf{D}}{\varepsilon^2}, \quad \xi_{0\alpha} = \frac{\partial U_0}{\partial c_\alpha}$$

В случае, когда внутренняя энергия U задана как функция истинных плотностей ρ_α° и объемных концентраций Γ_α (а не $\rho, c_\alpha, \Gamma_\alpha$), а также параметров c_α, s_α, D , формулы для p^c, p_α и ξ_α (1.25) примут вид

$$(1.26) \quad p^c = p_0^c - \frac{1}{4\pi} \int_0^D \left[1 + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{\alpha=k+1}^{N+2} \rho_\alpha^\circ \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_\alpha^\circ} \right] \frac{\mathbf{D}d\mathbf{D}}{\varepsilon}$$

$$p_\alpha = p_{0\alpha} + \frac{1}{4\pi} \int_0^D \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \Gamma_\alpha} - \frac{\rho_\alpha^\circ}{\Gamma_\alpha} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_\alpha^\circ} \right) \frac{\mathbf{D}d\mathbf{D}}{\varepsilon^2}$$

$$\xi_\alpha = \xi_{0\alpha} - \frac{1}{4\pi} \int_0^D \frac{1}{\Gamma_\alpha} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_\alpha^\circ} \frac{\mathbf{D}d\mathbf{D}}{\varepsilon^2}$$

В двухфазной незаряженной среде ($q_\alpha = 0, \alpha = 1, 2$) в случае, когда можно пренебречь перекрестными эффектами и температуры фаз одинаковы, уравнение для диффузии запишется в виде

$$(1.27) \quad \mathbf{J}_\alpha = L_{\alpha, \alpha} \left[\nabla \frac{\xi_{\eta^*} - \xi_{\alpha^*}}{T_\eta} + \frac{1}{\rho_\alpha^\circ} \nabla \frac{p_{\alpha^*} - p_{\eta^*}}{T_\eta} \right], \alpha = 1, 2, \quad \alpha \neq \eta$$

Когда обе фазы сжимаемы ($k = 0$), формула (1.27) с учетом выражений для ξ_α^* и p_α^* (1.15), (1.25) примет вид (для определенности $\eta = 2$)

$$(1.28) \quad L_{1,1}^{-1} \mathbf{J}_1 = \nabla \frac{\xi_{02} - \xi_{01}}{T_2} + \nabla \int_0^D \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial c_1} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial c_2} \right) \frac{\mathbf{D}d\mathbf{D}}{4\pi r \varepsilon^2 T_2} + \\ + \frac{1}{\rho_1^0} \nabla \frac{p_{01} - p_{02}}{T_2} + \frac{1}{\rho_2^0} \nabla \frac{1}{T_2} \int_0^D \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \Gamma_1} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \Gamma_2} \right) \frac{\mathbf{D}d\mathbf{D}}{4\pi r \varepsilon^2}$$

При малых концентрациях диспергированной фазы диэлектрическая проницаемость смеси ε выражается через диэлектрические проницаемости фаз формулой ($\varepsilon_2, \varepsilon_1$ — диэлектрические проницаемости несущей и диспергированной фаз соответственно)

$$(1.29) \quad \varepsilon = \varepsilon_2 + \Gamma_1 \frac{3(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}$$

Рассмотрим диффузию пузырей газа в сжимаемой жидкости, для диэлектрических проницаемостей которых верны формулы

$$(1.30) \quad (\varepsilon_2 - 1) / (\varepsilon_2 + 2) = \alpha_2 \rho_2^0, \quad \varepsilon_1 = 1 + \alpha_1 \rho_1^0$$

Уравнение (1.28) с учетом равенств (1.29), (1.30) будет иметь вид

$$(1.31) \quad L_{1,1}^{-1} \mathbf{J}_1 = \nabla \frac{\xi_{02} - \xi_{01}}{T_2} + \frac{1}{\rho_1^0} \nabla \frac{p_{01} - p_{02}}{T_2} + \\ + \left\{ \frac{9\alpha_1 \varepsilon_2^2}{(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2)^2} - \frac{\alpha_2 (\varepsilon_2 + 2)^2}{3\Gamma_1} \left[1 + \frac{3\Gamma_1 (\varepsilon_1^2 - 2\varepsilon_2 \varepsilon_1 - 2\varepsilon_2^2)}{(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2)^2} \right] \right\} \times \\ \times \frac{E^2}{8\pi T_2} \nabla \frac{1}{\rho_1^0} + \frac{1}{\rho_1^0} \nabla \frac{3(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} \frac{E^2}{8\pi T_2}$$

Будем считать, что задана внутренняя энергия дисперсной среды и поля, рассчитанная на единицу массы смеси U , т. е. заданы функции U_0 и ε ($c_\alpha, \rho_\alpha, \rho, c_\alpha, \Gamma_\alpha, D$). Тогда можно выписать замкнутую систему уравнений, описывающую движение дисперсной смеси в электрическом поле, когда каждая фаза и компонента поляризуются по своему закону. Система уравнений в приближении электрогидродинамики будет состоять из уравнений неразрывности (1.5), уравнений состояний (1.4), уравнения движения смеси (1.7), с учетом выражения для p_{ij} (1.8), (1.9), (1.14) и (1.22), уравнения энергии для смеси (1.12), кинетических уравнений (1.17) — (1.24) и уравнений Максвелла (1.2).

Заметим, что давление p^{inc} при $\eta > k$, т. е. когда несущая фаза сжимаема, не входит в полученную систему уравнений и для определения p^{inc} не требуется выписывать дополнительные соотношения. В случае, когда $1 \leq \eta \leq k$, в систему уравнений входит давление p^{inc} , для определения которого кроме всех уравнений необходимо использовать равенство $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \dots + \Gamma_N = 1$.

Для нахождения адсорбционного заряда каждой фазы q_α ($\alpha = 1, \dots, N, \alpha \neq \eta$) нужно делать дополнительные предположения относительно скорости изменения заряда κ_α^q .

Выше, при построении модели, предполагалось, что внутренняя энергия U задана как функция переменных, среди которых c_α, Γ_α ($\alpha = 1, \dots, N$) и ρ являются зависимыми [1]. Такой подход позволяет записать все формулы в удобном симметричном виде.

Можно выписать систему уравнений, в которой используется внутренняя энергия U , заданная как функция только независимых переменных и показать, что уравнения, полученные с использованием функции U , полностью совпадают с уравнениями, выписанными выше, при построении которых использовалась внутренняя энергия U [4]. Для перехода от функции U к функции U необходимо воспользоваться формулами, связывающими параметры, от которых зависит внутренняя энергия, друг с другом для того, чтобы исключить из выражения для внутренней энергии U часть параметров [4].

При практическом использовании выведенных выше уравнений следует иметь в виду, что вид уравнений существенно зависит от выбора параметров, определяющих внутреннюю энергию. В случае, когда внутренняя энергия задана не от всех параметров, а только от части их или от некоторых комбинаций этих параметров (например $s_\alpha, \rho_\alpha, \Gamma_\alpha, D/\rho$ или $s_\alpha, \rho, c_\alpha, \Gamma_\alpha, D/\rho$ и т. д.), для использования уравнений данной работы нужно представить эту внутреннюю энергию как функцию параметров $c_\alpha s_\alpha, \rho, c_\alpha, \Gamma_\alpha, D$, использующихся в данной работе, и во всех формулах и уравнениях использовать эту преобразованную функцию.

2. Уравнения движения поляризующихся многокомпонентных сред. Рассмотрим в приближении электрогидродинамики [3, 5, 6] движение смеси, состоящей из N компонент, заполняющих один и тот же объем, каждая из которых может поляризоваться по своему закону в электрическом поле E .

Обозначим $\rho_\alpha, v_\alpha, T_\alpha, s_\alpha, q_\alpha$ плотность, вектор скорости, температуру, энтропию, рассчитанную на единицу массы каждой компоненты, плотность объемного заряда α -й компоненты соответственно; j_α — плотность электрического тока α -й компоненты. Определим среднюю плотность смеси ρ , среднюю скорость смеси u , полный заряд и ток формулами (1.1).

Предположим, что внутренняя энергия единицы массы среды и поля U — функция $c_\alpha s_\alpha, \rho, c_\alpha$ и D . Используя предположения о виде плотности энергии и плотности потока энергии и диссипативной функции, аналогичные предположениям п. 1, можно вывести уравнения, описывающие движение рассматриваемой среды.

Уравнения неразрывности совпадают с соответствующими уравнениями (1.5). Уравнение движения аналогично уравнению (1.7), в котором тензор напряжения p_{ik} представляется в виде первого соотношения (1.25) при замене $p^c + p^{inc}$ на $p = \rho^2 (\partial U / \partial \rho)_{c_\alpha s_\alpha, c_\alpha, D}$.

Уравнение энергии совпадает с уравнением энергии (1.12), если в последнем положить $p = \rho^2 (\partial U / \partial \rho)$. Вид диссипативной функции в этом случае совпадает с видом диссипативной функции (1.15) после исключения в последней слагаемых, пропорциональных $p_\alpha^* - p_\eta^*$, и замены ξ_α^* на $(\partial U / \partial c_\alpha)_{c_\gamma s_\gamma, \rho, c_\gamma (\gamma \neq \alpha), D}$.

Кинетические уравнения, соответствующие этой диссипативной функции, будут отличаться в общем случае от кинетических уравнений, описывающих многофазную среду. Окончательная система уравнений, описывающая движение многокомпонентной среды, имеет вид (в случае, когда $\Pi_{ik} = 0$, соответствующая система уравнений выписана в работе [3])

$$\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_\alpha u = \kappa_\alpha - \operatorname{div} J_\alpha, \quad J_\alpha = \rho_\alpha (v_\alpha - u), \quad \sum_{\alpha=1}^N \kappa_\alpha = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho u_i = - \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_i u_k - p_{ik})$$

$$\begin{aligned}
p_{ik} &= -p\delta_{ik} + \Pi_{ik} + \frac{E_i D_k}{4\pi} - \frac{\mathbf{E}\mathbf{D}}{4\pi} \delta_{ik}, \quad p = \rho^2 \left(\frac{\partial U}{\partial \rho} \right)_{c_\alpha s_\alpha, c_\alpha, D} \\
\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{u^2}{2} + \rho U \right) &= - \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \rho u_k \left(\frac{u^2}{2} + U + \frac{p}{\rho} \right) + \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}]_k + \right. \\
&\quad \left. + q_k - \Pi_{ik} u_i \right\} \\
U &= U(c_\alpha s_\alpha, \rho, c_\alpha, D), \quad \xi_\alpha = (\partial U / \partial c_\alpha)_{c_\alpha s_\alpha, \rho, c_\gamma (\gamma \neq \alpha), D} \\
\frac{\rho_\alpha}{T_\beta} \frac{d_\alpha s_\alpha}{dt} &= \sum_{\substack{v=1 \\ v \neq \beta}}^N \varphi_{\alpha, v} (T_\beta - T_v) + \sum_{\substack{v=1 \\ v \neq \beta}}^N \varphi_{\alpha, N+v} l_v + \varphi_{ik}^\alpha \nabla_k u_i, \quad \alpha \neq \beta \\
\frac{x_\alpha}{T_\beta} &= \sum_{\substack{v=1 \\ v \neq \beta}}^N \varphi_{N+\alpha, v} (T_\beta - T_v) + \sum_{\substack{v=1 \\ v \neq \beta}}^N \varphi_{N+\alpha, N+v} l_v + \varphi_{ik}^{N+\alpha} \nabla_k u_i, \quad \alpha \neq \beta \\
\mathbf{J}_\alpha &= \sum_{\substack{v=1 \\ v \neq \beta}}^N L_{\alpha, v} \xi_v + L_{\alpha, N+1} \nabla T_\beta \\
- T_\beta^{-2} \mathbf{q} &= \sum_{\substack{v=1 \\ v \neq \beta}}^N L_{N+1, v} \xi_v + L_{N+1, N+1} \nabla T_\beta \\
T_\beta^{-1} \Pi_{ik} &= L_{ijkl} \nabla_j u_l + \sum_{\substack{v=1 \\ v \neq \beta}}^N \Psi_{ik}^v (T_\beta - T_v) + \sum_{\substack{v=1 \\ v \neq \beta}}^N \Psi_{ik}^{N+v} l_v \\
l_v &= \xi_\beta - \xi_v + s_v (T_\beta - T_v), \quad v \neq \beta; \quad T_\alpha = (\partial U / \partial c_\alpha s_\alpha)_{c_\gamma s_\gamma (\gamma \neq \alpha), \rho, c_\gamma, D} \\
\xi_v &= \nabla \frac{\xi_\beta - \xi_v}{T_\beta} + \left(\frac{q_v}{\rho_v} - \frac{q_\beta}{\rho_\beta} \right) \frac{\mathbf{E}}{T_\beta} + s_v \nabla \frac{T_\beta - T_v}{T_\beta}, \quad v \neq \beta
\end{aligned}$$

Коэффициенты в последних пяти кинетических уравнениях $\varphi_{\alpha, v}$, φ_{ij}^α , Ψ_{ij}^v , $L_{\mu, v}$, L_{ijkl} удовлетворяют обычным соотношениям взаимности Онзагера (1.23).

Следует подчеркнуть, что в случае поляризуемой многокомпонентной среды тензор напряжений p_{ik} зависит от поляризации среды не только через давление p и тензор $E_i D_k / (4\pi) - \mathbf{E}\mathbf{D} \delta_{ik} / (4\pi)$, но и через разность химических потенциалов, входящих в тензор Π_{ik} .

3. Уравнения, описывающие движение намагничивающихся многофазных и многокомпонентных сред. Эти уравнения выводятся аналогично проделанному в пп. 1, 2. Уравнения сохранения массы, количества движения, энергии, уравнения состояния и кинетические уравнения для намагничивающейся многофазной и многокомпонентной среды в приближении феррогидродинамики совпадают с уравнениями поляризуемой многофазной и многокомпонентной среды в приближении электрогидродинамики после замены в последних \mathbf{E} на \mathbf{H} , \mathbf{D} на \mathbf{B} , ε на μ , \mathbf{j}' на \mathbf{j} , \mathbf{E} на $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + c^{-1} [\mathbf{u}\mathbf{B}]$ (заметим, что в выражении для вектора Пойнтинга $c [\mathbf{E}\mathbf{H}] / (4\pi)$ замены производить не нужно, замена \mathbf{E} на \mathbf{E}' делается только в выражении для ξ_α (1.15)). Коэффициенты в кинетических уравнениях будут связаны в случае намагничивающихся сред соответствующими соотношениями взаимности Онзагера в магнитном поле [2]. Уравнения Максвелла в приближении феррогидродинамики выписаны в [3].

Рассмотрим диффузию в двухкомпонентной намагничивающейся среде. Во многих случаях можно считать, что магнитная восприимчивость двухкомпонентной смеси определяется формулой (здесь χ_1, χ_2 — магнитные восприимчивости первой и второй компонент)

$$(3.1) \quad \chi = \chi_1 + \chi_2$$

Формула (3.1) получается из предположения об аддитивности намагниченности смеси

$$(3.2) \quad M = M_1 + M_2, \quad M_\alpha = \chi_\alpha H, \quad \alpha = 1, 2$$

Сравним полученные в данной работе формулы для диффузии в многокомпонентной смеси с формулами работы [7]. Так же, как и в работе [7], будем предполагать, что для многокомпонентных смесей верны формулы (здесь $\chi_{0\alpha}$ — истинная магнитная восприимчивость компоненты α)

$$(3.3) \quad \chi_\alpha = c_\alpha \chi_{0\alpha}, \quad \chi_{0\alpha} = \text{const}, \quad \alpha = 1, 2$$

Формула (3.3) является следствием формулы Ланжевена для намагниченности M_α фазы α в случае, когда плотность многокомпонентной смеси ρ постоянна, например, когда средняя скорость смеси равна нулю, а смесь в первоначальный момент времени однородна.

С учетом формул (3.1) и (3.3) выпишем выражение для диффузии в смеси двух намагничивающихся незаряженных жидкостей, в случае, когда температуры компонент одинаковы и постоянны

$$(3.4) \quad J_2 = -J_1 = L_{1,1} \left[\nabla \frac{\xi_{01} - \xi_{02}}{T_2} + \frac{\chi_{01} - \chi_{02}}{2\rho T_2} \nabla H^2 \right], \quad \xi_{0\alpha} = \left(\frac{\partial U_0}{\partial c_\alpha} \right)_{c_\gamma, s_\gamma, c_\gamma (\gamma \neq \alpha)}$$

Первое слагаемое в формуле (3.4) в случае, когда температура смеси постоянна в пространстве, пропорционально градиенту концентрации и описывает диффузию, возникающую из-за неоднородности концентрации. Второе слагаемое описывает диффузию компонент в неоднородном магнитном поле, возникающую из-за разности истинных магнитных восприимчивостей компонент смеси. Формула (3.4) отличается от формулы для диффузии в намагничивающейся смеси двух жидкостей, предложенной в работе [7]. Согласно формулам работы [7], взаимная диффузия компонент в неоднородном магнитном поле будет происходить и в случае, когда магнитные восприимчивости χ_{01} и χ_{02} двух сред одинаковы, тогда как из формул (3.4) следует, что в этом случае взаимной диффузии компонент в неоднородном магнитном поле нет (конечно, диффузия из-за градиента концентрации остается).

Поступила 30 VI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Механика сплошной среды, т. 1—2. М., «Наука», 1976.
2. Гогосов В. В., Налетова В. А., Шапошникова Г. А. Гидродинамика дисперсных систем, взаимодействующих с электромагнитным полем. Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 3.
3. Гогосов В. В., Васильева Н. Л., Тактаров Н. Г., Шапошникова Г. А. Уравнения гидродинамики поляризующихся и намагничивающихся многокомпонентных и многофазных сред. Разрывные решения. Исследование разрывных решений со скачком магнитной проницаемости. Изд-во МГУ, 1975.
4. Гогосов В. В., Налетова В. А., Шапошникова Г. А. О некоторых моделях многофазных поляризующихся и намагничивающихся сред. Некоторые вопросы механики сплошных сред. Изд-во МГУ, 1978.
5. Гогосов В. В., Фарбер Н. Л. Уравнения электрогидродинамики многофазных сред. Об одномерных течениях, разрывных решениях и затухании слабых волн. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 5.
6. Гогосов В. В., Полянский В. А., Семенова И. П., Якубенко А. Е. Уравнения электрогидродинамики и коэффициенты переноса в сильном электрическом поле. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 2.
7. Атрощенко Л. С., Воронина С. М. Процесс диффузии в магнитном поле. Теоретические основы химической технологии, 1975, т. 9, № 3.