

ОКРЕСТНОСТЬ ПЛОСКОГО ЗАОСТРЕНИЯ ПРИ СВЕРХЗВУКОВОМ ОБТЕКАНИИ

Ю. Б. Радвогин

(Москва)

Изучается локальная структура течения вблизи особой точки при обтекании заостренного профиля сверхзвуковым потоком невязкого нетеплопроводного газа, когда ударная волна присоединена к носку. Газодинамические функции представляются в виде $f = f_0 + f_1 + o(f_1)$, где f_0 отвечает обтеканию бесконечного прямолинейного клина. Линеаризация относительно f_0 приводит к некоторой краевой задаче в угле. Решение ее выписывается в явном виде и исследуются его свойства. Доказывается, что если f_0 соответствует сверхзвуковому течению, то $f_1 \equiv 0$. Случай дозвукового течения приводит к последовательности ненулевых собственных функций $f_1^{(m)}$. Дается трансзвуковая трактовка первых $f_1^{(m)}$. Устанавливается различие между «сильной» и «слабой» ударными волнами. Исследование проводится как для однородного случая (прямолинейный профиль, равномерный набегающий поток), так и для неоднородного

1. Пусть гладкий заостренный профиль помещен в сверхзвуковой поток. Присоединенность ударных волн (верхней и нижней) позволяет рассматривать их независимо. Введем обозначения: P — давление, ρ — плотность, M — число Маха, q — модуль скорости, θ — угол наклона скорости к оси x , совпадающей с направлением набегающего потока. Пусть α — угол наклона ударной волны в вершине, β — угол наклона контура в той же точке. Давление и плотность отнесем к соответствующим величинам набегающего потока, число Маха которого обозначим через M_∞ .

Уравнения газовой динамики возьмем в виде [1,2]

$$(1.1) \quad \rho q^2 \frac{\partial \theta}{\partial s} + \frac{\partial P}{\partial n} = 0$$

$$\rho q^2 \frac{\partial \theta}{\partial n} + (1 - M^2) \frac{\partial P}{\partial s} = 0$$

Здесь $\partial/\partial s$ и $\partial/\partial n$ — производные вдоль линий тока и в перпендикулярном направлении.

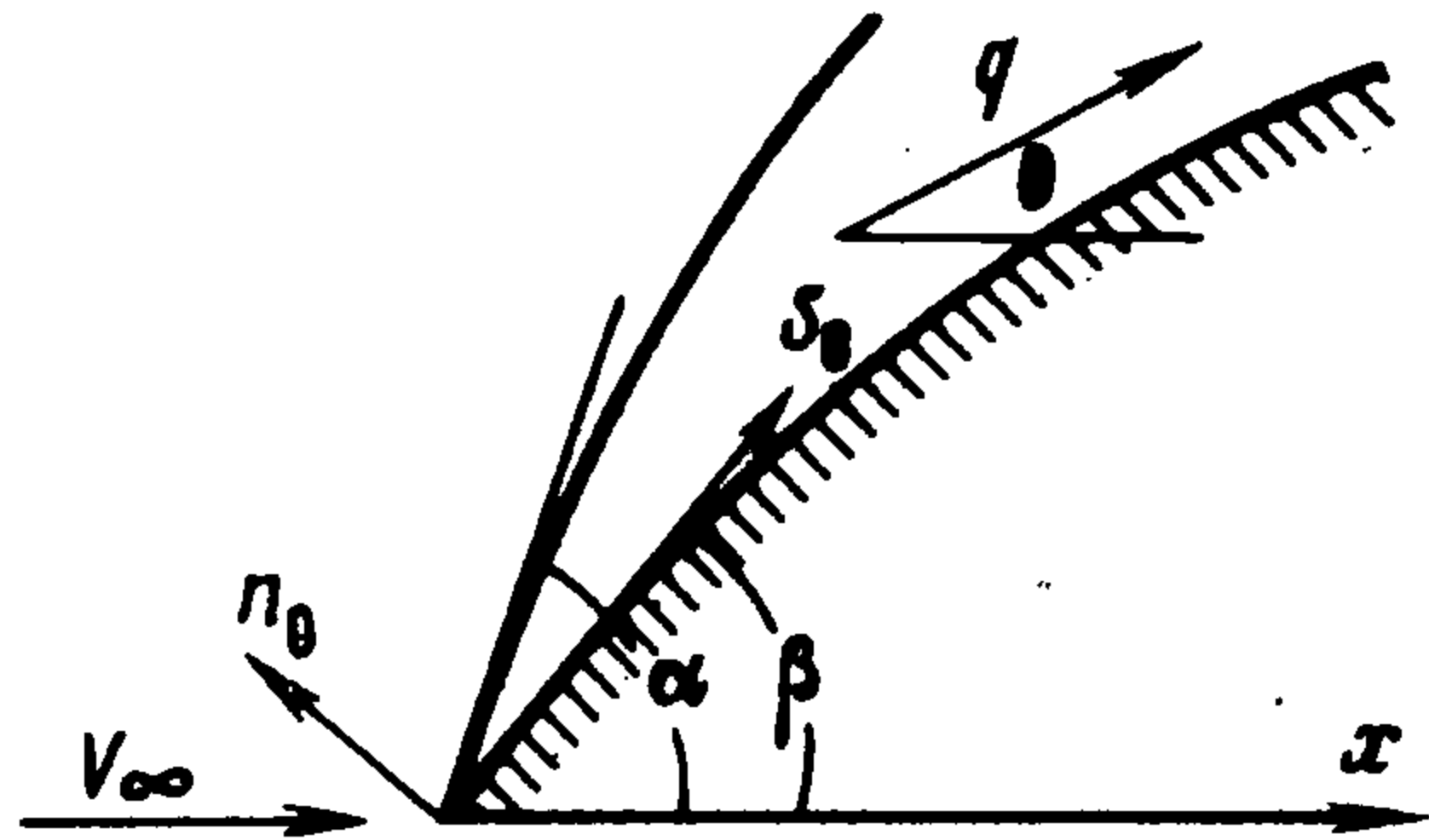
Представим решение в окрестности вершины в виде $f = f_0 + f_1 + \dots$, где f_0 — главная часть, дающая обтекание бесконечного клина с присоединенной плоской ударной волной. Вообще говоря, $f_0 = f_0(\varphi)$ (φ — полярный угол). Но для функций, входящих в систему (1.1), зависимость от φ отсутствует и поэтому для малых возмущений после замены $\xi = s_0$, $\eta = n_0|1 - M_0^2|^{1/2}$, $\sigma_1 = P_1|1 - M_0^2|^{1/2} / (\rho_0 q_0^2)$, где s_0 , n_0 — прямоугольные координаты (см. фиг. 1), получим

$$(1.2) \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_1}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial \eta} - \text{sign}(1 - M_0^2) \frac{\partial \sigma_1}{\partial \xi} = 0$$

Область определения решения ограничена лучами $\eta = 0$ (тело) и $\eta = k\xi$ (волна), где $k = |1 - M_0^2|^{1/2} \operatorname{tg}(\alpha - \beta)$. Получим граничное условие на волне.

Пусть полярное уравнение ударной волны имеет вид $\varphi = \alpha + \delta(r)$, а φ — угол ее наклона к оси x . Тогда $\varphi = \alpha + \delta + \operatorname{arctg}(r\delta_r)$. В окрестности вершины $\varphi = \alpha + (r\delta)_r$. Значение любой газодинамической функции $f(r, \varphi)$ на волне определяется ее наклоном: $f = f_0(\varphi) + f_1(r, \varphi) = F(\psi)$. Пренебрегая членом $\delta\delta f_1/\partial\varphi$, получим

$$\begin{aligned} f_0(\alpha) + \delta \frac{\partial f_0}{\partial \varphi} + f_1(r, \alpha) &= \\ &= F(\alpha) + \left(\frac{dF(\alpha)}{d\psi} \right) (r\delta)_r \end{aligned}$$



Фиг. 1

Поскольку $f_0(\alpha) = F(\alpha)$, то $f_1(r, \alpha) = -\delta\partial f_0/\partial\varphi + (dF(\alpha)/d\psi)(r\delta)_r$. Таким образом, $P_1(r, \alpha) = (dP(\alpha)/d\psi)(r\delta)_r$ и $\theta_1(r, \alpha) = (d\theta(\alpha)/d\psi)(r\delta)_r$, откуда

$$(1.3) \quad \frac{dP}{d\psi} \theta_1(r, \alpha) = \frac{d\theta}{d\psi} P_1(r, \alpha), \quad \psi = \alpha$$

Используя соотношения на ударной волне

$$\begin{aligned} P &= [2\gamma M_\infty^2 \sin^2 \psi - (\gamma - 1)] / (\gamma + 1) \\ \operatorname{ctg} \theta &= \operatorname{tg} \psi \left[\frac{(\gamma + 1) M_\infty^2}{2(M_\infty^2 \sin^2 \psi - 1)} - 1 \right] \end{aligned}$$

выведем из (1.3) требуемое граничное условие к системе (1.2)

$$\begin{aligned} (1.4) \quad A\sigma_1 - B\theta_1 &= 0 \\ A &= \rho_0 q_0^2 \left[2\zeta_0 (1 + \zeta_0)^2 \operatorname{ctg}^2 \theta_0 - \frac{\gamma + 1}{2} (1 + \zeta_0^2 \operatorname{ctg}^2 \theta_0) \right] \times \\ &\times (\gamma M_\infty^2 |1 - M_0^2|^{1/2})^{-1} \\ B &= 2\zeta_0^2 \operatorname{ctg} \theta_0 \sin^{-2} \theta_0, \quad \zeta^{-1} = \frac{\gamma M_\infty^2}{P - 1} - 1 \end{aligned}$$

Граничное условие на теле будет сформулировано ниже.

Рассматриваемая краевая задача имеет два безразмерных параметра: M_∞ и β . Зафиксировав M_∞ , изучим зависимость от «геометрического» параметра, в качестве которого возьмем не β , а α , поскольку невозмущенное решение (обтекание клина) зависит от β неоднозначным образом. Диапазон изменения α — от $\operatorname{arcsin}(M_\infty^{-1})$ (вырожденная ударная волна) до $\pi/2$ — прямая волна.

Обозначим через α_* то значение α , при котором $M_0 = 1$, а через α^* — угол, отвечающий максимальному повороту потока (невозмущенного), т. е. точке перехода со слабого участка ударной поляры на сильный. Ясно, что $\alpha_* < \alpha^*$. Введем $h(\alpha) = A/B$. Понадобятся некоторые свойства этой функции, проверяемые путем несложных выкладок: $h(\alpha) > 0$ при $\alpha < \alpha^*$, $h(\alpha) < 0$ при $\alpha > \alpha^*$, $h(\alpha^*) = 0$, $h(\alpha_*) = +\infty$.

Заметим, что граничному условию (1.4) можно придать иную форму

$$(1.5) \quad \partial\theta_1/\partial l = 0$$

где направление l составляет с границей угол χ , такой, что $\operatorname{tg} \chi = h$.

2. Конкретизируем граничное условие на поверхности обтекаемого профиля. Пусть его контур в некоторой окрестности вершины строго прямолинеен. Тогда на нем $\theta = \beta$ и

$$(2.1) \quad \theta_1(r, \beta) = 0$$

Таким образом, приходим к однородной задаче (1.2), (1.4), (2.1).

Рассмотрим вначале случай сверхзвукового течения ($M_0 > 1$, т. е. $\alpha < \alpha_*$). Очевидно, что

$$\theta_1 = f(\xi + \eta) - f(\xi - \eta), \quad \sigma_1 = C - f(\xi + \eta) - f(\xi - \eta)$$

$$\kappa f(z) + f(\mu z) = \frac{\kappa + 1}{2} C, \quad z_1^* = (1 + k)\xi, \quad \kappa = \frac{h + 1}{h - 1}$$

$$\mu = \frac{1 - k}{1 + k}$$

(C — произвольная постоянная). Введя вместо $f(z)$ функцию $F(z) = f(z) - C/2$, получим функциональное уравнение

$$(2.2) \quad F(\mu z) = -\kappa F(z)$$

Оценим μ и κ . Так как $h > 0$, то $|\kappa| > 1$. Поскольку наклон соответствующей характеристики больше наклона ударной волны, т. е. $(M_0^2 - 1)^{-1/2} > \operatorname{tg}(\alpha - \beta)$, то $0 < k < 1$, а следовательно, $0 < \mu < 1$.

Итерации (2.2) дают $F(\mu^n z) = (-\kappa)^n F(z)$. Перейдем к пределу при $n \rightarrow \infty$. Так как $\mu^n \rightarrow 0$, а $\kappa^n \rightarrow \infty$, то в классе ограниченных в окрестности вершины функций найдем, что уравнение (2.2) имеет единственное (тривиальное) решение $F(z) \equiv 0$. Следовательно, $\theta_1 = \sigma_1 \equiv 0$, и ударная волна прямолинейна.

3. Перейдем к случаю дозвукового течения ($M_0 < 1$). Тогда (1.2) превращается в систему типа Коши — Римана и для ее решения удобно перейти к координатам (R, Φ) : $\xi = R \cos \Phi$, $\eta = R \sin \Phi$. Ясно, что $\theta_1 = R^\nu \sin \nu \Phi$, где $\operatorname{tg}(\nu \operatorname{arctg} k) = h$, т. е.

$$(3.1) \quad \nu = \nu_m = \frac{\pi m + \operatorname{arctg} h}{\operatorname{arctg} k}$$

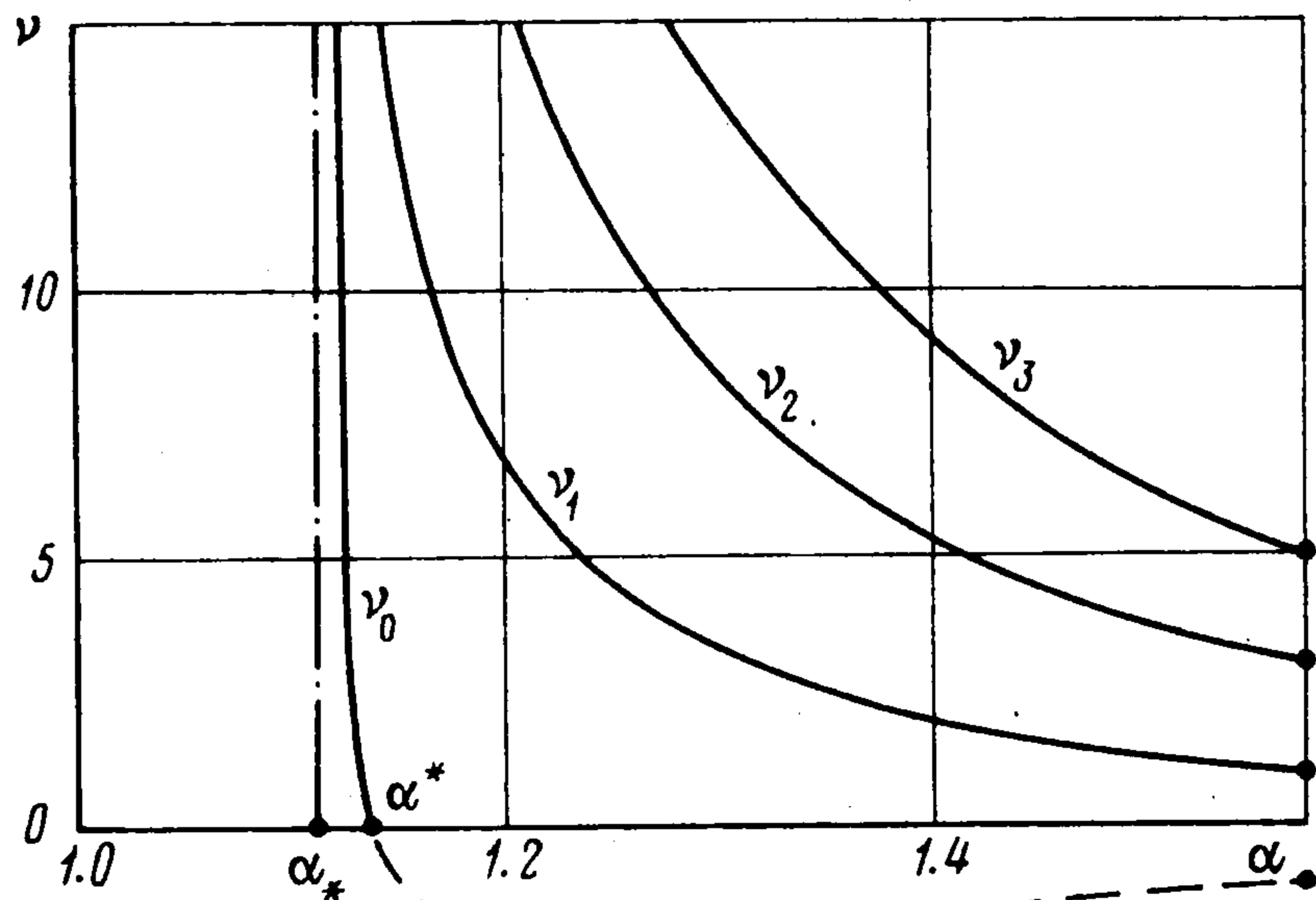
В силу ограниченности решения следует выбирать лишь положительные ν_m . Вся последовательность ν_m «рождается из бесконечности» при $\alpha = \alpha_*$. С увеличением α лишь ν_0 проходит через нуль. Остальные ν_m положительны, что следует из свойств h . На фиг. 2 представлены графики нескольких первых ν_m для $M_\infty = 3$, штриховой линией изображена отрицательная часть ν_0 . Заметим, что $\nu_m(\pi/2) = 2m - 1$.

Таким образом

$$(3.2) \quad \theta = \theta_0 + CR^\nu \sin \nu \Phi + \dots$$

$$P = P_0 + C \frac{\rho_0 q_0^2}{\sqrt{1 - M_0^2}} R^\nu \cos \nu \Phi + \dots$$

Для определения плотности привлечем уравнение $\partial S/\partial s = 0$; $S = \rho^{-\gamma}$, $S = S_0 + S_1 + \dots$. Можно показать, что $S_1 = \rho_0^{-\gamma} (P_1 - c_0^2 \rho_1)$.



Фиг. 2

На ударной волне $\rho_1^{(w)} = D_1 P_1^{(w)}$, а $P_1^{(w)} = D_2 R^\nu$. Поэтому $S_1^{(w)} = D_3 R^\nu$. Так как $S_1 = f(\eta) = f(R \sin \Phi)$, то окончательно получим $S_1 = D_3 (R \sin \Phi)^\nu$, откуда

$$(3.3) \quad \rho = \rho_0 + R^\nu (a_1 \cos \nu \Phi + a_2 \sin^\nu \Phi) + \dots$$

Скорость q находится с помощью вариации интеграла Бернулли

$$(3.4) \quad q = q_0 + R^\nu (a_3 \cos \nu \Phi + a_4 \sin^\nu \Phi) + \dots$$

Зная θ_1 , можно показать, что в окрестности вершины уравнение волны представимо в виде

$$y = x \operatorname{tg} \alpha + x^{1+\nu} + \dots$$

Подчеркнем разницу в поведении газодинамических функций при $\Phi \rightarrow 0$. Она особенно ощутима, если $\nu < 1$: ρ_1 и q_1 перестают быть дифференцируемыми на поверхности профиля.

Формулы (3.2) — (3.4) дают решение задачи с точностью до выбора конкретного показателя ν_m , который диктуется постановкой в целом. Число нулей $P_1(\varphi)$ (совпадающее с числом внутренних экстремальных точек $\theta_1(\varphi)$) равно номеру m . Число же нулей $\theta_1(\varphi)$ на единицу меньше порядкового номера показателя в ряду положительных ν , т. е. в интервале $\alpha_* < \alpha < \alpha^*$ число нулей θ_1 равно m , а при $\alpha > \alpha^*$ оно равно $m - 1$, поскольку первым положительным показателем становится ν_1 . Таким образом, число нулей однозначно определяет ν_m и, следовательно, первый член разложения в окрестности особенности. В некоторых случаях такая информация может быть получена.

Величина ν определяет гладкость $\theta_1(R, \Phi)$. В связи с этим можно выделить значение $\alpha = \alpha_K$ ($\alpha_* < \alpha_K < \alpha^*$), при котором $\nu_0 = 1$. Соответствующая точка на ударной поляре называется точкой Крокко. Следует заметить, что кривизна ударной волны в вершине конечна для $\alpha = \alpha_K$, равна нулю, если $\alpha < \alpha_K$, и обращается в бесконечность при $\alpha > \alpha_K$. Конкретные значения основных, «опорных» углов α_* , α_K и α^* , а также соответствующие им β приведены в таблице.

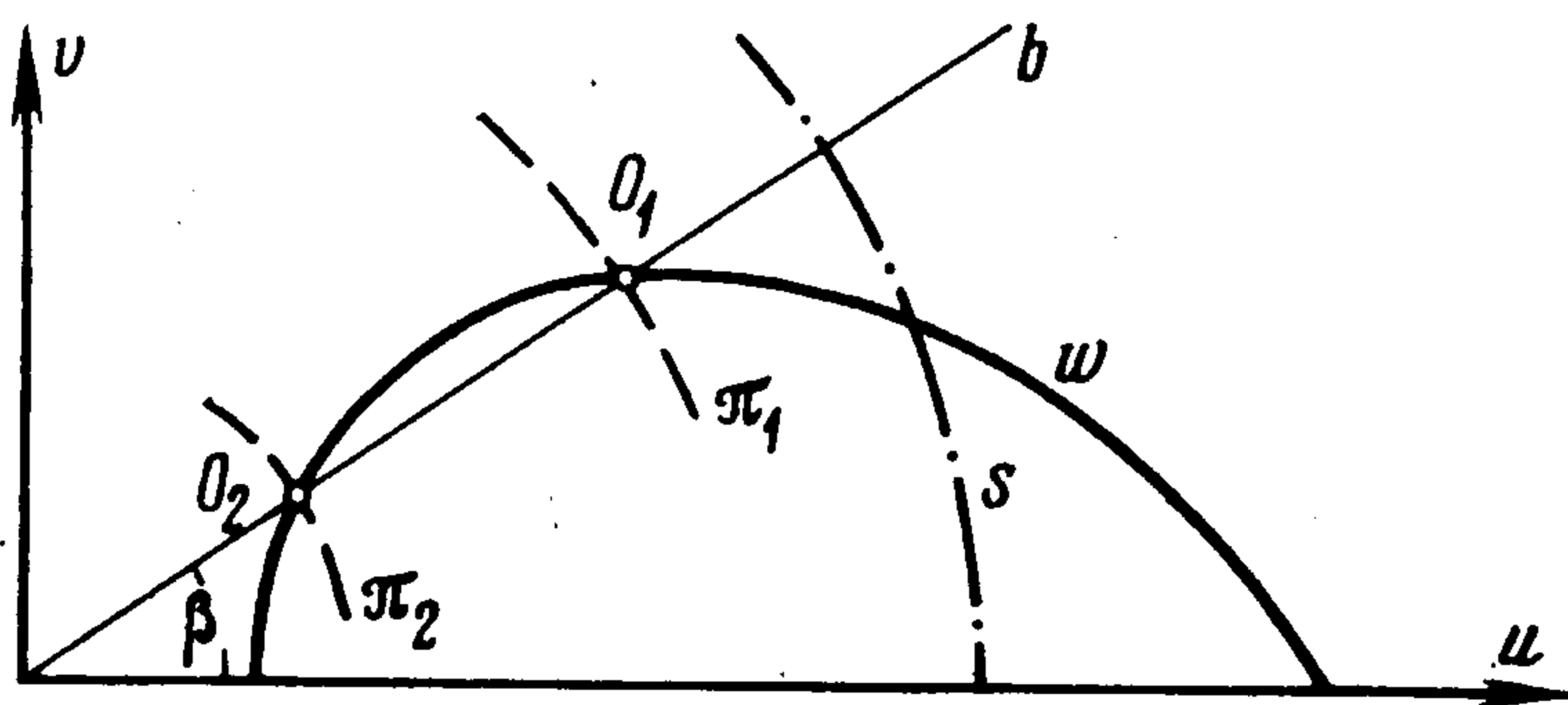
| M_∞ | α_* | $\beta_* \cdot 10^4$ | α_K | $\beta_K \cdot 10^4$ | α^* | $\beta^* \cdot 10^4$ |
|------------|------------|----------------------|------------|----------------------|------------|----------------------|
| 1.25 | 1.1590 | 870 | 1.1936 | 908 | 1.2311 | 923 |
| 1.5 | 1.0866 | 2041 | 1.1274 | 2098 | 1.1622 | 2114 |
| 2.0 | 1.0731 | 3963 | 1.1076 | 4003 | 1.1287 | 4010 |
| 2.5 | 1.0934 | 5178 | 1.1182 | 5198 | 1.1307 | 5201 |
| 3.0 | 1.1129 | 5936 | 1.1308 | 5946 | 1.1387 | 5947 |
| 4.0 | 1.1389 | 6764 | 1.1491 | 6767 | 1.1530 | 6767 |
| 5.0 | 1.1534 | 7175 | 1.1599 | 7176 | 1.1621 | 7176 |
| 7.5 | 1.1693 | 7600 | 1.1721 | 7601 | 1.1730 | 7601 |
| 10.0 | 1.1752 | 7754 | 1.1768 | 7754 | 1.1773 | 7754 |
| 20.0 | 1.1812 | 7905 | 1.1816 | 7905 | 1.1817 | 7905 |

Коснемся, наконец, одного заблуждения, разделяемого некоторыми авторами (см., например, [3]). Обращение показателя ν_0 в нуль при переходе со слабого участка ударной поляры на сильный не может служить ни доказательством, ни даже доводом в пользу несуществования присоединенной ударной волны сильного семейства. Вообще говоря, разложение может начинаться с любого из возможных показателей и вся разница между сильной и слабой ударными волнами состоит в структуре малых возмущений θ_1 и P_1 .

4. Проиллюстрируем полученные результаты на некоторых трансзвуковых течениях, воспользовавшись для этого плоскостью годографа u, v (u — составляющая скорости вдоль оси x , v — перпендикулярная компонента). Рассмотрим задачу типа задачи Ф. И. Франкля [4,5] — обтекание клина конечных размеров, — точнее, той ее разновидности, когда ударная волна присоединена к носку.

Для таких задач изучение окрестности вершины в физической плоскости эквивалентно изучению окрестности точки O_1 на плоскости годографа, находящейся на пересечении ударной поляры w с прямой

b ($v = u \operatorname{tg} \beta$). Вообще говоря, таких точек две (см. фиг. 3).



Фиг. 3

При движении по некоторой малой дуге $d_\varepsilon : \{r = \varepsilon, \beta < \varphi < \alpha\}$ от контура тела к волне в физической плоскости соответствующая точка на плоскости годографа перемещается в окрестности O_1 (или O_2) от прямой b до поляры w . Ее полярный угол $\theta = \operatorname{arctg}(v/u)$ отличается от $\theta_0 = \beta$ на некоторую малую величину, кото-

рая с точностью до постоянного множителя совпадает с решением задачи о малых возмущениях, т. е. $\theta = \theta_0 + C\theta_1$.

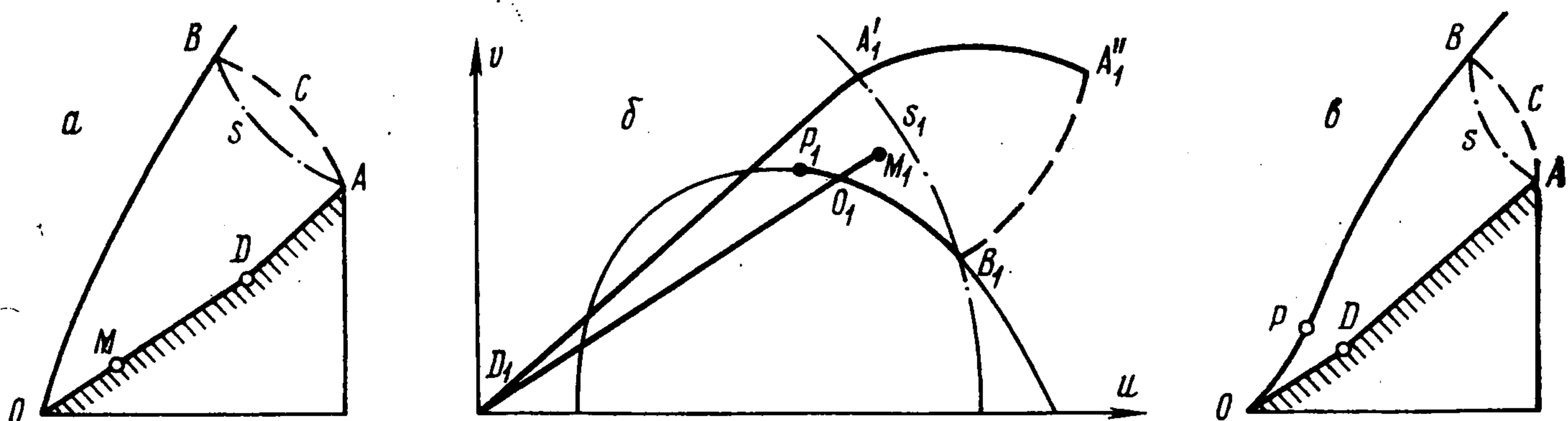
Введем на плоскости годографа линии, являющиеся образами изобар (π_1 и π_2 на фиг. 3; s — звуковая линия). В трансзвуковом приближении они совпадают с линиями постоянных значений модуля скорости u , следовательно, представляют собой окружности с центром в начале координат. Впрочем, для дальнейшего существенна лишь их ортогональность к линии w . Поскольку образы изобар проходят через O_i , возмущения P_1 на них обращаются в нуль.

Пусть окрестность $\omega : \{r < \varepsilon, \beta < \varphi < \alpha\}$ отображается на некоторую область Ω . Покажем, что угловой размер Ω зависит от номера показателя ν , привлекая для этого зависимость числа нулей $P_1(\varphi)$ от m . Рассмотрим сначала слабую ударную волну (O_1). Пусть $\nu = \nu_0$. Тогда $P_1 \neq 0$, т. е. образ d_ε не пересекает π_1 . Следовательно, область Ω остроугольна. Для $\nu = \nu_1$ раствор Ω лежит в интервале от π до $3/2\pi$. Если $m > 1$, то

при движении по d_e соответствующая точка на плоскости годографа обходит O_1 более одного раза, и обратное преобразование становится неоднозначным.

Точно так же можно показать, что для сильной волны (O_2) первому положительному показателю (теперь это ν_1) отвечает тупой угол области Ω , второму — угол, лежащий в интервале от $3/2\pi$ до 2π . Неоднозначность появляется при старших ν_m .

Таким образом, первые два положительных показателя имеют некоторый приоритет: им отвечают взаимно-однозначные преобразования годографа (в окрестности вершины). Но и в этом случае остается неопределенность в выборе одного из двух показателей, которая может быть устранена лишь при рассмотрении задачи в целом. Примером может служить обтекание двойного клина, когда число Маха в области между клином и ударной волной меньше единицы (фиг. 4, а).



Фиг. 4

При достаточно большой длине плеча OD (по сравнению с DA) скорость на нем немонотонна: сначала она возрастает, достигая максимума в некоторой точке M , а затем убывает, достигая нулевого значения в D . В этом случае M_1 — образ точки M — лежит на продолжении отрезка D_1O_1 между ударной полярой и звуковой линией s_1 (фиг. 4, б). Область $ACBOD$ переходит в область с разрезом $A_1'A_1''B_1O_1M_1D_1$. С уменьшением OD разрез O_1M_1 уменьшается и в некоторый момент исчезает совсем (второй случай). Продолжая уменьшать OD , будем получать области типа $A_1'A_1''B_1P_1O_1D_1$, где присутствует уже другой разрез — вдоль ударной поляры — O_1P_1 (третий случай). Его длина растет по мере уменьшения плеча OD . Двойной проход по поляре очевидным образом означает наличие на ударной волне точки перегиба (фиг. 4, в).

В этом примере интересна окрестность точки O_1 . В первом случае угол $B_1O_1M_1$ острый, во втором тупой, в третьем снова острый (но расположенный уже по другую сторону от точки O_1). Это означает, что разложение функции θ в окрестности носка имеет вид $\theta = \theta_0 + CR^{\nu_0} \sin \nu_0 \Phi + \dots$, где θ_0 , ν_0 и C зависят от положения точки D . И при этом C (D) проходит через нуль, когда D занимает нейтральное положение. В этот момент первый (отличный от θ_0) член разложения исчезает и включается следующий, относящийся, как было показано, к тупоугольной окрестности на плоскости годографа.

Аналогичная ситуация возникает при обтекании двойного клина в канале, когда бóльший угол превышает критическое значение. Те же рассуждения применимы к задаче обтекания простого клина в канале. Ясно, что выбор структуры решения в окрестности вершин можно сделать, только рассмотрев течение в целом.

5. Вернемся к исходной постановке для системы (1.2), но рассмотрим теперь неоднородную задачу. Пусть уравнение контура в окрестности вершины имеет вид $y = x \operatorname{tg} \beta + ax^{1+s} + \dots$, $s > 0$. Для наклона линии тока на контуре имеем $\theta = \beta + a(1+s)r^s \cos^{2+s} \beta$. Поэтому граничное условие (2.1) при $\varphi = \beta$ заменяется теперь на $\theta_1 = Cr^s$.

В сверхзвуковом случае ($M_0 > 1$) переход к координатам (ξ, η) дает $\theta_1 = C\xi^s$. Решение определяется формулами

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \theta_1 &= C [\lambda (\xi + \eta)^s + (1 - \lambda)(\xi - \eta)^s] \\ \sigma_1 &= C [-\lambda (\xi + \eta)^s + (1 - \lambda)(\xi - \eta)^s], \quad \lambda = \mu^s / (\kappa + \mu^s) \end{aligned}$$

Постоянные μ и κ определены в п. 2, и, тем самым, удовлетворяют неравенствам $|\kappa| > 1$, $0 < \mu < 1$. Это обеспечивает конечность λ , т. е. существование решения во всем диапазоне $\alpha < \alpha_*$. Единственность (тривиальность решения однородной задачи) уже была доказана.

При $\alpha > \alpha_*$ следует перейти к координатам R, Φ . Тогда граничное условие на контуре (при $\Phi = 0$): $\theta_1 = CR^s$ и для θ_1 и σ_1 получим

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \theta_1 &= CR^s (\cos s\Phi + D \sin s\Phi) \\ \sigma_1 &= CR^s (-\sin s\Phi + D \cos s\Phi) \\ D &= (h \operatorname{tg} s\Phi^{(w)} + 1) / (h - \operatorname{tg} s\Phi^{(w)}) \end{aligned}$$

Итак, формула (5.2) дает решение задачи в общем случае, т. е. при $h \neq \operatorname{tg} s\Phi^{(w)}$. Однако единственности здесь уже нет, поскольку существуют, как было показано, последовательности нетривиальных функций θ_1 и σ_1 . Поэтому полученный результат нуждается в разъяснении.

Пусть s меньше первого положительного показателя ν . Тогда формулы (5.2) в самом деле дают первый член разложения. Если же $s > \nu$, то построенное решение не имеет смысла учитывать, так как однородная задача вносит более сильные возмущения. Геометрически это означает, что в первом приближении при $s < \nu$ течение реагирует на искривление профиля, а при $s > \nu$ не реагирует. На это впервые обратил внимание Гудерлей [6], столкнувшийся с аналогичной ситуацией в трансзвуковых течениях.

Рассмотрим особый случай: $h = \operatorname{tg} s\Phi^{(w)}$. Теперь решение вида (5.2) невозможно и разложение должно содержать логарифмические члены. Для его построения воспользуемся гармоничностью $\theta_1(R, \Phi)$. Перейдем от плоскости $z = Re^{i\Phi}$ к плоскости $w = z^s = R_1 \exp(i\Phi_1)$; $R_1 = R^s$, $\Phi_1 = s\Phi$.

Функция $g(R_1, \Phi_1) = \theta_1(R, \Phi)$ также гармоническая. Возьмем граничное условие на ударной волне в виде равенства нулю косо́й производной (1.5). Ввиду конформности преобразования величина угла χ между направлением дифференцирования и границей не изменится. Повернется лишь сама граница: $\Phi = \Phi^{(w)} \rightarrow \Phi_1 = \Phi_1^{(w)} = s\Phi^{(w)}$. Условие же непротекания упростится

$$(5.3) \quad g(R_1, 0) = R_1$$

Найдем g . Имеем $\operatorname{tg} \chi = h$, $\operatorname{tg} \nu\Phi^{(w)} = h = \operatorname{tg} s\Phi^{(w)} = \operatorname{tg} \Phi_1^{(w)}$. Поэтому $\Phi_1^{(w)} = \chi$ при $\alpha < \alpha^*$ или $\Phi_1^{(w)} = \pi + \chi$ при $\alpha > \alpha^*$. В любом случае направление дифференцирования теперь параллельно границе $\Phi_1 = 0$. Введем координаты $\xi_1 = R_1 \cos \Phi_1$, $\eta_1 = R_1 \sin \Phi_1$. Тогда приходим к задаче отыскания гармонической в угле $0 < \Phi_1 < \Phi_1^{(w)}$ функции $g(R_1, \Phi_1)$, удовлетворяющей граничным условиям

$$g(R_1, 0) = \xi_1, \quad \left. \frac{\partial g}{\partial \xi_1} \right|_{\Phi_1 = \Phi_1^{(w)}} = 0$$

Перейдем от g к $\Theta = \partial g / \partial \xi_1$. Для Θ граничные условия суть $\Theta = 1$ при $\Phi_1 = 0$ и $\Theta = 0$ при $\Phi_1 = \Phi_1^{(w)}$. Поэтому

$$\Theta = 1 - \frac{\Phi_1}{\Phi_1^{(w)}} = 1 - \frac{1}{\Phi_1^{(w)}} \operatorname{arctg} \frac{\eta_1}{\xi_1} = 1 - \frac{\pi}{2\Phi_1^{(w)}} + \\ + \frac{1}{\Phi_1^{(w)}} \operatorname{arctg} \frac{\xi_1}{\eta_1}$$

Восстановив g , получим

$$g = C(\eta_1) + \xi_1 \left(1 - \frac{\pi}{2\Phi_1^{(w)}} \right) + \\ + \frac{1}{\Phi_1^{(w)}} \left[\xi_1 \operatorname{arctg} \frac{\xi_1}{\eta_1} - \frac{\eta_1}{2} \ln \left(1 + \frac{\xi_1^2}{\eta_1^2} \right) \right] \\ C(\eta_1) = A + B\xi_1 - \frac{\eta_1}{\Phi_1^{(w)}} (\ln \eta_1 - 1)$$

(слагаемое $C(\eta_1)$ определяется из условия гармоничности g).

Граничное условие на теле дает $A = B = 0$. Возвращаясь к R_1, Φ_1 , а затем к R, Φ , окончательно получим

$$(5.4) \quad \theta_1 = aR^s \ln R + bR^s \\ a = -\frac{1}{\Phi^{(w)}} \sin s\Phi, \quad b = \left(1 - \frac{\Phi}{\Phi^{(w)}} \cos s\Phi + \frac{1}{s\Phi^{(w)}} \sin s\Phi \right)$$

Формула для $\sigma_1(R, \Phi)$ получается аналогично. Логарифмический член содержится также и в уравнении волны.

Заметим, что в полученной асимптотике следует удерживать оба слагаемых, несмотря на то, что первое стремится к нулю медленнее. Дело в том, что производные по R от них уже имеют одинаковый порядок.

В заключение рассмотрим влияние неоднородности набегающего потока. Для простоты ограничимся случаем локальной линейности внешнего течения в окрестности вершины и прямолинейным профилем. Система уравнений для малых возмущений и условие на теле не изменяется по сравнению с однородной задачей. Условие же на ударной волне примет вид

$$A\sigma_1 - B\theta_1 = Cr = C_1\xi = C_2\eta, \quad \eta = k\xi$$

Очевидно, что при $\nu \neq 1$ главный член разложения дается решением неоднородной задачи

$$\theta = R(D_1 \sin \Phi + D_2 \cos \Phi), \quad \nu > 1$$

или решением однородной задачи

$$\theta = R^\nu D_3 \sin \nu\Phi, \quad \nu < 1$$

Если же $\nu = 1$, то переходом от θ_1 к Θ получается задача, решение которой элементарно: $\Theta = C\Phi_1$. Отсюда

$$\theta_1 = D_1(\Phi) R \ln R + D_2(\Phi) R$$

что с точностью до коэффициентов совпадает с (5.4) при $s = 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cabannes H.* Étude de la singularité au sommet d'une onde de choc attachée, dans un écoulement à deux dimensions. *Compt. rend. Acad. sci. colon. (Paris)*, t. 229, No 19, p. 923—925.
 2. *Cabannes H.* Sur l'onde de choc attachée lorsque la vitesse aval à la pointe de l'obstacle est subsonique. *Compt. rend. Acad. sci. colon. (Paris)*, t. 230, N° 21, p. 1830—1832.
 3. *Половин Р. В.* Условия эволюционности косых и конических ударных волн и трансзвуковых течений. В сб.: *Современные вопросы гидродинамики*. Киев, «Наукова думка», 1967, стр. 44—57.
 4. *Франкль Ф. И.* О задачах С. А. Чаплыгина для смешанных до- и сверхзвуковых течений. *Избр. тр. по газовой динамике*. М., «Наука», 1973, стр. 278—302.
 5. *Франкль Ф. И.* К вопросу о единственности решения задачи обтекания клина сверхзвуковым потоком. *Избр. тр. по газовой динамике*. М., «Наука», 1973, стр. 380—385.
 6. *Гудерлей К. Г.* Теория околосзвуковых течений. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
-