Прикладная математика и механика. Том 43, 1979

УДК 532.501.32

К НАХОЖДЕНИЮ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ НЕСУЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ

В. В. Дыхта

(Николаев)

Путем применения ряда искусственных приемов основное двумерное сингулярное интегральное уравнение линейной теории тонкой несущей поверхности любого удлинения произвольной формы в плане и с переменным по размаху углом атаки приводится к виду, допускающему разделение переменных. Показано, что решение полученных в результате разделения уравнений сводится к решению некоторых однородных краевых задач Римана, допускающих решение через интегралы типа Коши [1].

Исследуемое основное уравнение, полученное в рамках теории потенциала ускорений, до настоящего времени не имело замкнутого аналитического решения и служило предметом многочисленных исследований и публикаций, направленных в основном на поиск более или менее корректных аппроксимаций ядра с целью получения одномерных уравнений [2].

1. Основное уравнение теории тонкой несущей поверхности S, движущейся прямолинейно с постоянной скоростью u в безграничной среде, записывается в виде [2]

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{A^\circ(x_0, y_0)}{y-y_0}\left[1-\frac{R(x_0, y_0, x, y)}{x-x_0}\right]dx_0\,dy_0 = -V(y)+C(x) \tag{1.1}$$

$$A^\circ(x, y)=\frac{A(x, y)}{2\lambda(y)}, \quad \lambda(y)=\frac{b}{a(y)}, \quad V(y)=u\int V_*(y)\,dy$$

$$R(x_0, y_0, x, y)=[(x-x_0)^2+\lambda^2(y_0)(y-y_0)^2]^{1/2}$$

$$x, y, x_0, y_0\in S_*$$

Здесь $A(x, y)$ — искомое решение, $\lambda(y)$ — удлинение крыла, b — его полуразмах, $a(y)$ — полухорда в сечении y, $V_*(y)$ — нормальная к S составляющая скорости потока, $C(x)$ — некоторая заранее неизвестная функция x, S_* — проекция S на плоскость полета.

Уравнение (1.1) описывает класс гидродинамически закрученных по размаху тонких крыльев, имеющих симметричный профиль и произвольную форму в плане.

Учитывая, что

$$\frac{R(x_0, y_0, x, y)}{(y-y_0)(x-x_0)}=R^{-1}(x_0, y_0, x, y)\left[\frac{x-x_0}{y-y_0}+\lambda^2(y_0)\frac{y-y_0}{x-x_0}\right]$$

уравнение (1.1) можно переписать в такой форме:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}[\varphi_1(y_0)-\varphi_2(x, y_0, y)]\frac{dy_0}{y-y_0}= \tag{1.2}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\varphi_3(x, y_0, y)(y-y_0)\,dy_0 - V(y)+C(x)$$

$$\varphi_1(y_0)=\int_{-1}^{1}A^\circ(x_0, y_0)\,dx_0, \quad \varphi_2(x, y_0, y)=\int_{-1}^{1}A^\circ(x_0, y_0)\frac{(x-x_0)\,dx_0}{R(x_0, y_0, x, y)}, \tag{1.3}$$

$$\varphi_3(x, y_0, y)=\int_{-1}^{1}\frac{A^\circ(x_0, y_0)\lambda^2(y_0)}{R(x_0, y_0, x, y)}\frac{dx_0}{x-x_0}$$

Предположим, что функция $A^\circ(x, y)$ удовлетворяет условию Гельдера [1] по обеим переменным, тогда функции φ_1 и φ_2, очевидно, также будут удовлетворять этому условию по всем соответствующим переменным. Это позволяет, несмотря на зависимость функции φ_2 от параметров x и y, воспользоваться известными формулами обращения интегралов типа Коши в соответствующем классе функций [3]. Поскольку скачок давления на крыле, пропорциональный функции A, на боковых кромках должен обращаться в нуль, обратим сингулярный интеграл, стоящий в левой части равенства (1.2) в классе функций, ограниченных в точках $y=\pm 1$. Это дает

$$\varphi_1(y)-\varphi_2(x, y_0, y)=-\frac{\sqrt{1-y^2}}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{2V(y_0)-2C(x)-\varphi_4(x, y_0)}{\sqrt{1-y_0^2}\,(y-y_0)}\,dy_0, \tag{1.4}$$

$$\varphi_4(x, y)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}(y-y_0)\,\varphi_3(x, y_0, y)\,dy_0 \tag{1.5}$$

при условии

$$\int_{-1}^{1}\frac{2V(y_0)-2C(x)-\varphi_4(x, y_0)}{\sqrt{1-y_0^2}}=0 \tag{1.6}$$

удовлетворяющемся соответствующим выбором $C(x)$.

Заметим, что результат (1.4) можно получить, не прибегая к готовым формулам обращения, а получив их, исходя из решения соответствующей краевой задачи Римана [1]. При этом условием разрешимости задачи Римана в классе ограниченных функций будет служить равенство (1.6).

Обращаясь к обозначениям (1.3), можно показать, что левая часть равенства (1.4) имеет вид

$$\int_{-1}^{1}A^\circ(x_0, y)\,dx_0-\int_{-1}^{1}A^\circ(x_0, y)\,\mathrm{sign}\,(x-x_0)\,dx_0=2\int_{x}^{1}A^\circ(x_0, y)\,dx_0$$

и, следовательно, согласно (1.4), при любой функции $C(x)$

$$\int_{x}^{1}A^\circ(x_0, y)\,dx_0=\frac{\sqrt{1-y^2}}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_4(x, y_0)-2V(y_0)}{\sqrt{1-y_0^2}\,(y-y_0)}\,dy_0$$

Независимость переменных x и y позволяет в этом равенстве, переписанном с учетом обозначения (1.5), поменять порядок интегрирования, т.е. записать

$$(1.7)\qquad \int_{-1}^{1} \frac{dx_0}{x-x_0} \frac{\sqrt{1-y^2}}{\pi^2} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{A^\circ(x_0, y_1)\lambda^2(y_1)}{R(x_0, y_1, x, y_0)} \frac{(y_0-y_1)\,dy_1 dy_0}{\sqrt{1-y_0^2}\,(y-y_0)} = B(x,y)$$

$$\frac{1}{2} B(x,y) = \int_{x}^{1} A^\circ(x_0, y)\,dx_0 + \frac{\sqrt{1-y^2}}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{V(y_0)\,dy_0}{\sqrt{1-y_0^2}\,(y-y_0)}$$

Отсюда после обращения стоящего в левой части первого равенства интеграла в классе функций, неограниченных на входящей кромке крыла и ограниченных на выходящей (постулат Жуковского — Чаплыгина [2]), находим

$$\sqrt{1-y^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} A^\circ(x, y_1)\,\lambda(y_1)\,\mathrm{sign}\,(y_0-y_1) \frac{dy_1 dy_0}{\sqrt{1-y_0^2}\,(y-y_0)} = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x_0}{1+x_0}}\, B(x_0, y) \frac{dx_0}{x_0-x}$$

Подействовав на это равенство последовательно операторами

$$M(u) = \int_{-1}^{1} u \frac{dy_0}{y_0-y} \quad \text{и} \quad L(v) = \int_{-1}^{1} v \frac{dx_0}{x_0-x}$$

придадим ему следующий вид:

$$(1.8)\qquad \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{dx_0}{x_0-x}\left[D(x_0) + \int_{-1}^{1} A(x_0, y_0)\,\mathrm{sign}\,(y-y_0)\,dy_0\right] = \int_{-1}^{1} B(x, y_0)\frac{dy_0}{y_0-y} \qquad (A = 2\lambda A^\circ)$$

Возникшая в результате действия оператора M функция $D(x)$ может быть выражена через $C(x)$, однако для дальнейшего эта связь несущественна. Действительно, поскольку [1]

$$\int_{-1}^{1} B(x, y_0)\frac{dy_0}{y_0-y} = \pi i B(x,y) - \int_{-1}^{1} \frac{\partial B(x, y_0)}{\partial y_0} \ln(y_0-y)\,dy_0 \qquad (B(x, \pm 1) = 0)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_{-1}^{1} \frac{\partial B(x, y_0)}{dy_0}\ln(y_0-y)\,dy_0 = -\int_{-1}^{1} \frac{\partial B(x, y_0)}{\partial y_0}\frac{dy_0}{y_0-y} + \pi i \frac{\partial B(x,y)}{\partial y}$$

то после дифференцирования равенства (1.8) по y имеем

$$\int_{-1}^{1} \frac{\partial B(x, y_0)}{\partial y_0}\frac{dy_0}{y_0-y_0} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} A(x_0, y)\frac{dx_0}{x_0-x}$$

Из второй формулы (1.7) следует

$$A(x, y) = -\lambda(y)\frac{\partial B(x, y)}{\partial x}$$

Поэтому предыдущему равенству можно придать такой вид:

$$\frac{1}{\lambda(y)}\int_{-1}^{1}\frac{\partial B(x, y_0)}{\partial y_0}\frac{dy_0}{y_0 - y} = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{\partial B(x_0, y)}{\partial x_0}\frac{dx_0}{x_0 - x}$$

Отсюда, полагая $B(x, y) = X(x)Y(y)$ и разделяя переменные, находим окончательно (μ — постоянная разделения)

$$\int_{-1}^{1}\frac{dY(y_0)}{dy_0}\frac{dy_0}{y_0 - y} = \mu\lambda(y)Y(y) \tag{1.9}$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{dX(x_0)}{dx_0}\frac{dx_0}{x_0 - x} = -2\mu X(x)$$

Полученные уравнения по форме совпадают с уравнением Прандтля теории несущей линии [4].

Решение уравнений (1.9) осуществляется методом, описанным в п.2.

2. Подлежащая определению функция $Y(y)$ является решением следующего одномерного сингулярного интегро-дифференциального уравнения:

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{dY(y_0)}{dy_0}\frac{dy_0}{y_0 - y} = \lambda(y)Y(y) \tag{2.1}$$

в котором $\lambda = \lambda(y)$ — заданная гладкая вещественная функция своего аргумента. Путем введения вспомогательной функции

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{dY}{dy_0}\frac{dy_0}{y_0 - z}, \quad \operatorname{Re} z = y$$

решение уравнения (2.1) сводится к решению следующей краевой задачи с краевым условием, содержащим производные:

$$\frac{dF^+(y)}{dy} + \frac{dF^-(y)}{dy} - \lambda(y)[F^+(y) - F^-(y)] = 0 \quad (y \in (-1, 1)) \tag{2.2}$$

$$\left(F^\pm(y) = \int \Phi^\pm(y)\,dy + \text{const}, \; Y(y) = F^+(y) - F^-(y)\right)$$

Здесь $F^\pm(y)$ и $\Phi^\pm(y)$ — предельные значения функций $F(z)$ и $\Phi(z)$ при подходе к отрезку $(-1, 1)$ с разных сторон.

Вводя новые функции $Q^\pm(y)$ соотношениями

$$\int Q^\pm(y)\,dy = \exp\left(\mp\int\lambda(y)\,dy\right)F^\pm(y)$$

придадим краевому условию (2.2) такой вид:

$$Q^+(y) = -\exp\left(2\int\lambda(y)\,dy\right)Q^-(y) \tag{2.3}$$

характерный для однородной краевой задачи Римана [1].

Коэффициент задачи (2.3) не имеет особых точек, ее индекс неотрицателен, и, следовательно, она имеет решение, выражающееся через интегралы типа Коши [1].

Поступила 6 III 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М., «Наука», 1977.
2. *Панченков А. Н.* Теория потенциала ускорений. Новосибирск, «Наука», 1975.
3. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., Физматгиз, 1962.
4. *Карафоли Е.* Аэродинамика крыла самолета. Несжимаемая жидкость. М., Изд-во АН СССР, 1956.