Прикладная математика и механика. Том 43, 1979

УДК 62—50

СХОДИМОСТЬ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

Т. Р. Гичев, А. Л. Дончев

(София)

Рассматривается задача быстродействия линейной управляемой системы. Сингулярное возмущение представлено малым параметром при производных некоторых состояний системы. При определенных условиях исследуется сходимость решения этой задачи к решению задачи быстродействия для укороченной системы.

1. Пусть поведение управляемой системы описывается следующим векторным дифференциальным уравнением:

$$x^{\cdot} = A_0x + B_0u, \quad x(0) = v \tag{1.1}$$
$$x \in R^n, \quad u \in \Omega \subset R^r$$

Здесь Ω — выпуклый и компактный многогранник, начало координат O_r пространства R^r принадлежит внутренности области Ω; A_0 и B_0 — постоянные матрицы размерности $n \times n$ и $n \times r$ соответственно. Множество допустимых управлений состоит из кусочно-непрерывных функций $u(t)$, определенных на конечных отрезках времени $[0, t_1]$. Любое допустимое управление имеет конечное число точек разрыва, которые принадлежат интервалу $(0, t_1)$, и непрерывно справа в этих точках.

Задача быстродействия для системы (1.1) (см. [1,2]) состоит в отыскании допустимого управления, которое переводит ее из фиксированного начального состояния v в начало координат O_n пространства R^n в минимально возможное время (задача Γ_0).

Пусть при $\lambda \in (0, \Lambda)$, $\Lambda > 0$ поведение управляемой системы описывается следующим векторным уравнением:

$$x^{\cdot} = A_{11}x + A_{12}y + B_1u, \quad x(0) = v \tag{1.2}$$
$$\lambda y^{\cdot} = A_{21}x + A_{22}y + B_2u, \quad y(0) = w; \quad y \in R^m$$

где A_{ij}, B_i — постоянные матрицы соответствующей размерности. Для этой системы тоже рассматривается задача быстродействия, которая состоит в отыскании допустимого управления, которое переводит ее из фиксированного начального состояния (v, w) в начало координат O пространства R^{m+n} в минимально возможное время (задача Γ_λ).

Проблеме влияния регулярных возмущений на решения задач линейного быстродействия посвящены работы [3,4]. Сформулирована [5] задача быстродействия с сингулярным возмущением и обсуждены некоторые асимптотические свойства ее решения.

В дальнейшем исследуется сходимость решения задачи Γ_λ к решению задачи Γ_0, когда $\lambda \to 0$, где матрицы A_0 и B_0 определяются следующим образом:

(1.3) $$A_0 = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}, \quad B_0 = B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2$$

Для этого, с одной стороны, используется подход, который в [4] применялся при изучении корректности постановки линейной задачи быстродействия и, с другой стороны, математический аппарат, который развит в [6,7] при исследовании сингулярно возмущенных задач оптимального управления с выпуклым критерием качества.

Предполагается, что выполнены следующие три условия:

1°. Действительные части характеристических чисел матрицы A_{22} отрицательны.

2°. Для уравнения (1.1) с матрицами A_0, B_0 и многогранника Ω выполнено условие общности положения (см. [1,2]); существует оптимальное управление для задачи Γ_0, которое обозначим через $u_0(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T_0$.

3°. $\operatorname{rank}\,[B_2 A_{22} B_2 \ldots A_{22}^{m-1}B_2] = m$.

Условие 3° накладывалось в [5].

2. Докажем две вспомогательные леммы.

Лемма 2.1. Пусть $u(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T+\gamma$, $0 < \gamma < T$ — допустимое управление, которое непрерывно во всех точках $t \in (T-\gamma, T+\gamma)$, и заданы последовательность $\{\lambda_k\}_1^\infty$, $\lambda_k \in (0, \Lambda)$, $\lim \lambda_k = 0$ $(k \to \infty)$ и последовательность $\{T_k\}_1^\infty$, $T_k > 0$, $\lim T_k = T$ $(k \to \infty)$. Тогда если $x^*(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$ — решение уравнения (1.1), соответствующее управлению $u(t)$, и $(x_k(t), y_k(t))$, $0 \leqslant t \leqslant T_k$ — решение уравнения (1.2) при $u(t)$, λ_k, то

(2.1) $$\lim_{k\to\infty} x_k(T_k) = x^*(T), \quad \lim_{k\to\infty} \max_{t\in[0,\, \min(T_k,\, T)]} \| x_k(t) - x^*(t) \| = 0$$

(2.2) $$\lim_{k\to\infty} y_k(T_k) = -A_{22}^{-1}(A_{21}x^*(T) + B_2 u(T))$$

Доказательство. Пусть фундаментальное решение однородного уравнения

$$\xi^\cdot = A_{11}\xi + A_{12}\eta, \quad \lambda_k \eta^\cdot = A_{21}\xi + A_{22}\eta$$

обозначено через

$$\Phi^k(t) = \begin{Vmatrix} \Phi_{11}^k(t) & \Phi_{12}^k(t) \\ \Phi_{21}^k(t) & \Phi_{22}^k(t) \end{Vmatrix}$$

где $\Phi^k(0)$ — единичная матрица. Из формулы Коши получаем

(2.3) $$y_k(T_k) = \Phi_{21}^k(T_k)\,v + \Phi_{22}^k(T_k)\,w + \int_0^{T_k} \Big(\Phi_{21}^k(T_k - t) B_1 + \frac{1}{\lambda_k} \Phi_{22}^k(T_k - t) B_2 \Big) u(t)\,dt.$$

В силу леммы 3 из [6] матрица $\Phi_{21}{}^k(t)$ равномерно ограничена на отрезке $[0, T+\gamma]$ и для каждого $t^* \in (0, T+\gamma]$ равномерно на отрезке $[t^*, T+\gamma]$

$$\lim_{k\to\infty} \Phi_{21}^k(t) = -A_{22}^{-1}A_{21}\exp(A_0 t)$$

Следовательно

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^{T_k}\Phi_{21}^k(T_k-t)B_0u(t)\,dt=-A_{22}^{-1}A_{21}\int_0^T\exp(A_0(T-t))B_0u(t)\,dt \tag{2.4}$$

Если

$$\overline{\Phi}_{22}^k(t)=\begin{cases}\Phi_{22}^k(t), & t\in[0,\ T_k]\\ \Phi_{22}^k(T_k), & t\in[T_k, T+\gamma]\end{cases}$$

то из равенства

$$\frac{d}{d\tau}(\Phi_{22}^k(t-\tau))'=-A_{12}'(\Phi_{21}^k(t-\tau))'-\frac{1}{\lambda_k}A_{22}'(\Phi_{22}^k(t-\tau))' \tag{2.5}$$

получаем

$$\lim_{k\to\infty}\overline{\Phi}_{22}^k(t)=\begin{cases}\Theta_m, & t\in(0,\ T+\gamma]\\ I_m, & t=0\end{cases} \tag{2.6}$$

где I_m — единичная, а Θ_m — нулевая матрица в R^m; штрих означает транспонирование. Полное изменение функций $\Phi_{22}{}^k(t)$ равномерно ограничено на отрезке $[0,\ T+\gamma]$. Из (2.6) и теоремы Хелли следует, что

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^{T_k}(A_{22}^{-1}B_2u(t))'d(\Phi_{22}^k(T_k-t))'=(A_{22}^{-1}B_2u(T))' \tag{2.7}$$

Обозначим

$$y^*(t)=-A_{22}{}^{-1}(A_{21}x^*(t)+B_2u(t))=$$
$$=-A_{22}^{-1}A_{21}\left(\exp(A_0t)v+\int_0^t\exp(A_0(t-\tau))B_0u(\tau)\,d\tau\right.-A_{22}^{-1}A_{21}B_2u(t)$$

Тогда из (2.4), (2.5) и (2.7) следует, что

$$\|y_k(T_k)-y^*(T)\|\leqslant\|(\Phi_{21}^k(T_k)+A_{22}^{-1}A_{21}\exp(A_0T))v\|+$$
$$+\|\Phi_{22}^k(T_k)w\|+\left\|\int_0^{T_k}\Phi_{21}(T_k-t)B_0u(t)\,dt+\int_0^T A_{22}^{-1}A_{21}\exp(A_0(T-t))\times\right.$$
$$\left.\times B_0u(t)\,dt\right\|+\left\|A_{22}^{-1}B_2u(T)-\int_0^{T_k}(A_{22}^{-1}B_2u(t))'d(\Phi_{22}^k(T_k-t))')'\right\|$$

т. е. выполняется (2.2). Аналогично доказывается, что последовательность $\{y_k(t)\}_1^\infty$ сходится почти всюду на отрезке $(0,\ T)$ к $y^*(t)$. Но так как последовательность $\{y_k(t)\}_1^\infty$, $0\leqslant t\leqslant T_k$ равномерно ограничена, то из равенства

$$x^*(T)-x_k(T_k)=\int_0^T\Phi_0(T-t)(A_{12}y^*(t)+B_1u(t))\,dt-$$
$$-\int_0^{T_k}\Phi_0(T_k-t)(A_{21}y_k(t)+B_1u(t))\,dt$$

следует, что $\lim x_k(T_k)=x^*(T)$ $(k\to\infty)$, где $\Phi_0(t)$ — фундаментальная матрица уравнения $\xi^\cdot=A_{11}\xi$. Так же доказывается и второе равенство в (2.1).

Пусть через $K(T,\ \lambda)$ обозначено множество достижимости с начальным состоянием $(v,\ w)$ и допустимыми управлениями $u(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$ при $\lambda\in$

$\in (0, \Lambda)$. Известно, что для любых $\lambda \in (0, \Lambda)$ и $T > 0$ множество $K(T, \lambda)$ выпукло и компактно. Пусть через $K(T)$ обозначено множество достижимости для системы (1.1) с начальным состоянием v и с допустимыми управлениями $u(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$.

Лемма 2.2. Для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$, такое, что если $\lambda \in (0, \delta)$, то $O \in K(T_0 + \varepsilon, \lambda)$.

Доказательство. Допустим противное. Тогда найдутся число $\varepsilon_0 > 0$ и последовательность $\{\lambda_k\}_1^\infty$, $\lambda_k \in (0, \Lambda)$, $\lim \lambda_k = 0$, $(k \to \infty)$, такие, что $0 \notin K(T_0 + \varepsilon_0, \lambda_k)$ для $k = 1, 2, \ldots$. Тогда из известной теоремы выпуклого анализа следует, что для каждого $k = 1, 2, \ldots$ существует вектор (p_k, q_k), $p_k \in R^n$, $q_k \in R^m$, $\|(p_k, q_k)\| = 1$, такой, что для всех $(x, y) \in K(T_0 + \varepsilon_0, \lambda_k)$ выполняется неравенство

$$p_k' x + q_k' y < 0 \tag{2.8}$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $\lim (p_k, q_k) = (p_0, q_0)$ $(k \to \infty)$. Вводится матрица

$$M_k = \frac{1}{\lambda_k} \int_{t_k}^{T_0+\varepsilon_0} E_{22}(t) B_2 B_2' E_{22}'(t)\, dt$$

$$E_{22}(t) = \exp\left(A_{22} \frac{T_0 + \varepsilon_0 - t}{\lambda_k}\right), \quad t_k = T_0 + \varepsilon_0 - \sqrt{\lambda_k}$$

В лемме 2 из [7] доказано, что из условия 3° следует, что $\lim M_k = M_0$ $(k \to \infty)$, причём матрица M_0 невырождена. Пусть число $\sigma > 0$ выбрано так, что если $\|u\| < \sigma$, то $u \in \Omega$. Числа $\varepsilon_1^* > 0$, $\alpha_0 > 0$ и $\beta > 0$ выбираются так, чтобы для $\alpha \in (0, \alpha_0)$ и $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_1^*)$ выполнялись неравенства

$$\varepsilon_1 \sup_k \max_{t \in [T_0, T_0+\varepsilon_0]} \|B_2' E_{22}'(t) M_k^{-1} A_{22}^{-1}\| \|\exp(A_0(T_0 + \varepsilon_0 - t)) B_0\| \max_{u \in \Omega} \|u\| < \frac{\sigma}{3} \tag{2.9}$$

$$\alpha \sup_k \max_{t \in [T_0, T_0+\varepsilon_0]} \|B_2' E_{22}'(t) M_k^{-1} A_{22}^{-1} A_{21} p_0\| < \frac{\sigma}{3}$$

$$\beta \sup_k \max_{t \in [T_0, T_0+\varepsilon_0]} \|B_2' E_{22}'(t) M_k^{-1} q_0\| < \frac{\sigma}{3}$$

Из условия 2° следует, что существуют число $\alpha \in (0, \alpha_1)$ и допустимое управление $\bar{u}(t)$, $T_0 \leqslant t \leqslant T_0 + \varepsilon_0$, которое переводит фазовую точку из состояния O_n в состояние αp_0. Пусть число $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_1^*)$ фиксировано так, чтобы выполнялось неравенство

$$\alpha \|p_0\|^2 + p_0' p^* + \beta \|q_0\|^2 > 0 \tag{2.10}$$

$$p^* = - \int_{T_0+\varepsilon_0-\varepsilon_1}^{T_0+\varepsilon_0} \exp(A_0(T_0 + \varepsilon_0 - t)) B_0 \bar{u}(t)\, dt$$

Тогда управление

$$\bar{u}^*(t) = \begin{cases} u_0(t), & 0 \leqslant t < T_0 \\ \bar{u}(t), & T_0 \leqslant t < T_0 + \varepsilon_0 - \varepsilon_1 \\ O_r, & T_0 + \varepsilon_0 - \varepsilon_1 \leqslant t \leqslant T_0 + \varepsilon_0 \end{cases}$$

является допустимым и если $(\bar{x}_k^*(t), \bar{y}_k^*(t))$, $0 \leqslant t \leqslant T_0 + \varepsilon_0$ — соответствующая ему при λ_k траектория, то, согласно лемме 2.1, выполняются равенства

$$\lim_{k \to \infty} \bar{x}_k^*(T_0 + \varepsilon_0) = \alpha p_0 + p^* \tag{2.11}$$

$$\lim_{k \to \infty} \bar{y}_k^*(T_0 + \varepsilon_0) = - A_{22}^{-1} A_{21} (\alpha p_0 + p^*)$$

Из (2.9) следует, что управление

$$u_k^*(t)=\begin{cases}\bar u^*(t), & 0\leqslant t<t_k\\ \delta u_k(t)=B_2'E_{22}'(t)\,M_k^{-1}\,(\beta q_0+A_{22}^{-1}A_{21}(p^*+\alpha p_0)), & t_k\leqslant t\leqslant T_0+\varepsilon_0\end{cases}$$

является допустимым для всех достаточно больших k. Пусть через (x_k^*, y_k^*) обозначена соответствующая ему при λ_k траектория.

В силу леммы 3 из [6] последовательности $\{\Phi_{11}{}^k(t)\}_1^\infty$ и $\{\lambda_k^{-1}\Phi_{12}{}^k(t)\}_1^\infty$ равномерно ограничены на отрезке $[0,\ T_0+\varepsilon_0]$. Из равномерной ограниченности последовательности $\{\delta u_k(t)\}_1^\infty$ и формулы Коши для $t\in(t_k,\ T_0+\varepsilon_0]$

$$x_k^*(t)-\bar x_k^*(t)=\int_{t_k}^{t}\left(\Phi_{11}^k(t-\tau)\,B_1+\frac{1}{\lambda_k}\,\Phi_{12}^k(t-\tau)\,B_2\right)\delta u_k(\tau)\,d\tau$$

следует, что последовательность $\{(x_k^*(t)-\bar x_k^*(t)\}_1^\infty$ равномерно сходится к нулю на отрезке $[0,\ T_0+\varepsilon_0]$. Но тогда из первого равенства (2.11) вытекает, что

$$\lim_{k\to\infty} x_k^*(T_0+\varepsilon_0)=\alpha p_0+p^*$$

Легко доказывается, что

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\lambda_k}\int_0^{T_0+\varepsilon_0}E_{22}(t)\,A_{12}\,(x_k^*(t)-\bar x_k^*(t))\,dt=0$$

Тогда

$$y_k^*(T_0-\varepsilon_0)-\bar y_k^*(T_0+\varepsilon_0)=\frac{1}{\lambda_k}\int_{t_k}^{T_0+\varepsilon_0}E_{22}(t)\,(A_{12}\,(x_k^*(t)-$$

$$-\bar x_k^*(t))+B_2\delta u_k(t))\,dt=\int_0^{T_0+\varepsilon_0}E_{22}(t)\,A_{12}\,(x_k^*(t)-\bar x_k^*(t))\,dt+$$

$$+\beta q_0+A_{22}^{-1}A_{21}\,(p^*+\alpha p_0)$$

Отсюда и из второго равенства (2.11) следует, что

$$\lim_{x\to\infty} y_k^*(T_0+\varepsilon_0)=\beta q_0$$

Но так как $(x_k^*\,(T_0+\varepsilon_0),\ y_k^*\,(T_0+\varepsilon_0))\in K\,(T_0+\varepsilon_0,\ \lambda_k)$, то из (2.8) следует выполнение неравенства

$$p_k'x_k^*\,(T_0+\varepsilon_0)+q_k'y_k^*\,(T_0+\varepsilon_0)<0$$

откуда после предельного перехода получается неравенство

$$\alpha\,\|p_0\|^2+p_0'p^*+\beta\,\|q_0\|^2\leqslant 0$$

которое противоречит (2.10). Этим доказательство леммы закончено.

Теорема 2.1. Для любого числа $\varepsilon>0$ существует число $\delta>0$, такое, что для $\lambda\in(0,\ \delta)$ существует решение задачи Γ_λ, и если $T(\lambda)$ — оптимальное время перехода, то выполняется неравенство $|\,T(\lambda)-T_0\,|<\varepsilon$.

Доказательство. Пусть фиксировано число $\varepsilon>0$. Согласно лемме 2.2, существует число $\delta_1>0$, такое, что для $\lambda\in(0,\ \delta_1)$ точка $O\in K\,(T_0+$ $+\ \varepsilon,\ \lambda)$. Но тогда для всех этих чисел λ в силу [8] существует оптимальное управление и выполняется неравенство

(2.12) $\qquad T(\lambda)\leqslant T_0+\varepsilon$

Предположим, что существует последовательность $\{\lambda_k\}_1^\infty$, $\lim \lambda_k = 0$, такая, что $\lim T(\lambda_k) = T^* < T_0$ $(k \to \infty)$. Пусть $u_k(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T(\lambda_k)$ — оптимальное управление для λ_k. Допустимое управление

$$u_k^*(t) = \begin{cases} u_k(t), & 0 \leqslant t < T(\lambda_k) \\ O_r, & T(\lambda_k) \leqslant t \leqslant T^* + {}^1/_2(T_0 - T^*) \end{cases}$$

при каждом k переводит фазовую точку, согласно (1.2), из состояния (v, w) в состояние O. Не ограничивая общности, можно считать, что последовательность $\{u_k^*\}_1^\infty$ слабо сходится к $\bar u$ в $L_2^{(r)}(0, T^* + {}^1/_2(T_0 - T^*))$. Тогда из леммы 4 [6] следует, что соответствующая траектория x_k^* сходится поточечно к решению $\bar x$ уравнения (1.1), которое соответствует управлению $\bar u$, и выполняется равенство $\bar x(T^* + {}^1/_2(T_0 - T^*)) = 0_n$, т. е. $O_n \in K(T^* + {}^1/_2(T_0 - T^*))$. Достигнутое противоречие доказывает, что существует число $\delta \in (0, \delta_1)$, такое, что для $\lambda \in (0, \delta)$ выполняется неравенство $T(\lambda) \geqslant T_0 - \varepsilon$, которое вместе с (2.12) доказывает вторую часть теоремы.

3. Пусть через $D(\lambda)$ обозначено множество оптимальных управлений для задачи Γ_λ. Изучим сходимость оптимальных управлений и траекторий задачи Γ_λ. Так как эти исследования проводятся с помощью принципа максимума Л. С. Понтрягина [1, 2], то для этого понадобятся некоторые свойства множества достижимости и сопряженных систем, которые доказываются в следующих леммах.

Лемма 3.1. Пусть заданы последовательность $\{\lambda_k\}_1^\infty$, $\lambda_k \in (0, \Lambda)$, $\lim \lambda_k = 0$ $(k \to \infty)$ и последовательность $\{(p_k, q_k)\}_1^\infty$, $p_k \in R^n$, $q_k \in R^m$, единичных внешних нормалей (p_k, q_k) к множествам $K(T(\lambda_k), \lambda_k)$ в точке O, такие, что $\lim (p_k, q_k) = (p_0, q_0)$. Тогда $q_0 = O_m$.

Доказательство. Допустим, что $\|q_0\| \neq 0$. Пусть $t_k = T(\lambda_k) - \sqrt{\lambda_k}$ и числа $\varepsilon_1 > 0$ и $\beta > 0$ выбираются так, что выполняются соотношения

$$\begin{gathered} p_0' p^* + \beta \|q_0\|^2 > 0 \\ B_2' \exp\left(A_{22}' \frac{T_0 + \varepsilon_1 - t}{\lambda_k}\right) M_k^{-1}(A_{22}^{-1} A_{21} p^* + \beta q_0) \in \Omega, \quad t_k \leqslant t \leqslant T(\lambda_k) \\ k = 1, 2, \ldots \\ p^* = -\int_{T_0 - \varepsilon_1}^{T_0} \exp(A_0(T_0 - \tau)) B_0 u_0(\tau)\, d\tau \end{gathered} \tag{3.1}$$

Пусть

$$\bar u(t) = \begin{cases} u_0(t), & 0 \leqslant t < T_0 - \varepsilon_1 \\ O_r, & T_0 - \varepsilon_1 \leqslant t \leqslant T_0 + \varepsilon_1 \end{cases}$$

и $(\bar x_k, \bar y_k)$ — соответствующая управлению $\bar u$ траектория при λ_k. Тогда из леммы 2.1 и теоремы 2.1 следует, что

$$\lim_{k \to \infty} (\bar x_k(T(\lambda_k)), \bar y_k(T(\lambda_k))) = (p^*, -A_{22}^{-1} A_{21} p^*)$$

Допустимому управлению

$$u_k^*(t) = \begin{cases} \bar u(t), & 0 \leqslant t < t_k \\ B_2' \exp\left(A_{22}' \dfrac{T_0 + \varepsilon_1 - t_k}{\lambda_k}\right) M_k^{-1}(\beta q_0 + A_{22}^{-1} A_{21} p^*), & t_k \leqslant t \leqslant T(\lambda_k) \end{cases}$$

соответствует траектория (x_k^*, y_k^*) при λ_k. Повторяя часть доказательства леммы 2.2, получаем

$$\lim_{k\to\infty} (x_k^*(T(\lambda_k)), \quad y_k^*(T(\lambda_k))) = (p^*, \beta q_0)$$

Но так как $(x_k^*(T(\lambda_k)), y_k^*(T(\lambda_k))) \in K(T(\lambda_k), \lambda_k)$, то из определения векторов (p_k, q_k), $k = 1, 2, \ldots$ следует, что

$$p_k' x_k^*(T(\lambda_k)) + q_k' y_k^*(T(\lambda_k)) \leqslant 0$$

После предельного перехода получается неравенство

$$p_0' p^* + \beta \| q_0 \|^2 \leqslant 0$$

которое противоречит неравенству (3.1). Этим лемма доказана.

Лемма 3.2. В предположениях леммы 3.1 вектор p_0 является внешней нормалью к множеству $K(T_0)$ в точке O_n.

Доказательство. Допустим противное. Тогда найдется точка $v^* \in K(T_0)$ с соответствующим управлением $u^*(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T_0$, такая, что выполняется неравенство

$$p_0' v^* > 0 \tag{3.2}$$

Пусть ε_1 — произвольное положительное число и допустимое управление $\bar{u}$ определяется следующим образом:

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} u^*(t), & 0 \leqslant t < T_0 \\ u^*(T_0), & T_0 \leqslant t \leqslant T_0 + \varepsilon_1 \end{cases}$$

Если $(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$ — соответствующая ему траектория при λ_k, то в силу леммы 2.1

$$\lim_{k\to\infty} (\bar{x}_k(T(\lambda_k)), \bar{y}_k(T(\lambda_k))) = (v^*, -A_{22}^{-1}(A_{21} v^* + B_2 u^*(T_0)))$$

С другой стороны, $(\bar{x}_k(T(\lambda_k)), \bar{y}_k(T(\lambda_k))) \in K(T(\lambda_k), \lambda_k)$ и, следовательно

$$p_k' \bar{x}_k(T(\lambda_k)) + q_k' \bar{y}_k(T(\lambda_k)) \leqslant 0$$

Использование леммы 3.1 после предельного перехода приводит к противоречию с (3.2). Этим доказательство леммы закончено.

Пусть p_0 — внешняя единичная нормаль к множеству $K(T_0)$ в точке O_n и функция φ — решение уравнения

$$\varphi^{\cdot} = -A_0' \varphi, \quad \varphi(T_0) = p_0 \tag{3.3}$$

Тогда для каждого $t \in [0, T_0]$ оптимальное управление u_0 (см. [1, 2]) удовлетворяет условию максимума

$$\varphi'(t) B_0 u_0(t) = \max_{u \in \Omega} \varphi'(t) B_0 u \tag{3.4}$$

Аналогично, если (p, q), $p \in R^n$, $q \in R^m$ — внешняя единичная нормаль к множеству $K(T(\lambda), \lambda)$, $\lambda \in (0, \Lambda)$, в точке O и функция (φ, ψ) — решение системы

$$\begin{aligned} \varphi^{\cdot} &= -A_{11}' \varphi - A_{21}' \psi, \quad \varphi(T(\lambda)) = p \\ \lambda \psi^{\cdot} &= -A_{12}' \varphi - A_{22}' \psi, \quad \psi(T(\lambda)) = q / \lambda \end{aligned} \tag{3.5}$$

то любое оптимальное управление $u \in D(\lambda)$ удовлетворяет для каждого $t \in [0, T, (\lambda))$ условию максимума

$$(\varphi'(t) B_1 + \psi'(t) B_2) u(t) = \max_{u \in \Omega} (\varphi'(t) B_1 + \psi'(t) B_2) u \tag{3.6}$$

Доказательство следующей леммы вытекает из леммы 1 (*ii*) [7].

Лемма 3.3. Пусть заданы последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty$ и $\{(p_k, q_k)\}_1^\infty$, которые удовлетворяют предположениям леммы 3.1, и (φ_k, ψ_k), $k = 1, 2, \ldots$ — решение уравнения (3.5) с конечным условием $(p_k, q_k / \lambda_k)$, а φ — решение уравнения (3.3) с конечным условием p_0. Тогда для любого $T^* \in (0, T_0)$

$$(3.7) \qquad \lim_{k\to\infty} \max_{t\in[0,\, T^*]} (\| \varphi_k(t) - \varphi(t) \| + \| \psi_k(t) + A_{22}^{-1} A_{21} \varphi(t) \|) = 0$$

Теорема 3.1. Для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$, такое, что если $\lambda \in (0, \delta)$ и $u \in D(\lambda)$, то найдется конечное число открытых интервалов Δ_i, $\operatorname{mes}(\bigcup_i \Delta_i) < \varepsilon$, для которых $u(t) = u_0(t)$, когда $t \in [0, T_0] \setminus \bigcup_i \Delta_i$.

Доказательство. Допустим противное. Тогда найдутся число $\varepsilon_0 > 0$, последовательность $\{\lambda_k\}_1^\infty$, $\lambda_k \in (0, \Lambda)$, $\lim \lambda_k = 0$ $(k \to \infty)$ и управление $u_k \in D(\lambda_k)$, для которых утверждение теоремы не имеет места. Пусть (p_k, q_k) — единичная внешняя нормаль к множеству $K(T_k, \lambda_k)$ в точке O, где положено $T(\lambda_k) = T_k$. Не ограничивая общности, можно считать, что последовательность $\{(p_k, q_k)\}_1^\infty$ сходится к (p_0, q_0) и, согласно лемме 3.1, $\| q_0 \| = 0$, а, согласно лемме 3.2, вектор p_0 — внешняя нормаль к множеству $K(T_0)$ в точке O_n. Пусть (φ_k, ψ_k) — решение уравнения (3.5) с конечным условием $(p_k, q_k / \lambda_k)$ и φ — решение уравнения (3.3) с конечным условием p_0.

Пусть $0 \leqslant \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_{l-1} < T_0$ — все те моменты времени, в которых управление $u_0(t)$ не определяется однозначно из условия максимума (3.4). Множество $\{\tau_i,\ i = 1, \ldots, (l-1);\ T_0\}$ покрывается открытыми непересекающимися интервалами Δ_i, $i = 1, \ldots, l$, такими, что $\operatorname{mes}(\bigcup_i \Delta_i) < \varepsilon_0 / 2$. Так как в силу теоремы 2.1 $\lim T_k = T_0$ $(k \to \infty)$, то можно считать, что $T_k \notin [0, T_0] \setminus [\bigcup_i \Delta_i.]$ Если $T^* \in \Delta_l$ и $T^* < T_k$, то из леммы 3.3 следует, что выполняется соотношение (3.7.)

Согласно сделанному предположению, найдется последовательность точек $\{t_k\}_1^\infty$, $t_k \in [0, T_0] \setminus \bigcup_i \Delta_i$, $\lim t_k = t^*$ $(k \to \infty)$, такая, что

$$u_k(t_k) \neq u_0(t_k), \quad u_k(t_k) = \bar{u},\ u_0(t_k) = u^*,\ \bar{u} \neq u^*$$

Но из (3.6) следует, что

$$(\varphi_k'(t_k) B_1 + \psi_k'(t_k) B_2) \bar{u} \geqslant (\varphi_k'(t_k) B_1 + \psi_k'(t_k) B_2) u^*$$

откуда предельным переходом и использованием (3.7) получаем

$$\varphi'(t^*) B_0 \bar{u} \geqslant \varphi'(t^*) B_1 u^*$$

т. е. $\bar{u} = u^*$. Достигнутое противоречие доказывает теорему.

Пусть $x_0(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T_0$ — оптимальная траектория в задаче Γ_0 и $y_0(t) = -A_{22}^{-1}(A_{21} x_0(t) + B_2 u_0(t))$.

Теорема 3.2. Для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$, такое, что если $\lambda \in (0, \delta)$ и $u \in D(\lambda)$, то найдутся конечное число открытых интервалов Δ_i, $i = 1, \ldots, l$, $\operatorname{mes}(\bigcup_i \Delta_i) < \varepsilon$, для которых выполняются соотношения

$$(3.8) \qquad \max_{t\in[0,\, \min(T(\lambda),\, T_0)]} \| x(t, \lambda) - x_0(t) \| < \varepsilon$$

$$\max_{t\in[0,\,T_0]\setminus\bigcup_i\Delta_i} \| y(t, \lambda) - y_0(t) \| < \varepsilon$$

где траектория $(x(t, \lambda), y(t, \lambda))$ соответствует управлению u и значению параметра λ.

Доказательство проводится от противного. Пусть существуют число $\varepsilon_0 > 0$, последовательность $\{\lambda_k\}_1^\infty$, $\lambda_k \in (0, \Lambda)$, $\lim \lambda_k = 0$ $(k \to \infty)$ и управления $u_k \in D(\lambda_k)$, для которых по крайней мере одно из неравенств (3.8) не имеет места. Пусть последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty$ и $\{u_k\}_1^\infty$ обладают всеми свойствами аналогичных последовательностей в доказательстве теоремы 3.1.

Если τ_i, $i = 1, \ldots, l - 1$, $\tau_i < T_0$ — точки неоднозначной определенности оптимального управления $u_0(t)$ из соотношения максимума (3.4) и $\tau_l = T_0$ то, согласно теореме 3.1, существует последовательность $\{\Delta_i^k,\ i = 1, \ldots, l\}_1^\infty$ конечных покрытий точек τ_i, такая, что $\lim \operatorname{mes} (\bigcup_i \Delta_i) = 0$ $(k \to \infty)$ и $u_k(t) = u_0(t)$ для $t \in [0, T_0] \setminus \bigcup_i \Delta_i^k$. Тогда, как в лемме 2.1, доказывается, что последовательность $\{y(t, \lambda_k)\}_1^\infty$ ограничена, сходится почти всюду на интервале $(0, T_0)$ к $y_0(t)$ и

$$\lim_{k\to\infty} \max_{t\in[0,\,\min(T(\lambda_k),\,T_0)]} \| x(t, \lambda_k) - x_0(t) \| = 0 \tag{3.9}$$

Если на каждом отрезке $[\tau_i + \varepsilon_0 / (8l), \tau_{i+1} - \varepsilon_0 / (8l)]$, $\tau_{i+1} - \tau_i < \varepsilon_0 / (4l)$, $i = 1, \ldots, l - 1$ применена лемма 1 из [6], то получается, что

$$\lim_{k\to\infty} \max_{t\in[0,\,T_0]\setminus\bigcup_i(\tau_i-\varepsilon_0/(8l),\,\tau_i+\varepsilon_0/(8l))} \| y(t, \lambda_k) - y_0(t) \| = 0 \tag{3.10}$$

Но соотношения (3.9) и (3.10) противоречат сделанному предположению, что для всех k по крайней мере одно из неравенств (3.8) не имеет места. Достигнутое противоречие доказывает теорему.

Замечание. Для задачи быстродействия, которая состоит в отыскании допустимого управления, переводящего состояние системы из точки (v, w) в начало координат O_n пространства R^n в минимально возможное время, можно получить результаты, аналогичные теоремам 2.1, 3.1 и 3.2, без предположения 3°.

Поступила 18 IV 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гамкрелидзе Р. В.* К теории оптимальных процессов в линейных системах. Докл. АН СССР, 1957, т. 116, № 1.
2. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М., «Наука», 1969.
3. *Кириллова Ф. М.* О корректности постановки одной задачи оптимального регулирования. Изв. вузов. Матем., 1958, № 4.
4. *Гичев Т.* β-непрекъснатост на оптималното управление като функция на началното състояние. Изв. на Математическия институт, 1973, т. 14.
5. *Kokotovič P. V., Haddad A. H.* Controllability and time-optimal control of systems with slow and fast modes. IEEE Trans. Autom. Control., 1975, vol. 20, No. 1.
6. *Gičev T. R., Dontchev A. L.* Linear optimal control system with singular perturbation and convex performance index. Serdica, 1978 vol. 4.
7. *Гичев Т. Р., Essentials Дончев А. Л.* Сходимость решения задачи оптимального управления с свободным правым концом по малому параметру при производной. Годишник на Софийския Университет, 1977, т. 68.
8. *Halkin H. A.* New existence theorem in the class of piecewise continuous control functions. In: Control theory and the calculus of variations. New York—London, Acad. Press, 1969.