Прикладная математика и механика. Том 43, 1979

УДК 63—50

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УКЛОНЕНИЯ ОТ МНОГИХ ПРЕСЛЕДОВАТЕЛЕЙ

В. Л. Зак

(Москва)

Рассматривается движение одной уклоняющейся точки E и n преследующих точек в r-мерном пространстве. Скорости точек изменяются мгновенно и выбираются из выпуклых компактов, причем предполагается, что множество допустимых скоростей у точки E шире, чем у каждой из преследующих точек. Номинальное движение точки E — движение при отсутствии преследователей — состоит в скольжении по заданному лучу с максимальной скоростью. Построено кусочно-программное управление точкой E, обладающее следующим свойством: оставаясь в заданной окрестности номинального движения, E избегает точной встречи со всеми преследователями на бесконечном интервале времени. Дана оценка снизу минимального расстояния точки E от всех преследующих точек. Статья примыкает к работе [1]. Задача уклонения от многих преследователей рассматривалась также в [2–5].

1. Рассмотрим движение одной уклоняющейся точки E и n преследующих точек $P_1, \ldots, P_n$ в r-мерном пространстве ($r \geqslant 2$)

$$x_i^{\boldsymbol{\cdot}} = u_i, \quad u_i \in U_i, \quad i = 1, \ldots, n; \quad y^{\boldsymbol{\cdot}} = v, \quad v \in V \tag{1.1}$$

Здесь $y, x_1, \ldots, x_n$ — r-мерные фазовые векторы точек $E, P_1, \ldots, P_n$; $V, U_1, \ldots, U_n$ — выпуклые компакты. Будем предполагать, что имеют место вложения

$$U_i \subset \operatorname{int} V, \quad i = 1, \ldots, n \tag{1.2}$$

где $\operatorname{int} V$ обозначает внутренность V.

Точки P_i используют произвольные кусочно-непрерывные управления со значениями в U_i, $i = 1, \ldots, n$. В момент t игрок E располагает информацией о положении точек $E, P_1, \ldots, P_n$ на интервале $[0, t]$ и на основе этой информации формирует свое управление в этот же момент времени. Стратегией игрока E назовем такой способ формирования управления v, $v \in V$, что реализация $v(t)$ — кусочно-непрерывная функция.

Задан вектор v_0, $v_0 \in \partial V$, где ∂V — граница V, такой, что бесконечный интервал θv_0, $\theta > 1$ не содержит точек V и при некотором значении θ, $\theta \in [0, 1]$, $\theta v_0 \in \operatorname{int} V$.

В начальный момент $t = 0$ точка E занимает положение E_0, не совпадающее ни с одной из точек $P_1, \ldots, P_n$. Движение точки E из положения E_0 со скоростью v_0 будем называть номинальным.

Задача. Дано число ε_0, $\varepsilon_0 > 0$. Требуется построить такую стратегию точки E, что при любых допустимых управлениях преследователей, при каждом $t \geqslant 0$ точка E находится на положительном расстоянии от всех $P_1, \ldots, P_n$, оставаясь при этом в ε_0-окрестности номинального движения. Требуется также оценить минимальное расстояние δ_0 от E до точек $P_1, \ldots, P_n$ при $t \geqslant 0$.

Впервые подобная задача рассматривалась Ф. Л. Черноусько [1] для случая, когда V и U_i — шары с центром в начале координат, причем $U_i \subset V$, $i = 1, \ldots, n$.

2. Без потери общности можно считать, что V не лежит ни в какой гиперплоскости (в противном случае задача допускает понижение размерности). Отсюда и из (1.2) следует, что найдется такой выпуклый многогранник полной размерности Q, что $U_i \subset Q \subset \operatorname{int} V$, $i = 1, \ldots, n$. Следуя [6], будем считать грани и опорные гиперплоскости многогранников параллельными только в том случае, когда параллельны их внешние нормали.

Определение 1. Назовем выпуклый многогранник Q-образным, если каждой его грани соответствует параллельная грань Q и обратно.

Определение 2. Q_δ-окрестностью $Q_\delta(A)$ некоторой точки A назовем Q-образный многогранник, описанный вокруг шара радиуса δ с центром в точке A. O_δ-окрестностью $Q_\delta(D)$ множества D назовем объединение Q_δ-окрестностей его точек.

Заметим, что для Q-образного многогранника его Q_δ-окрестностью служит также Q-образный многогранник, причем расстояние между параллельными гранями равно δ.

Найдется $\varepsilon > 0$, такое, что $U_i \subset Q \subset Q_\varepsilon(Q) \subset V$. Если будет решена поставленная задача, в которой U_i заменяются на Q, $i = 1, \ldots, n$, а V на $Q_\varepsilon(Q)$, то тем самым будет решена и исходная задача. Поэтому в дальнейшем будем считать

$$U_i = Q, \quad i = 1, \ldots, n; \quad V = Q_\varepsilon(Q), \quad \varepsilon > 0$$

Определение 3. Пусть D_i — Q-образные многогранники, $i = 1, \ldots, k$. Назовем их Q-объединением минимальный Q-образный многогранник D, содержащий в себе D_i, и будем обозначать $D = [D_1, \ldots, D_k]$.

Рассмотрим точку x из r-мерного пространства, движение которой описывается уравнением

$$\dot{x} = u, \quad u \in Q$$

Обозначим $G_t(x(0))$ область достижимости x из положения $x(0)$ за время t. Пусть D — некоторый Q-образный многогранник. Назовем областью достижимости D

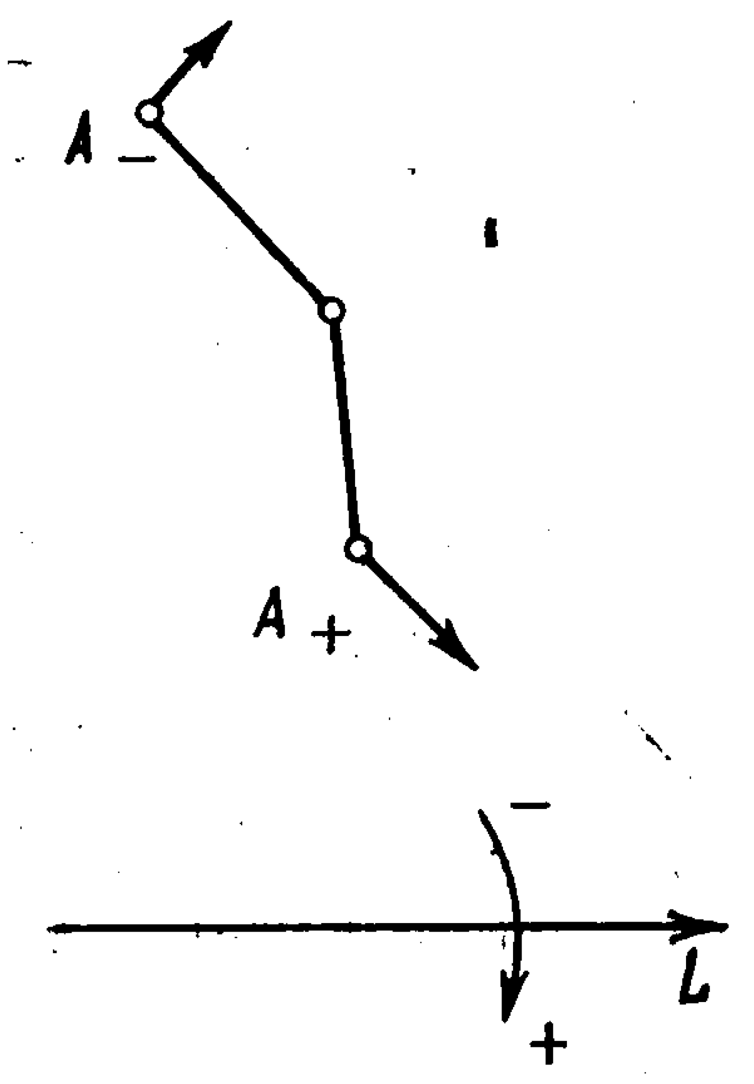
$$G_t(D) = \bigcup_{x(0) \in D} G_t(x(0))$$

$G_t(D)$ является Q-образным многогранником.

Пусть в момент $t = 0$ задан луч L с направляющим вектором v_0, имеющий общие точки с D, и точка $y(0)$, $y(0) \in \partial D$. Скажем, что для E возможен маневр убегания от D из положения $y(0)$, если существует такое программное допустимое управление $v(t)$, что соответствующее ему решение уравнения (1.1) $y(t)$ при всех $t \geqslant 0$ находится вне внутренности области достижимости D и, начиная с некоторого момента t_*, $y(t) \in L$.

Укажем управление v, позволяющее выполнить маневр убегания. При этом случай $r=2$ обсудим подробно и наметим ход рассуждений для произвольного r.

Проведем из точки нуль вектор v_0. Отмеченными будем называть такие стороны Q и параллельные им стороны $G_t(D)$, что проведенные через них опорные прямые разделяют многоугольник Q и конец вектора v_0. Всегда существует хотя бы одна отмеченная сторона — та, которую вектор v_0 пересекает, выходя из Q. Присвоим ей номер нуль. Если вектор v_0 проходит через вершину Q, то в качестве нулевой можно взять любую из сходящихся в этой вершине сторон. Отрезок $L \cap G_t(D)$ имеет две граничные точки. Под точкой пересечения будем понимать ту из них, у которой больше координата по лучу L. Начиная с некоторого момента, точка пересечения находится на нулевой стороне $G_t(D)$. Если игрок E попал в точку пересечения L с отмеченной стороной, то он может, двигаясь по L, оставаться вне $G_t(D)$. Для этого достаточно положить $v(t) \equiv v_0$.



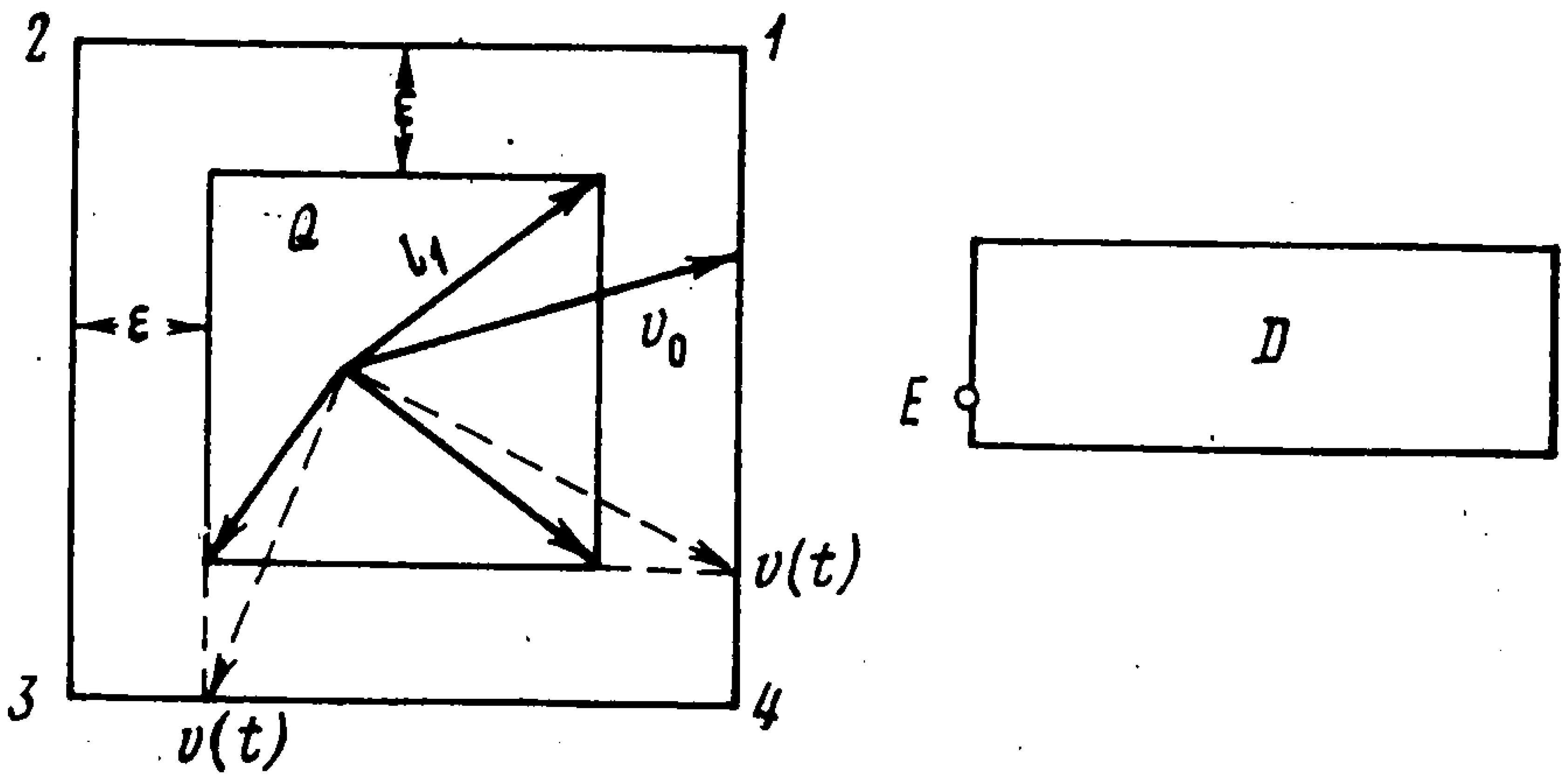
Фиг. 1

Зафиксируем направление положительного вращения. Тогда, естественно определяются верхняя и нижняя по отношению к L полуплоскости. Можно доказать, что отмеченные стороны образуют непрерывную ломаную, причем из двух ограничивающих ее вершин одна (A_+) движется вверх, а вторая (A_-) вниз. Если в начальный момент отмеченная на D ломаная не имеет с L общих точек, то выберем положительное направление так, чтобы она находилась в нижней полуплоскости (см. фиг. 1). Занумеруем стороны Q, считая от нулевой в положительном направлении. Проведем из точки нуль в вершины Q векторы l_i, $i = 1, \ldots, m$, где m — число сторон Q. Последовательно занумеруем их в положительном направлении так, чтобы нулевая сторона была заключена между l_m и l_1. Будем относить i-ю вершину к i-й стороне, если $i \neq m$; m-ю вершину отнесем к нулевой стороне. Для игрока E предлагается следующее кусочно-постоянное управление. Если E находится на i-й стороне $G_t(D)$, положим (см. фиг. 2)

$$v(t) = l_{i+1} + \frac{l_{i+1} - l_i}{|l_{i+1} - l_i|}\varepsilon, \quad i \neq 0 \tag{2.1}$$

$$v(t) = l_1 + \frac{l_1 - l_m}{|l_1 - l_m|}\varepsilon, \quad i = 0$$

При таком выборе управления точка E движется по i-й стороне $G_t(D)$, приближаясь со скоростью ε к $(i+1)$-й вершине $G_t(D)$. Следовательно, через конечное время E попадает в $(i+1)$-ю вершину и, тем самым, на $(i+1)$-ю сторону. В соответствии с (2.1) изменяется управление v, и E скользит по $(i+1)$-й стороне $G_t(D)$, приближаясь к $(i+2)$-й вершине и т. д., пока не наступит одно из двух событий: либо E попадает в точку пересечения L с отмеченной стороной, либо в вершину A_+, прежде чем A_+ пересечет L. В первом случае положим $v(t) = v_0$. Во втором — E остается в вершине A_+ до момента попадания A_+ на L (т. е. вектор v равен соответствующему l_i), после чего $v(t) = v_0$. Заметим, что при таком выборе управления E может несколько раз пересекать L.



Фиг. 2

Оценим t_*. Пусть q и d — самые длинные стороны Q и D соответственно. Обозначим t_*^k — время, затраченное на прохождение k сторон $G_t(D)$ в процессе маневра убегания. Тогда

$$t_*^1 \leqslant \varepsilon^{-1} d \tag{2.2}$$

$$t_*^i \leqslant t^{i-1} + \varepsilon^{-1}(d + q t_*^{i-1}), \quad i = 2,3,\ldots,m$$

Учитывая, что $t_* \leqslant t_*^m$, из рекуррентных соотношений (2.2) находим, что $t_* \leqslant [(1+q\varepsilon^{-1})^m - 1]dq^{-1}$. Таким образом установлено, что найдется такое число c_0, что при любом Q-образном многоугольнике D с наибольшей стороной не более d и при любом начальном положении $E(0) \in \partial D$ для времени t_* маневра убегания до выхода на L справедлива оценка

$$t_* \leqslant c_0 d, \quad c_0 = [(1+q\varepsilon^{-1})^m - 1]q^{-1} \tag{2.3}$$

Аналогично найдется такое число c_2, что

$$\operatorname{diam}(D) \leqslant c_2 d \tag{2.4}$$

для всякого Q-образного D с максимальной стороной не более d. В качестве c_2 можно взять целую часть $(m/2)$. Если D описан вокруг окружности радиуса δ, то найдется такое число c_1,

$$d \leqslant c_1\delta, \quad c_1 = 2\operatorname{ctg}(\beta/2) \tag{2.5}$$

где β — минимальный угол при вершине Q. В этом случае

$$c_0 d \leqslant c_0 c_1 \delta \text{ или } t_* \leqslant c\delta, \text{ где } c = c_0 c_1$$

Рассмотрим теперь случай $r > 2$.

Понятия нулевой и отмеченной стороны естественно обобщаются на случай произвольного r. Можно показать, что отмеченные грани образуют односвязное множество. Начиная с некоторого момента, точка пересечения L с $G_t(D)$ принадлежит отмеченной, а затем и нулевой грани. Строя управления по типу (2.1), игрок E может попасть в любую точку той грани $G_t(D)$, на которой он находится. В момент выхода на границу этой грани происходит переключение и т. д. За конечное время t_* игрок E попадает в точку пересечения L с отмеченной гранью, после чего $v \equiv v_0$. Неравенства (2.3) — (2.5) остаются справедливыми и в общем случае, если под q и d понимать самые длинные диаметры граней Q и D соответственно.

Замечание. Пусть заданы два Q-образных многогранника D и D_1, причем каждый из них имеет точки, не принадлежащие другому. Рассмотрим $D_2(t) = [G_t(D), G_t(D_1)]$. Пусть в начальный момент $E \in \partial D$ и цель игрока E состоит в том, чтобы, оставаясь вне $G_t(D)$, попасть на $\partial D_2(t)$. Сделать это он может, используя маневр убегания от D. Действительно, применяя маневр убегания, E имеет возможность попасть на любую грань $G_t(D)$. Но $\partial D_2(t)$ обязательно содержит некоторые грани $G_t(D)$. При этом время выхода на $\partial D(t)$ не превосходит $c_0 d$.

Все дальнейшее изложение применимо для произвольного r, $r \geqslant 2$.

3. Пусть задана убывающая последовательность $\Delta : \{\delta_i\}$, $\lim \delta_i = 0$, $i \to \infty$, все элементы которой положительны. Назовем моментом j-го сближения с некоторым преследователем такой момент, когда впервые E попадает в Q_{δ_j}-окрестность этого преследователя (способ выбора Δ будет обсуждаться в п. 4). Занумеруем преследователей следующим образом. Пусть к моменту t занумерованы k из них: $P_1, \ldots, P_k$. Присвоим номер $k+1$ тому из оставшихся $n-k$ преследователей, с которым впервые произойдет $k+1$-е сближение (если их несколько, то произвольно выбираем одного из них). Момент k-го сближения с P_k будем обозначать t_k. Число δ_1 выбирается так, что при $t = 0$ точка E находится вне внутренности Q_{δ_1}-окрестности каждого из преследователей. Заметим, что при такой нумерации некоторым преследователям номер вообще может быть не присвоен.

Перейдем к описанию стратегии игрока E. Для этого построим систему Q-образных множеств $M(t) : M_1(t), \ldots, M_{\alpha(t)}(t)$, где $\alpha(t)$ — число множеств M_i в момент t. Для краткости $M_{\alpha(t)}(t)$ будет обозначаться $M_\alpha(t)$. Движение игрока E при $t \geqslant t_1$ сводится к применению маневра убегания относительно $M_\alpha(t)$, причем, если $\alpha > 1$, целью E является выход на границу множества $[M_\alpha(t), M_{\alpha-1}(t)]$, а если $\alpha = 1$—выход на L. При $t < t_1$ точка E скользит по лучу L. В момент t_1 первого сближения $\alpha(t_1) = 1$, $M_1(t_1) = Q_{\delta_1}(P_1(t_1))$. При $t = t_2$ величина $\alpha(t_2) = 2$, $M_1(t_2) = G_{t_2-t_1}(M_1(t_1))$, $M_2(t_2) = Q_{\delta_2}(P_2(t_2))$. Пусть к моменту t построена система Q-образных множеств M, такая, что $E(t) \in \partial M_\alpha(t)$. Между моментами переключения (см. ниже) каждое из множеств $M_i(t)$ переходит за время Δt в $M_i(t + \Delta t) = G_{\Delta t}(M_i(t))$. Точка E движется в режиме маневра убегания от $M_\alpha(t)$ до момента переключения τ, когда либо E выйдет на границу $[M_\alpha(\tau), M_{\alpha-1}(\tau)]$, либо $\tau = t_{k+1}$, где k — число преследователей, занумерованных к моменту $\tau - 0$.

В первом случае систему $M(\tau-0)$ преобразуем в систему $M(\tau+0)$

$$(3.1)\qquad \begin{aligned}&\alpha(\tau+0)=\alpha(\tau-0)-1\\ &M_\alpha(\tau+0)=[M_\alpha(\tau-0),\ M_{\alpha-1}(\tau-0)]\\ &M_i(\tau+0)=M_i(\tau-0)=G_{\tau-t}(M_i(t))\\ &i=1,2,\ldots,\alpha(\tau-0)-2\end{aligned}$$

Во втором случае систему $M(\tau-0)$ преобразуем в систему $M(\tau+0)$

$$(3.2)\qquad \begin{aligned}&\alpha(\tau+0)=\alpha(\tau-0)+1,\quad M_\alpha(\tau+0)=Q_{\delta_{k+1}}(P_{k+1}(t_{k+1}))\\ &M_i(\tau+0)=M_i(\tau-0)=G_{\tau-t}(M_i(t)),\ i=1,2,\ldots,\alpha(\tau-0)\end{aligned}$$

Индекс $\alpha(t)$ изменяется от 0 до n, причем $\alpha(t)=0$ только при $t<t_1$. Будем говорить, что к моменту t произошло объединение игроков P_i, $P_{i+i}, \ldots, P_{j+i}$, если в системе $M(t)$ найдется множество $M_s(t)$, содержащее в себе области достижимости многогранников $Q_{\delta_i}(P_i(t_i)), \ldots$ $\ldots, Q_{\delta_{j+1}}(P_{j+i}(t_{j+i}))$. Отсюда следует, что игроки P_i, $P_{i+1}, \ldots, P_{i+j}$ остаются объединенными и на всем интервале $[t,\infty)$ и, более того, с точки зрения игрока E теряют свою индивидуальность и заменяются множеством $M_s(t)$ (индекс s зависит от t). Начиная с некоторого момента, $\alpha(t)$ становится равным единице, и все занумерованные преследователи оказываются объединенными в одно множество $M_1(t)$. Если на некотором интервале $[\tau, t_{k+1}]$ оказывается, что $E\in L$ и $\alpha(t)=1$, то при $t\geqslant t_{k+1}$ игрок E применяет описанную процедуру к оставшимся $n-k$ игрокам, считая P_{k+1} преследователя первым, P_{k+2} вторым и т. д., забывая о существовании $P_1, \ldots, P_k$. Описанная выше стратегия E, вообще говоря, не исключает возможности совпадения положения точки E и одного из преследователей.

Если последовательность Δ можно выбрать так, что число сближений с каждым преследователем будет конечно при любых действиях преследователей, то указанная стратегия обеспечивает E уклонение с последующим движением по L.

4. Построим последовательность Δ. В каждый момент времени разобьем систему $M(t)$ на два класса. К первому отнесем те из множеств $M_i(t)$, которые содержат в себе целиком область достижимости $Q_{\delta_k}(P_k(t_k))$. Ко второму — все оставшиеся. Если в соответствии со стратегией из п. 3 E огибает множества из первого класса, то расстояние от E до P_k остается заведомо не меньше δ_k. Определим величину $\varphi_k^-(n)$, равную суммарному времени, считая от t_{k+1}, затраченному E на маневр убегания от множеств из второго класса. Тогда расстояние от E до P_k на всем полуинтервале $[0,\infty)$ будет не меньше чем $\delta_k-\varphi_k^-(n)\,q_0$, где q_0 — наибольшая скорость сближения точки E с областью достижимости преследователя. Заметим, что q_0 не зависит от номера преследователя и что в качестве q_0 можно взять $q_0=\operatorname{diam}(Q)+\varepsilon$. Поэтому, если для некоторого натурального числа $R(k)$ имеем $\delta_k-\varphi_k^-(n)\,q_0>\delta_{R(k)}$, то число сближений E с P_k не превосходит $R(k)$. Следовательно, для того чтобы число сближений E с каждым из преследователей было конечно, достаточно, чтобы для каждого, k, $1\leqslant k\leqslant n-1$ нашлось такое натуральное число $R(k)$, $R(k)>k$,

чтобы выполнялись неравенства

(4.1) $$\delta_k - \varphi_k^-(n)\, q_0 > \delta_{R(k)}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1$$

Величина $\varphi_k^-(n)$ складывается из конечного числа временных интервалов и зависит как от порядка объединения преследователей, так и от моментов времени, в которые происходит объединение. В дальнейшем будем оперировать величиной $\varphi_k(n)$, оценивающей $\varphi_k^-(n)$ сверху и зависящей только от порядка объединения, т. е. от значений $\alpha(t_i)$ и от Δ.

Оценка $\varphi_k(n)$ получается из $\varphi_k^-(n)$ посредством трех «огрублений». Во-первых, время движения E по части траектории маневра убегания от всякого Q-образного множества с наибольшей стороной d заменяется на $c_0 d$ (см. (2.3)).

Во-вторых, если в момент t точка E вышла на $\partial[M_\alpha(t), M_{\alpha-1}(t)]$, то в дальнейших оценках $[M_\alpha(t), M_{\alpha-1}(t)]$ заменяется на $Q_\gamma(M_{\alpha-1}(t))$, где $\gamma = \operatorname{diam}(M_\alpha(t))$. В третьих, для подсчета наибольшей стороны $d(\theta)$ множества $G_\theta(D)$ воспользуемся соотношением $d(\theta+\Delta\theta) = d(\theta) + q\Delta\theta$.

Определим величину $\psi_k(n)$, равную значению $\varphi_k(n)$, если выполнено условие

(4.2) $$\alpha(t_{k+i}+0) = \alpha(t_{k+1}+0) + 1 \text{ при всех } i, \; n-k \geqslant i > 1$$

Условие (4.2) означает, что объединение преследователей происходит в следующей последовательности: сначала P_1 объединяется с P_2, далее с ними объединяется P_3, затем P_4 и т. д.

Ниже (см. лемму 1) величина $\psi_k(n)$ будет найдена в виде явной функции от Δ. Затем (см. лемму 2) будут установлены условия для Δ, при которых $\psi_k(n) \geqslant \varphi_k(n)$ для всех $\alpha(t)$. Если эти условия выполняются, то, заменяя неравенства (4.1) на более сильные

(4.3) $$\delta_k - \psi_k(n)\, q_0 > \delta_{R(k)}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1$$

и разрешая их относительно величин δ_i, сможем построить искомую последовательность Δ.

Лемма 1. Справедливо соотношение

(4.4) $$\psi_k(n) = c\Big\{\delta_{k+1}(1+\ldots+a^{n-k-1}) + \sum_{i=2}^{n-k}\delta_{k+i}(\omega(1+\ldots+a^{n-(k+i)}) + a^{n+1-(k+i)})\Big\}, \quad k=1,\ldots,n-1; \quad a = 1+c_0 q; \quad \omega = ac_1c_2$$

Доказательство. Пусть $\tau_1^-, \tau_2^-, \ldots$ — расстояния между последовательными моментами переключения, считая от t_{k+1}, а $\tau_1, \tau_2, \ldots$ — оценки этих расстояний, производимые тем же способом, что и для $\varphi_k(n)$. Если выполнено условие (4.2), то

$$t_{k+1} + \tau_1 = t_{k+2}, \quad t_{k+i} + \tau_{2i-2} + \tau_{2i-1} = t_{k+i+1}, \quad i = 2, \ldots, n-1-k$$

Таким образом, в этом случае τ_{2i} (τ_{2i+1}) — оценка времени τ_{2i}^- (τ_{2i+1}^-) маневра убегания от P_{k+i+1} (от объединения P_{k+i+1} с $P_{k+1}, \ldots, P_{k+i}$). Из определения величин c_0, c_1, c_2, c следует

(4.5) $$\tau_1 = c\delta_{k+1}, \quad \tau_{2i-2} = c\delta_{k+i}, \quad \tau_{2i-1} = c_0 d_{2i-2}, \quad i = 2, \ldots, n-k$$
$$d_{2i-2} = c_1(\delta_{k+1} + \omega(\delta_{k+2} + \ldots + \delta_{k+i}) + c_0 q(\tau_1 + \ldots + \tau_{2i-2}))$$

где $\omega\delta_{k+i}$ — оценка $\operatorname{diam}(G_{\tau_{2i-2}}(Q_{\delta_{k+i}}(P_{k+i}(t_{k+i}))))$, d_{2i-2} — оценка наибольшей стороны $M_{\alpha(t)}$ в момент $t = t_{k+1} + \tau_1^- + \ldots + \tau_{2i-2}^-$. Учитывая это, из рекуррентных соотношений (4.5) можно извлечь выражение (4.4) для $\psi_k(n)$.

Имеет место неравенство

$$\psi_k(n) > \psi_k(k+j) + \psi_{k+j}(n), \quad 2 \leqslant j \leqslant n-k-1 \tag{4.6}$$

Справедливость (4.6) можно установить прямой проверкой, воспользовавшись формулой (4.4) и тем, что $a > 1$, а Δ — убывающая последовательность.

Лемма 2. Можно так выбрать Δ, что при любых действиях преследователей

$$\psi_k(n) \geqslant \varphi_k(n) \tag{4.7}$$

Доказательство проведем индукцией по $n - k$.

При $n - k$, равном единице, двум, неравенство (4.7) непосредственно проверяется для любой последовательности Δ.

Допустим, что лемма справедлива при $n - k \leqslant f - 1$ и докажем ее при $n - k = f$. Рассмотрим два случая.

Сначала предположим, что найдется такое i, $1 \leqslant i \leqslant f$, что

$$\alpha(t_{k+i} + 0) = \alpha(t_{k+1} + 0) \tag{4.8}$$

Это означает, что произошло объединение P_k с P_{k+i-1} и поэтому $\varphi_k(n)$ распадается на сумму $\varphi_k(n) = \varphi_k(k + i - 1) + \varphi_{k+i-1}(n)$. Для каждого из слагаемых справедливо предположение индукции, следовательно, с учетом (4.6)

$$\varphi_k(n) \leqslant \psi_k(k + i - 1) + \psi_{k+i-1}(n) \leqslant \psi_k(n)$$

В предположении (4.8) неравенство (4.7) будет справедливо при всех Δ.

Перейдем к рассмотрению оставшегося, более сложного случая, когда

$$\alpha(t_{k+i} + 0) > \alpha(t_{k+1} + 0), \quad i = 2, \ldots, n-k$$
$$\alpha(t_{k+j} + 0) > \alpha(t_{k+1} + 0) + 1, \quad \exists j, \ 2 < j \leqslant n-k$$

Индекс j всегда можно выбрать так, что

$$\begin{aligned} &\alpha(t_{k+j} + 0) = \alpha(t_{k+j-1} + 0) + 1, \quad \alpha(t_{k+j} + 0) \geqslant \alpha(t_{k+j+1} + 0) \\ &\alpha(t_{k+i} + 0) = \alpha(t_{k+1} + 0) + 1, \quad i = 1, 2, \ldots, j-1 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Первое из неравенств (4.9) означает, что на интервале (t_{k+j-1}, t_{k+j}) не произошло ни одного объединения. Второе неравенство говорит о том, что на интервале (t_{k+j}, t_{k+j+1}) были объединены P_{k+j} и P_{k+j-1}.

Введем в рассмотрение фиктивную вспомогательную игру (элементы которой будем обозначать штрихом) с $n - 1$ преследователем и последовательностью Δ'

$$\delta_i' = \begin{cases} \delta_i, \quad i = 1, \ldots, k+1, \ldots, k+j-2 \\ (\delta_{k+j-1} + \delta_{k+j})\, a + \delta_{k+j-1} + \omega\delta_{k+j}, \quad i = k+j-1 \\ \delta_{i+1}, \quad i = k+j+1, \ldots, n-1 \end{cases}$$

Во вспомогательной игре игрок E' применяет стратегию из п.3 к игрокам P_i' и пусть их действия таковы, что системы $M(t)$ и $M'(t)$ совпадают при $t \leqslant t_{k+j-1}$, а при $t > t_{k+j-1}$ выполняются соотношения

$$\alpha'(t_i' + 0) = \alpha(t_{i+1} + 0); \quad i = k + j, \ldots, n - 1$$

Можно доказать, что выполняется важное неравенство

$$\varphi_k'(n - 1) > \varphi_k'(n) \tag{4.10}$$

Но к вспомогательной игре применимо предположение индукции, поэтому из (4.10) следует $\psi_k'(n - 1) > \varphi_k(n)$. Чтобы закончить доказательство, осталось указать такие Δ, что $\psi_k'(n - 1) \leqslant \psi_k(n)$ при $n - k \geqslant 3$. А для этого достаточно потребовать

$$\delta_{k+1} / \delta_{k+2} \geqslant g'(k + 1, n)$$

$$g'(k + 1, n) = a^{-1}(1 + \omega(a + 1)(a^{n-k-2} - 1)(a - 1)^{-1}a^{k+2-n})$$

Для выполнения неравенств (4.3) достаточно положить

$$\delta_k / \delta_{k+1} \geqslant g''(k, n), \quad k = 1, \ldots, n - 1 \tag{4.11}$$

$$g''(k, n) = 1 + cq_0\left\{1 + \frac{1}{a-1}\left(\left(\frac{\omega}{a-1} + 2\right)(a^{n-k} - a) - \omega(n - k - 1)\right)\right\}$$

Поэтому, если

$$\delta_k / \delta_{k+1} \geqslant g(k, n), \quad k = 2, \ldots, n - 1 \tag{4.12}$$

$$g(1, n) = g''(1, n); \quad g(n - 1, n) = g''(n - 1, n) = 1 + cq_0$$

$$g(k, n) = \max(g'(k, n), \; g''(k, n)), \quad k = 2, 3, \ldots, n - 2$$

то справедливы одновременно соотношения (4.1) и (4.3). Более того, (4.11) обеспечивает выполнение (4.3) с $R(k) = k + 1$, т. е.

$$\delta_k - \psi_k(n)\, q_0 > \delta_{k+1}; \quad k = 1, \ldots, n - 1, n \tag{4.13}$$

а это означает, что нумерация преследователей не изменится, если присваивать номер k тому из них, с которым впервые произошло k-е сближение. Из (4.13) также следует, что для минимального расстояния δ_0 справедлива оценка $\delta_0 > \delta_n$.

Величины $g(k, n)$ в формулах (4.12) зависят от Q, ε и $n - k$.

Приведем в качестве примера значения входящих в эти формулы параметров, когда Q — квадрат со стороной единица и центром симметрии в нуле. В этом случае

$$q = 1, \; q_0 = 1 + \varepsilon, \; c_0 = a - 1, \; c_1 = 2, \; c_2 = 2$$

$$c = 2\,(a - 1), \; a = (1 + \varepsilon^{-1})^4, \; \omega = 4a$$

Оценим время T, проведенное точкой E вне L. Сначала рассмотрим случай, когда траектория E не содержит отрезков луча L, на которых $\alpha(t) = 1$. Определим вспомогательную игру с $n + 1$ преследователем (ее элементы обозначаются двумя штрихами) так, что

$\delta_1'' = \delta_2 g(1, n + 1)$, $\delta_{i+1}'' = \delta_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Так, определенная Δ'' удовлетворяет (4.12), поэтому справедливо неравенство (4.13), т. е. $\delta_1'' - q_0\psi_1''(n + 1) \geqslant \delta_2''$. Следовательно

$$\psi_1(n + 1) \leqslant (\delta_1'' - \delta_2'') / q_0 = \delta_1(g(1, n + 1) - 1)\, q_0^{-1}$$

Но T не превосходит $\psi_1(n + 1)$, поэтому

$$T \leqslant \delta_1(g(1, n + 1) - 1) / q_0 \tag{4.14}$$

Если траектория E содержит N участков L, на которых $\alpha = 1$, то T можно представить в виде суммы $T = T_1 + T_2 + \ldots + T_N$, где T_{i+1} — значение T между i-м и $i + 1$-м участками. Для каждого из T_i справедлива оценка типа (4.14). Видно, что она остается справедливой и для их суммы.

Оценим расстояние $\rho(t)$ между E и точкой, совершающей номинальное движение. Можно убедиться, что

$$\rho(t) \leqslant q_0 T \leqslant \delta_1 (g(1,\ n+1) - 1)$$

$$g(1, n+1) = 1 + cq_0 \left\{1 + \frac{1}{a-1} \left(\left(\frac{\omega}{a-1} + 2\right)(a^n - a) - \omega(n-1)\right)\right\}$$

Таким образом, если выбрать $\delta_1 \leqslant \varepsilon_0 / (g(1,\ n+1) - 1)$, то точка E остается в ε_0-окрестности номинального движения.

Заметим, что всякую систему дифференциальных уравнений $y^{\cdot} = A(t)\, y + B(t)\, v$, $v \in V_0$, где $A(t)$, $B(t)$ — матрицы соответствующей размерности, можно привести к виду $\xi^{\cdot} = v$, $v(t) \in V(t)$. Здесь ξ—полный набор независимых первых интегралов системы $y^{\cdot} = A(t)\, y$, а множество допустимых управлений $V(t)$ зависит от V_0 и матриц $A(t)$, $B(t)$. Можно показать, что все результаты остаются в силе для уравнений (1.1), в которых множества U_i, V зависят от времени, если вместо (1.2) потребовать вложения

$$\bigcup_{t>0} U_i(t) \subset \operatorname{int} \bigcap^{t>0} V(t); \quad i = 1, \ldots, n$$

Автор благодарит Ф. Л. Черноусько за постановку задачи и внимание к работе.

Поступила 23 VI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черноусько Ф. Л.* Одна задача уклонения от многих преследователей. ПММ, 1976, т. 40, вып. 1.
2. *Гусятников П. Б.* Трехмерная задача убегания от многих преследователей. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1976, № 5.
3. *Мищенко Е. Ф., Никольский М. С., Сатимов Н.* Задача уклонения от встречи в дифференциальных играх многих лиц. Тр. матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова, 1977, т. 143.
4. *Пшеничный Б. Н.* Простое преследование несколькими объектами. Кибернетика, 1976, № 3.
5. *Чикрий А. А.* Линейная задача убегания от нескольких преследователей. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1976, № 4.
6. *Александров А. Д.* Выпуклые многогранники. М.— Л. Гостехиздат, 1950.