Прикладная математика и механика. Том 43, 1979

УДК 62—50

КВАЗИЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА СБЛИЖЕНИЯ С УЧАСТИЕМ НЕСКОЛЬКИХ ЛИЦ

А. А. Чикрий

(Киев)

Рассматривается игровая задача сближения собственно линейной системы с терминальным множеством сложной структуры, представляющим собой объединение конечного числа выпуклых множеств. Эта задача, в частности, включает в себя задачу преследования убегающего несколькими управляемыми объектами. Получено два типа достаточных условий разрешимости задачи сближения. Работа примыкает к исследованиям [1-4].

Движение объекта в конечномерном евклидовом пространстве E^n описывается уравнением

$$z^{\cdot} = Az + \varphi(u, v), \quad u \in U, \quad v \in V \tag{1}$$

где A — квадратная матрица размером $n \times n$, $\varphi(u, v)$ — непрерывная по совокупности аргументов функция, U и V — компакты из E^n. Терминальное множество M — объединение множеств $M_1^*, \ldots, M_\nu^*$, где каждое из M_i^* представляется в виде $M_i^* = M_i^\circ + M_i$; M_i° — линейные подпространства из E^n, а M_i — выпуклые замкнутые множества, принадлежащие ортогональным дополнениям к M_i° в E^n.

Задача состоит в нахождении условий на параметры игры (1), которые обеспечивают сближение системы (1) из заданного начального положения с терминальным множеством M (окончание игры (1)) за конечное время.

Будем говорить, что игра (1) при $z(0) = z_0$ может быть закончена за конечное время, если существует такое число $T(z_0)$ и можно построить по текущему состоянию $z(t)$ и $v(t)$ измеримую функцию $u(t)$, $u(t) \in U$, $0 \leqslant t \leqslant T(z_0)$, где $v(t)$ — произвольная кусочно-непрерывная функция со значениями из V, что для соответствующих траекторий имеет место включение $z(t_1) \in M$, где $t_1 \leqslant T(z_0)$ [2].

Обозначим через L_i ортогональное дополнение к M_i° в E^n, а через π_i — оператор ортогонального проектирования из E^n на L_i. Тогда включение $z(t) \in M$ эквивалентно существованию номера i, такого, что $\pi_i z(t) \in M_i$.

Опорная функция множества M_i^* имеет вид

$$W_{M_i^*}(\psi) = \begin{cases} \sup\limits_{z \in M_i} (z, \psi), & \psi \in L_i \\ \infty, & \psi \overline{\in} L_i \end{cases}$$

Будем предполагать, что множества $K(M_i) = \{\psi : \psi \in L_i, W_{M_i}(\psi) < \infty\}$ непусты и замкнуты, а функции $W_{M_i}(\psi)$ непрерывны на $K(M_i)$.

$i = 1, \ldots, \nu$. Будем также предполагать, что множество $\varphi(U, v)$ выпукло для любого $v \in V$.

Пусть $N_i(q)$, $i = 1, \ldots, \nu$ — непрерывные ограниченные выпуклозначные отображения со значениями в 2^{E^n}, определенные на некотором компакте Q, X_i — выпуклые замкнутые множества из L_i, причем функции $W_{X_i}(\psi)$ непрерывны на $K(X_i)$. Обозначим

$$\lambda_i(q) = \min_{\|\psi\|=1, \psi \in L_i} [W_{N_i(q)}(\psi) + W_{X_i}(-\psi)]$$

Видно, что минимум по ψ достигается на элементах, принадлежащих множеству $-K(X_i)$.

Лемма 1. Для того чтобы существовал элемент $q^* \in Q$, такой, что

$$\bigcap_{i=1}^{\nu} (N_i(q^*) \cap X_i) = \phi$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\min_{q \in Q} \max_{i=1,\ldots,\nu} \lambda_i(q) < 0$$

Доказательство следует из теоремы 1.1 [2].

Образуем множества

$$\Psi = \{\psi : \psi = (\psi_1, \ldots, \psi_\nu), \|\psi_i\| = 1, \psi_i \in L_i\}$$

$$H = \left\{\alpha : \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu), \alpha_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i = 1, \alpha_i \in E^1\right\}$$

и рассмотрим множество достижимости системы (1) за время t при фиксированном управлении $v(\cdot)$из начального положения z

$$D(t, z, v(\cdot)) = \Phi(t) z + \int_0^t \Phi(t-\tau)\varphi(U, v(\tau))\, d\tau$$

$$\Phi^{\cdot}(t) = A\Phi(t), \quad \Phi(0) = I$$

По поводу интегрирования выпуклых множеств см. [4].

Множество $D(t, z, v(\cdot))$ выпукло и замкнуто.

Спроектировав множество $D(t, z, v(\cdot))$ на подпространство L_i и вычислив опорную функцию полученного множества, введем в рассмотрение следующие функции:

$$\lambda_i(t, z, v(\cdot)) = \min_{\|\psi_i\|=1} [W_{D(t, z, v(\cdot))}(\psi_i) + W_{M_i}(-\psi_i)], \quad i = 1, \ldots, \nu$$

$$\lambda(t, z) = \min_{v(\cdot)} \max_{i=1,\ldots,\nu} \lambda_i(t, z, v(\cdot))$$

Видно, что $z \in M$ тогда и только тогда, когда $\lambda(0, z) < 0$.

Положим для $\psi \in \Psi$, $\alpha \in H$

$$W(t, z, \alpha, \psi) = \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i (\Phi^*(t)\psi_i, z) +$$

$$+ \int_0^t \min_{v \in V} \max_{u \in U} \sum_{i=1}^{\nu} (\alpha_i \Phi^*(\tau)\psi_i, \varphi(u, v))\, d\tau$$

$$\mu(t, z, \alpha, \psi) = W(t, z, \alpha, \psi) + \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i W_{M_i}(-\psi_i)$$

$$\lambda^*(t, z) = \min_{\psi\in\Psi}\max_{\alpha\in H} \mu(t, z, \alpha, \psi), \quad \lambda_*(t, z) = \max_{\alpha\in H}\min_{\psi\in\Psi} \mu(t, z, \alpha, \psi)$$

Обозначим

$$\Psi' = \{\psi : \psi = (\psi_1, \ldots, \psi_\nu),\ \|\psi_i\| \leqslant 1,\ \psi_i \in L_i\}$$

Пусть

$$\min_{\psi\in\Psi}\max_{\alpha\in H} \mu(t, z, \alpha, \psi) = \min_{\psi\in\Psi'}\max_{\alpha\in H} \mu(t, z, \alpha, \psi) \tag{2}$$

Лемма 2. Имеет место неравенство

$$\lambda(t, z) \geqslant \lambda_*(t, z), \quad t \geqslant 0, \ z \in E^n$$

Если выполнено равенство (2), то

$$\lambda(t, z) \geqslant \lambda^*(t, z), \quad t \geqslant 0, \quad z \in E^n \tag{3}$$

Доказательство. Если $\lambda_1, \ldots, \lambda_\nu$ — некоторые числа, то справедливо равенство

$$\max_{\alpha\in H} \sum_{j=1}^{\nu} \alpha_i\lambda_i = \max_{i=1,\ldots,\nu} \lambda_i \tag{4}$$

Тогда, применяя теорему о минимаксе [5], неравенство, связывающее минимакс с максимином, и используя (2), получим

$$\lambda(t, z) = \min_{v(\cdot)}\max_{\alpha\in H} \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i\lambda_i(t, z, v(\cdot)) \geqslant \min_{\psi\in\Psi'}\min_{v(\cdot)}\max_{\alpha\in H} \sum_{i=1}^{\nu} (\alpha_i W_{D(t, z, v(\cdot))}(\psi_i) +$$

$$+ \alpha_i W_{M_i}(-\psi_i)) \geqslant \min_{\psi\in\Psi}\max_{\alpha\in H} \mu(t, z, \alpha, \psi) = \lambda^*(t, z)$$

Положим

$$W(t, z, \psi_i) = (\Phi^*(t)\psi_i, z) + \int_0^t \min_{v\in V}\max_{u\in U} (\Phi^*(\tau)\psi_i, \varphi(u, v))\, d\tau$$

$$\lambda_i(t, z) = \min_{\|\psi_i\|=1} [W(t, z, \psi_i) + W_{M_i}(-\psi_i)], \quad \psi_i \in L_i, \quad i = 1, \ldots, \nu$$

Аналогичная функция вводилась в работе [2].

Пусть

$$\max_{u\in U} \sum_{i=1}^{\nu} (\alpha_i\Phi^*(t)\psi_i, \varphi(u, v)) = \tag{5}$$

$$= \sum_{i=1}^{\nu} \max_{u\in U} (\alpha_i\Phi^*(t)\psi_i, \varphi(u, v)), \quad t \geqslant 0, \quad \alpha \in H, \quad \psi \in \Psi, \quad v \in V$$

Лемма 3. Пусть выполнено равенство (5). Тогда

$$\lambda_*(t, z) \geqslant \max_{i=1,\ldots,\nu} \lambda_i(t, z), \quad t \geqslant 0, \quad z \in E^n \tag{6}$$

Доказательство. Поскольку

$$\min_{v\in V} \sum_{i=1}^{\nu} \max_{u\in U} (\alpha_i\Phi^*(\tau)\psi_i, \varphi(u, v)) \geqslant \sum_{i=1}^{\nu} \min_{v\in V}\max_{u\in U} (\alpha_i\Phi^*(\tau)\psi_i, \varphi(u, v))$$

то из (5) имеем в силу равенства (4)

$$\mu(t, z, \alpha, \psi) \geqslant \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i [W(t, z, \psi_i) + W_{M_i}(-\psi_i)]$$

$$\lambda_*(t, z) \geqslant \max_{\alpha \in H} \min_{\psi \in \Psi} \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i [W(t, z, \psi_i) + W_{M_i}(-\psi_i)] = \max_{i=1,\ldots,\nu} \lambda_i(t, z)$$

Определим функции $T^*(z)$ и $T_*(z)$ следующим образом: функция $T^*(z)$ ($T_*(z)$) равна точной нижней грани корней уравнения $\lambda^*(t, z) = 0$ ($\lambda_*(t, z) = 0$), $t \geqslant 0$. Если корней уравнения нет, то положим $T^*(z)$ соответственно $T_*(z)$, равной $+\infty$. Видно, что $T^*(z) \leqslant T_*(z)$.

Следующая лемма раскрывает содержательный смысл функции $T^*(z)$.

Лемма 4. Пусть $T^*(z^\circ) < +\infty$ и выполнено равенство (2). Тогда для любой измеримой функции $v(t) \in V$, $0 \leqslant t \leqslant T^*(z^\circ)$ существует измеримая функция $u(t) \in U$, такая, что $z(T^*(z^\circ)) \in M$.

Доказательство следует из лемм 1 и 2.

В дальнейшем будут приведены два типа достаточных условий, обеспечивающих окончание игры (1) за время $T^*(z)$. Аналогичные условия могут быть получены и для времени $T_*(z)$.

Рассмотрим многозначные отображения

$$H(t, z, \psi) = \{\alpha: \mu(t, z, \alpha, \psi) = \max_{\alpha \in H} \mu(t, z, \alpha, \psi)\}$$

$$\Psi(t, z) = \{\psi: \max_{\alpha \in H} \mu(t, z, \alpha, \psi) = \lambda^*(t, z)\}$$

и введем функцию

$$\beta(t, \psi, \alpha, u, v) = \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i (\Phi^*(t)\psi_i, \varphi(u, v)) -$$

$$- \min_{v \in V} \max_{u \in U} \sum_{i=1}^{\nu} (\alpha_i \Phi^*(t)\psi_i, \varphi(u, v))$$

В дальнейшем предполагаем отображение $H(t, z, \psi)$ непрерывным по ψ на множестве $\Psi(t, z)$ при фиксированных (t, z). Предполагается выполненным второе неравенство из леммы 2.

Теорема 1. Пусть во всякой точке z, для которой $0 < T^*(z) < \infty$, выполнены условия

а) $\min_{v \in V} \max_{u \in U} \sum_{i=1}^{\nu} (\alpha_i \Phi^*(T^*(z))\psi_i, \varphi(u, v)) > 0$

$\forall \psi \in \Psi(T^*(z), z)$, $\alpha \in H(T^*(z), z, \psi)$;

б) для каждого v° существует такое u°, что

$\beta(T^*(z), \psi, \alpha, u^\circ, v^\circ), \geqslant 0$

$\forall \psi \in \Psi(T^*(z), z)$, $\alpha \in H(T^*(z), z, \psi)$

Тогда игра (1), начинающаяся из точки z_0, $T^*(z_0) < \infty$, может быть закончена за время, не большее $T^*(z_0) + \varepsilon$, где ε — произвольное положительное число.

Теорема 2. Пусть во всякой точке z^1, для которой $0 < T^*(z^1) < \infty$, выполнены условия а) множество $\Psi(t, z)$ состоит из единственного вектора $\psi(t, z)$ для всех t и z из некоторой окрестности $\{T^*(z^1), z^1\}$;

б) множество $H(t, z, \psi(t, z))$ состоит из единственного элемента $\alpha(t, z)$ для всех t и z из указанной окрестности;

в) максимум выражения

$$\sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i(t, z)(\Phi^*(t)\psi_i(t, z), \varphi(u, v))$$

по u достигается на единственном векторе $u(t, z, v)$ при всех t и z из указанной окрестности и $v \in V$.

Тогда игра (1) может быть закончена за время, не превосходящее $T^*(z_0)$, где z_0 — начальное положение игры (1), какое бы кусочно-непрерывное управление $v(t)$ ни применял противник.

Замечание. Теорема 2 верна и без предположения б), но тогда условие в) должно быть выполнено с некоторым $\alpha \in H(T^*(z^1), z^1, \psi(T^*(z^1), z^1))$.

Доказательство теорем 1 и 2 проводится методами, предложенными в работе [2] аналогично [6].

Представляет интерес случай, когда соотношение (6) выполняется как строгое неравенство. Следующий пример задачи преследования иллюстрирует эту ситуацию.

Пример. Движение преследователей и убегающего описывается уравнениями

$$x_i^{\cdot} = u_i, \ \|u_i\| \leqslant a, \ i = 1,2, \quad x_i \in E^n, \ n \geqslant 2$$

$$y^{\cdot} = v, \quad \|v\| \leqslant 1, \ a > 1, \quad y \in E^n$$

Преследование заканчивается в тот момент времени, когда выполнено одно из равенств $\|x_i(t) - y(t)\| \leqslant \varepsilon$, $i = 1,2$.

Предположив, что начальные положения игроков удовлетворяют условиям

$$\|x_1^\circ - y^\circ\| = \|x_2^\circ - y^\circ\|, \quad \varepsilon > {}^1/_2\|x_1^\circ - x_2^\circ\|, \quad \frac{x_1^\circ - y^\circ}{\|x_1^\circ - y^\circ\|} \neq \frac{x_2^\circ - y^\circ}{\|x_2^\circ - y^\circ\|}$$

и проводя соответствующие выкладки, получим неравенство

$$\lambda_*(t, z^\circ) > \lambda_1(t, z^\circ) = \lambda_2(t, z^\circ), \quad z^\circ = (x_1^\circ, x_2^\circ, y^\circ)$$

и следовательно

$$T^*(z^\circ) < \frac{\|x_i^\circ - y^\circ\| - \varepsilon}{a - 1}, \quad i = 1, 2$$

В данном примере выполнены условия б), в) теоремы 2, а условие а) выполнено для начальных положений и всех текущих положений, возникающих в данной игре, если управление u выбирается из условия в) теоремы 2.

Поступила 24 II 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М., «Наука», 1974.
2. *Пшеничный Б. Н.* Линейные дифференциальные игры. Автоматика и телемеханика, 1968, № 1.
3. *Тарлинский С. И.* Об одной линейной дифференциальной игре сближения нескольких управляемых объектов. Докл. АН СССР, 1976, т. 230, № 3.
4. *Понтрягин Л. С.* О линейных дифференциальных играх, 2. Докл. АН СССР, 1967, т. 175, № 4.
5. *Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н.* Введение в минимакс. М., «Наука», 1972.
6. *Чикрий А. А., Раппопорт И. С.* Линейная задача преследования несколькими управляемыми объектами. Кибернетика, 1978, № 3.