Прикладная математика и механика. Том 43, 1979

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

В. И. Воротников

(Нижний Тагил)

Рассматривается задача об устойчивости движения относительно части переменных [1,2]. Метод решения этой задачи, предложенный в работе [3] для линейных стационарных систем, распространяется на решение нелинейных задач. Такой подход позволяет получить критерии устойчивости и неустойчивости движения относительно части перменных по линейному приближению в тех случаях, когда известные результаты работ [4,5] неприменимы, а также дает способ решения поставленной здесь задачи об абсолютной устойчивости движения относительно части переменных для нелинейных регулируемых систем. Приводятся примеры нелинейных систем, показывающие, что область устойчивости отдельно заданных координат может быть шире области устойчивости всех координат, характеризующих состояние системы.

1. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений возмущенного движения

$$dx_i/dt = X_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n \tag{1.1}$$

Будем заниматься вопросом об устойчивости невозмущенного движения $x_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ по отношению к $x_1, \ldots, x_m$ $(m > 0,\ n = m + p,\ p > 0)$. Обозначим эти переменные через $y_i = x_i$ $(i = 1, \ldots, m)$, остальные — через $z_j = x_{m+j}$ $(j = 1, \ldots, p)$ [1,2]. Пусть функции X_i представляют собой степенные ряды, расположенные по степеням y_i $(i = 1, \ldots, m)$ и z_j $(j = 1, \ldots, p)$, сходящиеся в области

$$|y_i| \leqslant h, \quad i = 1, \ldots, m; \quad |z_j| \leqslant H < \infty, \quad j = 1, \ldots, p \tag{1.2}$$

где h и H — некоторые постоянные.

Теперь уравнения возмущенного движения (1.1) имеют вид

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} y_k + \sum_{l=1}^{p} b_{il} z_l + Y_i(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_p), \quad i = 1, \ldots, m \tag{1.3}$$

$$\frac{dz_j}{dt} = \sum_{k=1}^{m} c_{jk} y_k + \sum_{l=1}^{p} d_{jl} z_l + Z_j(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_p), \quad j = 1, \ldots, p$$

Здесь a_{ik}, b_{il}, c_{jk}, d_{jl} — постоянные, Y_i и Z_j — функции переменных $y_1, \ldots, y_m$, $z_1, \ldots, z_p$, которые разлагаются в области (1.2) в ряды по степеням этих переменных, причем разложения начинаются членами не ниже второго порядка. Переменные $z_1, \ldots, z_p$ всегда ограничены; это предположение является исходным предположением при исследовании системы (1.3) во всех рассмотренных в п. 2,3 случаях.

Введем обозначения

$$A = \{a_{ik}\}, \quad B = \{b_{il}\}, \quad C = \{c_{jk}\}, \quad D = \{d_{jl}\}$$

Тогда уравнения линейного приближения системы (1.3) будут представлены в виде

$$\mathbf{y}^{\cdot} = A\mathbf{y} + B\mathbf{z}, \quad \mathbf{z}^{\cdot} = C\mathbf{y} + D\mathbf{z} \tag{1.4}$$

$$\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m), \quad \mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_p)$$

Рассмотрим матрицу $K = (B', D'B', \ldots, D'^{p-1}B')$, где B', D' — транспонированные матрицы B и D. Пусть ранг матрицы K равен N. В работе [3] показано, что вопрос об устойчивости невозмущенного движения системы (1.4) относительно переменных $y_1, \ldots, y_m$ эквивалентен вопросу об устойчивости невозмущенного движения специально построенной системы порядка $(m + N)$, $N \leqslant p$

$$\mathbf{y}^{\cdot} = A\mathbf{y} + B_1\boldsymbol{\mu}, \quad \boldsymbol{\mu}^{\cdot} = C_1\mathbf{y} + D_1\boldsymbol{\mu}$$

где $\boldsymbol{\mu} = L\mathbf{z}$ — матрица, строки которой — линейно-независимые столбцы матрицы K; B_1, C_1, D_1 — постоянные матрицы соответствующих размерностей.

Отсюда видно, что вопрос об устойчивости невозмущенного движения системы (1.3) по отношению к части переменных $y_1, \ldots, y_m$ по линейному приближению может быть рассмотрен в следующем классе систем (будем оставаться в рамках принятых обозначений и по-прежнему считаем, что переменные $y_1, \ldots, y_m$ — те переменные, относительно которых изучается устойчивость невозмущенного движения):

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}y_k + Y_i(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_p), \quad i = 1, \ldots, m \tag{1.5}$$

$$\frac{dz_j}{dt} = \sum_{k=1}^{m} c_{jk}y_k + \sum_{l=1}^{p} d_{jl}z_l + Z_j(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_p), \quad j = 1, \ldots, p$$

В работе [4] получен критерий асимптотической устойчивости невозмущенного движения системы (1.5) относительно $y_1, \ldots, y_m$ по линейному приближению. В работе [5] получен критерий неустойчивости и рассмотрен критический случай одного нулевого корня. Указанные результаты получены при следующих трех ограничениях:

1) $\quad Y_i(0, \ldots, 0, z_1, \ldots, z_p) \equiv 0, \quad i = 1, \ldots, m$

2) $\quad |Y_i(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_p)| \leqslant \sum\limits_{j=1}^{m} h_{ij}|y_j|, \quad i = 1, \ldots, m$

где h_{ij} — достаточно малые положительные постоянные (при сделанных предположениях относительно функций Y_i условие 2 предполагает отсутствие у функций Y_i членов, линейных относительно $y_1, \ldots, y_m$);

3) переменные $z_1, \ldots, z_p$ системы (1.5) всегда ограничены, т. е. $|z_j| \leqslant H < \infty$, $j = 1, \ldots, p$.

В данной статье для частных случаев системы (1.5) получены критерии устойчивости и неустойчивости невозмущенного движения относительно переменных $y_1, \ldots, y_m$ по линейному приближению, которые не предполагают ограничений 1 и 2 на функции $Y_i(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_p)$.

2. Пусть уравнения возмущенного движения (1.3) имеют вид

$$
\frac{dy_i}{dt} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} y_k + \sum_{l=1}^{p} b_{il} z_l + Y_i(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_p), \qquad i = 1, \ldots, m \tag{2.1}
$$

$$
\frac{dz_j}{dt} = \sum_{l=1}^{p} d_{jl} z_l
$$

Допустим, что

$$
Y_i(0, \ldots, 0, z_1, \ldots, z_p) = Y_i^\circ(z_1, \ldots, z_p) = \tag{2.2}
$$

$$
= U_2^i(z_1, \ldots, z_p) + \ldots + U_r^i(z_1, \ldots, z_p), \qquad i = 1, \ldots, m
$$

где $U_l^i(z_1, \ldots, z_p)$ — однородная форма переменных $z_1, \ldots, z_p$ порядка l, $l \leqslant r$, r — конечное число.

Выделим из функций $Y_i(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_p)$ члены, линейные относительно $y_1, \ldots, y_m$. Будем считать, что

$$
Y_i^*(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_p) = \sum_{j=1}^{m} y_j \overline{Y}_{ij}^*(z_1, \ldots, z_p) \tag{2.3}
$$

$$
(\overline{Y}_{ij}^*(z_1, \ldots, z_p) = \overline{U}_1^{ij}(z_1, \ldots, z_p) + \ldots + \overline{U}_s^{ij}(z_1, \ldots, z_p))
$$

Здесь U_l^{ij} — форма того же вида, что и $U_l^i(z_1, \ldots, z_p)$, $l \leqslant s$; s — конечное число.

Таким образом, функции $Y_i(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_p)$ в системе (2.1) имеют вид

$$
Y_i(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_p) = Y_i^\circ(z_1, \ldots, z_p) + \sum_{j=1}^{m} y_j \overline{Y}_{ij}^*(z_1, \ldots, z_p) + \tag{2.4}
$$

$$
+ Y_i^{**}(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_p), \qquad i = 1, \ldots, m
$$

где $Y_i^{**}(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_p)$ удовлетворяют условиям 1 и 2, а функции $Y_i^\circ(z_1, \ldots, z_p)$, $\overline{Y}_{ij}^*(z_1, \ldots, z_p)$ удовлетворяют условиям (2.2) и (2.3).

Покажем, что вопрос об устойчивости невозмущенного движения системы (2.1) относительно $y_1, \ldots, y_m$ по линейному приближению можно свести к вопросу об устойчивости по линейному приближению специально выбранной системы, для которой выполняются условия работ [4,5]. Для этого в качестве системы первого приближения для уравнений (2.1) возьмем следующие уравнения:

$$
\frac{dy_i}{dt} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} y_k + \sum_{l=1}^{p} b_{il} z_l + Y_i^\circ(z_1, \ldots, z_p) + \tag{2.5}
$$

$$
+ \sum_{j=1}^{m} y_j \overline{Y}_{ij}^*(z_1, \ldots, z_p), \qquad i = 1, \ldots, m
$$

$$
\frac{dz_j}{dt} = \sum_{l=1}^{p} d_{jl} z_l, \qquad j = 1, \ldots, p
$$

Введем новые переменные

$$\mu_i^{(1)} = \sum_{l=1}^{p} b_{il} z_l + U_2{}^i(z_1, \ldots, z_p) + \ldots + U_r{}^i(z_1, \ldots, z_p) \tag{2.6}$$

$$\mu_{ij}^{(2)} = \bar U_1^{(ij)}(z_1, \ldots, z_p) + \ldots + \bar U_s^{(ij)}(z_1, \ldots, z_p); \quad i, j = 1, \ldots, m$$

Так как $U_l{}^i$ и $\bar U_l{}^{ij}$ — однородные формы переменных $z_1, \ldots, z_p$ порядка l, то их можно представить в следующем виде:

$$U_l{}^i = \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_p=l} q_i^{\alpha_1\ldots\alpha_p} z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \ldots z_p^{\alpha_p}$$

$$U_l{}^{ij} = \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_p=l} \bar q_{ij}^{\alpha_1\ldots\alpha_p} z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \ldots z_p^{\alpha_p}$$

Определение. Два набора чисел $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ и $(\alpha'_1, \ldots, \alpha_p')$ будем называть различными, если $\alpha_i \neq \alpha_i'$ хотя бы для одного i.

Пусть N_l — число различных наборов $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$, таких, что $\alpha_1 + \ldots + \alpha_p = l$. Тогда форме $\bar U_l{}^i$ поставим в соответствие вектор $(q_{il}{}^1, q_{il}{}^2, \ldots, q_{il}{}^{N_l})$, т. е. новой переменной $\mu_i{}^{(1)}$ поставим в соответствие вектор $\mathbf{Q}_i{}^{(1)}$

$$\mu_i{}^{(1)} \to \mathbf{Q}_i{}^{(1)} =$$
$$= (b_{i1}, \ldots, b_{ip}, q_{i1}{}^{11}, \ldots, q_{i1}{}^{1N_1}, \ldots, q_{ir}{}^{11}, \ldots, q_{ir}{}^{1N_r})$$

Аналогично новой переменной $\mu_{ij}{}^{(2)}$ поставим в соответствие вектор $\mathbf{Q}_{ij}{}^{(2)}$

$$\mu_{ij}{}^{(2)} \to \mathbf{Q}_{ij}{}^{(2)} = (q_{ij1}{}^{21}, \ldots, q_{ij1}^{2N_1}, \ldots, q_{ijs}{}^{21}, \ldots, q_{ijs}{}^{2N_s})$$

Будем считать, что векторы $\mathbf{Q}_i{}^{(1)}$ и векторы $\mathbf{Q}_{ij}{}^{(2)}$ линейно-независимые (в противном случае рассмотрим линейно-независимые из них).

При таком введении новых переменных возможны два случая.

Первый случай. Система (2.5) приводится к виду

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} y_k + \mu_i^{(1)} + \sum_{j=1}^{m} y_i \mu_{ij}^{(2)} \tag{2.7}$$

$$\frac{d\mu_j^{(1)}}{dt} = \sum_{l=1}^{m} L_{jl}^{(1)} \mu_l^{(1)} + \sum_{l,\varepsilon=1}^{m} \bar L_{jl\varepsilon}^{(1)} \mu_{l\varepsilon}^{(2)}$$

$$\frac{d\mu_{\nu\gamma}^{(2)}}{dt} = \sum_{l=1}^{m} L_{\nu\gamma l}^{(2)} \mu_l^{(1)} + \sum_{l,\varepsilon=1}^{m} \bar L_{\nu\gamma l\varepsilon}^{(2)} \mu_{l\varepsilon}^{(2)}, \qquad i, j, \nu, \gamma = 1, \ldots, m$$

Систему (2.7) в дальнейшем будем называть системой μ-вида исходной системы (2.5). Очевидно, что поведение переменных, характеризующих систему (2.7), полностью описывает поведение переменных $y_1, \ldots, y_m$ системы (2.5).

Второй случай. Система (2.5) не приводится к системе μ-вида, т. е. выглядит так:

$$(2.8)\qquad \begin{aligned} &\frac{dy_i}{dt} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}y_k + \mu_i^{(1)} + \sum_{j=1}^{m} y_j\mu_{ij}^{(2)} \\ &\frac{d\mu_j^{(1)}}{dt} = U_1^{j*}(z_1, \ldots, z_p) + \ldots + U_r^{j*}(z_1, \ldots, z_p) \\ &\frac{d\mu_{\nu\gamma}}{dt} = \overline{U}_2^{\nu\gamma*}(z_1, \ldots, z_p) + \ldots + \overline{U}_s^{\nu\gamma*}(z_1,\ldots, z_p); \qquad i, j, \nu, \gamma = 1,\ldots, m \\ &\frac{dz_\theta}{dt} = \sum_{l=1}^{p} d_{\theta l}z_p, \qquad \theta = 1, \ldots, p \end{aligned}$$

Тогда еще раз введем новые переменные

$$(2.9)\qquad \begin{aligned} &\overline{\mu}_i^{(1)} = U_1^{j*}(z_1, \ldots, z_p) + \ldots + U_r^{j*}(z_1, \ldots, z_p) \\ &\overline{\mu}_{\vartheta\gamma}^{(2)} = U_2^{\vartheta\gamma*}(z_1, \ldots, z_p) + \ldots + U_s^{\vartheta\gamma*}(z_1, \ldots z_p) \\ &i, \vartheta, \gamma = 1, \ldots, m \end{aligned}$$

причем выбираем только те из переменных (2.9), соответствующие векторы $\overline{Q}_j^{(1)}$ и $Q_{\vartheta\gamma}^{(2)}$ которых не могут быть представлены через $Q_i^{(1)}$ и $Q_{ij}^{(2)}$ $(i, j = 1, \ldots, m)$. Можно показать, что, продолжая эту процедуру, на конечном шаге повторения рассуждений систему (2.5) всегда можно привести к системе μ-вида. Действительно, это всегда можно сделать, введя такое количество переменных (2.6), (2.9) . . ., что соответствующие линейно-независимые векторы $Q_i^{(1)}$, $\overline{Q}_j^{(1)}$ и $Q_{ij}^{(2)}$, $\overline{Q}_{\vartheta\gamma}^{(2)}$ будут образовывать квадратные невырожденные матрицы.

Отметим, что хотя размерность уравнений μ-вида может превышать размерность исходной системы, но при этом из устойчивости невозмущенного движения системы μ-вида не будет следовать, вообще говоря, устойчивость исходной системы (2.5) относительно всех переменных, что имеет место для линейных стационарных систем в случае, когда размерность системы μ-вида равна размерности исходной системы [3].

Из приведенных рассуждений, а также из результатов работ [4,5] вытекают следующие две теоремы.

Теорема 1. Если все собственные числа линейной части уравнений μ-вида системы (2.5) имеют отрицательные вещественные части, то невозмущенное движение системы (2.1) асимптотически устойчиво относительно $y_1, \ldots, y_m$.

Теорема 2. Если среди собственных чисел линейной части уравнений μ-вида системы (2.5) есть хотя бы одно с положительной вещественной частью, то невозмущенное движение системы (2.1) неустойчиво относительно $y_1, \ldots, y_m$.

3. Пусть уравнения возмущенного движения (1.3) имеют вид

$$(3.1)\qquad \begin{aligned} &\frac{dy_i}{dt} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}y_k + \sum_{l=1}^{p} b_{il}z_l + Y_i(y_1, \ldots, y_m, z_1,\ldots, z_p), \qquad i = 1,\ldots, m \\ &\frac{dz_j}{dt} = \sum_{l=1}^{p} d_{jl}z_l + Z_j(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_p), \qquad j = 1, \ldots, p \end{aligned}$$

Пусть выполняются условия:

а) функции $Y_i\ (y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_p)$ могут быть представлены в виде (2.2) — (2.4);

б) функции $Z_j\ (y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_p)$ удовлетворяют условиям типа 1 и 2

$$Z_j\ (0, \ldots, 0, z_1, \ldots, z_p) \equiv 0$$

$$|Z_j(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_p)| \leqslant \sum_{i=1}^{m} \bar{h}_{ij}\,|y_j|, \qquad j = 1, \ldots, p$$

где $\bar{h}_{ij}$ — достаточно малые положительные постоянные. В этом случае для системы (3.1) можно получить критерии, аналогичные теоремам 1,2.

Пример 1. Пусть уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\begin{aligned}
&y^{\cdot} = -y + y\zeta + z_1\zeta^2 + Y\ (y,\ z_1, \ldots, z_4), \quad \zeta = 2z_1 + z_2 + z_3 + z_4 \\
&z_j^{\cdot} = \Sigma_j + Z_j\ (y,\ z_1, \ldots, z_4), \quad j = 1, \ldots, 4 \\
&(\Sigma_1 = -\zeta,\ \Sigma_2 = z_1 - z_2,\ \Sigma_3 = -4z_1 + z_2 - z_3 - z_4,\ \Sigma_4 = 5z_1 + z_2 + \\
&+ 2z_3 + 2z_4)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

При исследовании задачи об устойчивости относительно всех переменных невозмущенного движения системы (3.2) возникает критический случай, когда устойчивость и неустойчивость невозмущенного движения будет определяться видом нелинейных членов.

Рассмотрим вопрос об асимптотической устойчивости невозмущенного движения системы (3.2) относительно переменной y. Заметим, что критерий работы [4] здесь неприменим. Воспользуемся результатами в п. 2, 3 данной статьи.

Введем новые переменные: $\mu_1 = \zeta$, $\mu_2 = z_1\zeta^2$. Система (3.2) после приведения к системе μ-вида, согласно п. 2, будет выглядеть так:

$$\begin{aligned}
&y^{\cdot} = -y + y\mu_1 + \mu_2 + Y\ (y,\ z_1, \ldots, z_4) \\
&\mu_1^{\cdot} = -\mu_1 + Z_5\ (y,\ z_1, \ldots, z_4), \quad \mu_2^{\cdot} = \mu_3 + Z_6\ (y,\ z_1, \ldots, z_4) \\
&\mu_3^{\cdot} = -6\mu_2 - 5\mu_3 + Z_7\ (y,\ z_1, \ldots, z_4) \\
&z_j^{\cdot} = \Sigma_j + Z_j\ (y,\ z_1, \ldots, z_4) \\
&Z_5 = 2Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4, \quad Z_6 = \zeta^2 Z_1 + 2z_1\zeta Z_5 \\
&Z_7 = \zeta^2\ (-2Z_1 + Z_3 + Z_4) + (-4z_1 + 2z_3 + 2z_4)\ \zeta Z_5
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Предположим, что выполнены условия: 1 и 2 на функцию $Y\ (y,\ z_1, \ldots, z_4)$, б) на функции $Z_i\ (y,\ z_1, \ldots, z_4)$ $(i = 5, 6, 7)$, условие 3. Тогда, согласно [4], невозмущенное движение системы (3.3) будет асимптотически устойчивым относительно переменных y, μ_1, μ_2, μ_3, а значит, согласно п. 2, 3, невозмущенное движение системы (3.2) будет асимптотически устойчивым относительно переменной y.

Замечание. Рассмотрим случай, когда функции $Y_i^{**}\ (y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_p)$ и $Z_j\ (y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_p)$, входящие в правые части системы (3.1), не зависят от переменных $z_{r+1}, \ldots, z_p$, т. е. фукции Y_i^{**} и Z_j имеют вид

$$\begin{aligned}
&Y_i^{**} = Y_i^{**}\ (y_1, \ldots, y_m,\ z_1, \ldots, z_r) \\
&Z_j = Z_j\ (y_1, \ldots, y_m,\ z_1, \ldots, z_r)
\end{aligned} \tag{3.4}$$

В этом случае теоремы, аналогичные теоремам 1,2, могут быть получены в предположении, что переменные $z_{r+1}, \ldots, z_p$ системы (3.1) произвольны, т. е. могут быть неограниченными (но являются z-продолжимыми [2]).

Действительно, пусть для правой части системы (3.1) с учетом (3.4) выполняются условия

А) $Y_i^{**}(0,\ldots,0,z_1,\ldots,z_r)\equiv 0,\quad Z_j(0,\ldots,0,z_1,\ldots,z_r)\equiv 0$

Б) функции (3.4) не содержат членов, линейных относительно $y_1,\ldots,y_m$;

В) переменные $z_1,\ldots,z_r$ системы (3.1) всегда ограничены, (переменные $z_{r+1},\ldots,z_p$ произвольны).

При условиях А) —В) методом работ [4,5] для системы (3.1) могут быть получены теоремы, аналогичные теоремам 1,2.

Пример 2. Пусть уравнения возмущенного движения имеют вид

$$(3.5)\qquad \begin{aligned} &y^{\cdot} = -y + z_2^2 z_3 + Y(y, z_1)\\ &z_1^{\cdot} = Z_1(z_1),\quad z_2^{\cdot} = -2z_2 + Z_2(y, z_1)\\ &z_3^{\cdot} = z_2 + 3z_3 + Z_3(y, z_1)\end{aligned}$$

Будем считать, что переменная z_1 системы (3.5) всегда ограничена. Рассмотрим вопрос об асимптотической устойчивости невозмущенного движения системы (3.5) относительно переменной y. После приведения системы (3.5) согласно п. 2,3, к системе μ — вида, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} &y^{\cdot} = -y + \mu + Y(y, z_1)\\ &\mu^{\cdot} = \mu_1 + Z_4(y, z_1),\quad \mu_1^{\cdot} = -6\mu - 7\mu_1 + Z_5(y, z_1)\\ &z_1^{\cdot} = Z_1(z_1),\quad z_2^{\cdot} = -2z_2 + Z_2(y, z_1)\\ &z_3^{\cdot} = z_2 + 3z_3 + Z_3(y, z_1),\ \mu = z_2^2 z_3\\ &(Z_4 = 2z_2z_3Y + z_2^2 Z_3,\ Z_5 = -2z_2z_3Y + 3z_2Y)\end{aligned}$$

Предположим, что выполнены условия 1 и 2 на функцию $Y(y, z_1)$, А), Б) на функцию $Z_4(y, z_1)$ и $Z_5(y, z_1)$. Тогда при условии ограниченности переменной z_1, согласно [4] и п. 2,3 данной статьи, невозмущенное движение системы (3.5) асимптотически устойчиво относительно y.

4. Пусть уравнения возмущенного движения (1.3) имеют вид

$$(4.1)\qquad \begin{aligned} &\frac{dy_i}{dt} = Y_i(y_1,\ldots,y_m) + \sum_{l=1}^{p} b_{il}z_l, \quad i = 1,\ldots,m\\ &\frac{dz_j}{dt} = Z_j(y_1,\ldots,y_m) + \sum_{l=1}^{p} d_{jl}z_l, \quad j = 1,\ldots,p\end{aligned}$$

В отличие от п. 2,3 при исследовании системы (4.1) не требуем ограниченности переменных $z_1,\ldots,z_p$ системы (4.1).

Очевидно, что метод, предложенный в работе [3], полностью переносится на системы (4.1).

Исследование систем второго и третьего порядков вида (4.1) проводилось Н. Н. Красовским в связи с проблемой устойчивости движения в целом [6, 7]. Рассмотрим систему [6]

$$(4.2)\qquad \begin{aligned} &y^{\cdot} = f_1(y) + b_{11}z_1 + b_{12}z_2\\ &z_1^{\cdot} = f_2(y) + d_{11}z_1 + d_{12}z_2,\quad z_2^{\cdot} = f_3(y) + d_{21}z_1 + d_{22}z_2\end{aligned}$$

Будем считать, что выполняется условие [6]

$$(4.3)\qquad \frac{b_{12}}{b_{11}} = \frac{b_{11}d_{12} - d_{11}b_{12}}{b_{12}d_{21} - b_{11}d_{22}}$$

В работе [6] приведены достаточные условия, при которых невозмущенное движение системы (4.2) устойчиво в целом. Область, в которой эти условия имеют место, будем называть областью Г. Рассмотрим вопрос об устойчивости в целом решения $y = z_1 = z_2 = 0$ системы (4.2) относительно переменной y и сравним полученную область устойчивости с областью Г.

Введем новую переменную $\mu = b_{11}z_1 + b_{12}z_2$. Так как имеет место условие (4.3), то в новых переменных система (4.2) будет выглядеть так:

$$(4.4) \qquad y^{\cdot} = f_1(y) + \mu, \quad \mu^{\cdot} = f_4(y) + k\mu$$

$$\left(f_4(y) = b_{11}f_2(y) + b_{12}f_3(y), \quad k = \frac{b_{12}d_{21} + b_{11}d_{11}}{b_{11}} = \frac{b_{11}d_{12} + b_{12}d_{22}}{b_{12}}\right)$$

причем поведение переменной y системы (4.2) будет полностью описываться системой (4.4). Область, в которой невозмущенное движение системы (4.4) устойчиво в целом [7], назовем областью Г*. Можно показать, что область Г* шире области Г, т. е. область устойчивости в целом переменной y системы (4.2) шире области устойчивости в целом всех переменных, характеризующих состояние этой же системы.

5. Пусть уравнения возмущенного движения регулируемой системы имеет вид

$$(5.1) \qquad \frac{dy_i}{dt} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}y_k + \sum_{l=1}^{p} b_{il}z_l + h_i f(\sigma), \quad i = 1, \ldots, m$$

$$\frac{dz_j}{dt} = \sum_{k=1}^{m} c_{jk}y_k + \sum_{l=1}^{p} d_{jl}z_l + h_j f(\sigma), \quad j = 1, \ldots, p$$

$$\sigma = \beta_1 y_1 + \ldots + \beta_m y_m + \beta_{m+1}z_1 + \ldots + \beta_n z_p$$

где a_{ik}, b_{il}, c_{jk}, d_{jl}, h_i, h_j, β_i — постоянные, $f(\sigma)$ — непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$(5.2) \qquad \sigma f(\sigma) > 0 \quad \text{при} \quad \delta \neq 0$$

При исследовании системы (5.1) не требуем ограниченности переменных $z_1, \ldots, z_p$ системы (5.1).

Рассмотрим задачу об абсолютной устойчивости невозмущенного движения системы (5.1) относительно переменных $y_1, \ldots, y_m$. Эта задача обобщает известную задачу А. И. Лурье [8].

Определение. Невозмущенное движение системы (5.1) называется абсолютно устойчивым относительно $y_1, \ldots, y_m$, если оно устойчиво относительно $y_1, \ldots, y_m$ при любых начальных отклонениях и при любом выборе функции $f(\sigma)$, удовлетворяющей условию (5.2).

Покажем, что поставленная задача может быть сведена к задаче об абсолютной устойчивости специально выбранной системы того же вида относительно всех переменных, причем размерность последней может быть меньше размерности исходной системы.

Для этого, следуя [3], введем новые переменные

$$(5.3) \qquad \mu_i = b_{i1}z_1 + \ldots + b_{ip}z_p, \quad i = 1, \ldots, m$$

$$\eta = \beta_{m+1}z_1 + \ldots + \beta_n z_p$$

(считаем, что переменные (5.3) — линейно-независимые, в противном случае выбираем из (5.3) линейно-независимые.)

При таком введении новых переменных возможны два случая. Первый — система (5.2) приводится к виду

$$
\begin{aligned}
(5.4)\qquad & \frac{dy_i}{dt} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}y_k + \mu_i + h_i f(\sigma) \\
& \frac{d\mu_j}{dt} = \sum_{k=1}^{m} c_{jk}^* y_k + \sum_{l=1}^{m} e_{jl}\mu_l + e_j^*\eta + h_j^* f(\sigma), \qquad i, j = 1, \ldots, m \\
& \frac{d\eta}{dt} \sum_{k=1}^{m} \bar{c}_k^* y_k + \sum_{l=1}^{m} \bar{e}_l\mu_l + \bar{e}^*\eta + \bar{h}^* f(\sigma) \\
& \sigma = \beta_1 y_1 + \ldots + \beta_m y_m + \eta
\end{aligned}
$$

т. е. поведение переменных, характеризующих состояние системы (5.4), будет полностью определять поведение переменных $y_1, \ldots, y_m$ системы (5.1). Системы вида (5.4) будем называть системами μ-вида исходной системы (5.1).

Во втором случае, когда система (5.1) после введения переменных (5.3) не приводится к μ-виду, по схеме работы [3] можно показать, что, повторяя процедуру введения новых переменных, на конечном шаге систему (5.1) всегда можно привести к μ-виду. При этом размерность системы μ-вида не будет превышать размерности исходной системы (5.1), а именно справедлива следующая

Лемма. Для того чтобы размерность системы μ-вида системы (5.1) была равна N, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы $K = (B, DB, \ldots, D^{p-1}B)$ был равен $N - m$ (здесь $B = \{b_{il}, \beta_l\}$, $D = \{d_{lj}\}$ — матрицы соответствующих размерностей).

Таким образом, получаем следующий результат.

Теорема 3. Для абсолютной устойчивости невозмущенного движения системы (5.1) относительно $y_1, \ldots, y_m$ достаточно, чтобы система μ-вида была абсолютно устойчивой по всем переменным. В случае, когда ранг матрицы K равен p, рассматриваемая задача эквивалентна задаче А. И. Лурье.

Приведем пример эффективного использования указанного метода. Этот пример показывает, что возможны системы автоматического регулирования, которые не являются абсолютно устойчивыми по всем переменным, вместе с тем они могут быть абсолютно устойчивыми по части переменных.

Рассмотрим случай, когда матрица линейной части системы уравнений (5.1) имеет два нулевых корня, т. е. уравнения (5.1) имеют вид

$$
\begin{aligned}
(5.5)\qquad & \frac{dy_i}{dt} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}y_k + h_i f(\sigma), \qquad i = 1, \ldots, m \\
& dz_1/dt = \gamma_1 f(\sigma), \qquad dz_2/dt = \gamma_2 f(\sigma); \qquad \sigma = \mathbf{c}'\mathbf{y} + \beta_1 z_1 + \beta_2 z_2
\end{aligned}
$$

где γ_1, γ_2 — постоянные, $\mathbf{c}'$ — постоянный вектор.

Система (5.5) имеет ненулевое положение равновесия, поэтому невозмущенное движение системы (5.5) не может быть абсолютно устойчивым по всем переменным [9].

Рассмотрим задачу об абсолютной устойчивости невозмущенного движения системы (5.5) относительно $y_1, \ldots, y_m$. Для этого введем новую переменную: $\gamma\mu = \beta_1 z_1 + \beta_2 z_2$, где $\gamma < 0$ — постоянное число. Система μ-вида будет выглядеть так:

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} y_k + h_i f(\sigma), \quad i = 1, \ldots, m \tag{5.6}$$

$$d\mu/dt = \Gamma f(\sigma); \quad \sigma = \mathbf{c}'\mathbf{y} + \gamma\mu, \quad \gamma < 0; \quad \Gamma = 1/\gamma\,(\beta_1 z_1 + \beta_2 z_2)$$

Известные условия абсолютной устойчивости системы (5.6) (см. [9]) будут условиями устойчивости системы (5.5) относительно $y_1, \ldots, y_m$.

Автор благодарит В. П. Прокопьева, под руководством которого выполнена работа.

Поступила 10 III 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения по отношению к части переменных. Вестн. МГУ, 1957, № 4.
2. *Озиранер А. С., Румянцев В. В.* Метод функций Ляпунова в задаче об устойчивости движения относительно части переменных. ПММ, 1972, т. 36, вып. 2.
3. *Воротников В. И., Прокопьев В. П.* Об устойчивости движения относительно части переменных для линейных систем. ПММ, 1978, т. 42, вып. 2.
4. *Озиранер А. С.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости относительно части переменных. ПММ, 1973, т. 37, вып. 4.
5. *Прокопьев В. П.* Об устойчивости движения относительно части переменных в критическом случае одного нулевого корня. ПММ, 1975, т. 39, вып. 3.
6. *Красовский Н. Н.* Об устойчивости при любых начальных возмущениях решений одной нелинейной системы трех уравнений. ПММ, 1953, т. 17, вып. 3.
7. *Красовский Н. Н.* Об одной задаче устойчивости движения в целом. Докл. АН СССР, 1953, т. 88, № 3.
8. *Лурье А. И.* Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. М.— Л., Гостехиздат, 1951.
9. *Барбашин Е. А.* Функции Ляпунова. М., «Наука», 1970.