Прикладная математика и механика. Том 43, 1979

УДК 531.36

БИФУРКАЦИИ И УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЙТРАЛЬНЫХ СИСТЕМ В ОКРЕСТНОСТИ РЕЗОНАНСА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Я. М. Гольцер

(Алма-Ата)

Рассматривается автономная система дифференциальных уравнений, непрерывно зависящая от параметра. Предполагается, что в окрестности бифуркационного значения параметра $\mu = \mu_0$ линейная часть системы имеет несколько пар чисто мнимых собственных значений, связанных в точке μ_0 резонансным соотношением третьего порядка. Получены признаки сильной устойчивости и выделены случаи бифуркации свойства устойчивости.

Существенно используется взаимосвязь между непрерывной нормальной формой [1] и обычной нормализацией [2] при фиксированных значениях параметра.

1. Предварительные замечания. Рассмотрим r-мерную систему дифференциальных уравнений

$$z^\cdot = P(\mu)z + Z(z, \mu), \quad \mu \in (\mu_1, \mu_2) = D \tag{1.1}$$

непрерывно зависящую от параметра μ, в которой $P(\mu)$ — действительная $r \times r$-матрица, $Z(z, \mu)$ — r-мерная голоморфная по z вектор-функция, начинающая разложение в ряд с форм порядка $k \geqslant 2$.

В предположении, что матрица $P(\mu)$ в области D имеет n пар непрерывных по μ чисто мнимых собственных значений $\pm i\lambda_s(\mu)$, в [1] рассматривалась задача о сильной устойчивости и бифуркациях свойства устойчивости в окрестности резонансного значения параметра $\mu = \mu_0$.

Точка μ_0 характеризуется тем, что в ней между собственными числами $i\lambda_s(\mu_0)$ имеются целочисленные линейные зависимости — внутренний резонанс. В [1] предполагалось также, что порядок резонанса равен $k+1$, k — четное.

Полученные в [1] признаки сильной устойчивости достаточно эффективны при наличии в системе резонанса порядка больше трех, хотя и применимы к системам с резонансами третьего порядка. Однако случаи бифуркации выделены лишь в системах с резонансами порядка больше трех.

При исследовании систем с резонансами третьего порядка возникают особенности, связанные со спецификой взаимосвязей между младшими коэффициентами непрерывной и обычной нормальных форм [1]. В связи с этим в данной работе, примыкающей как по характеру задачи, так и по методам исследования к [1], изучается поведение свойства устойчивости в окрестности резонансов третьего порядка. Рассматривается по одному типу двухчастотных ($n = 2$) и трехчастотных ($n = 3$) резонансов. Для остальных случаев резонанса третьего порядка результаты могут быть модифицированы. Изложение ведется для случая, когда число резонирующих частот $\pm i\lambda_s$ совпадает с размерностью системы.

Основное ограничение заключается в следующем: в области D матрица $P(\mu)$ имеет непрерывную по μ жорданову диагональную форму [3,4].

2. Двухчастотный резонанс третьего порядка. В предположениях п.1 рассматриваемая система с помощью комплексно-сопряженных переменных запишется в виде

$$x_s^{\cdot} = i\lambda_s(\mu)x_s + X_s^{(2)}(x,\bar{x},\mu) + X_s^{(3)}(x,\bar{x},\mu) + \ldots, \qquad s = 1,2 \tag{2.1}$$

$$X_s^{(j)} = \sum_{|p|+|q|=j} a_{p,q}^{(s)}(\mu)x^p\bar{x}^q, \qquad p,q \in R_2^+$$

$$x^p = x_1^{p_1}x_2^{p_2}, \qquad |p| = p_1 + p_2$$

где $X_s^{(j)}$ — формы j-го порядка с непрерывными по μ коэффициентами, R_n — множество n-мерных целочисленных векторов, $R_n^+ \subset R_n$ — множество векторов с неотрицательными компонентами.

Считаем, что при $\mu = \mu_0$ система (2.1) обладает внутренним резонансом

$$\lambda_1^\circ + 2\lambda_2^\circ = 0, \quad \lambda_s(\mu_0) = \lambda_s^\circ \tag{2.2}$$

причем μ_0 — изолированный корень уравнения

$$\delta(\mu) = \lambda_1(\mu) + 2\lambda_2(\mu) = 0$$

Величина $\delta(\mu)$ — расстройка резонанса, $\delta(\mu) \to 0$ при $\mu \to \mu_0$. В общем случае расстройка $\delta(\mu)$ меняет знак при переходе через μ_0. Как будет ясно из дальнейшего, это оказывает существенное влияние на свойство устойчивости.

Пусть D — некоторая ε-окрестность точки μ_0. Будем считать ε настолько малым, что в D^* нет резонансов порядка $\geqslant 4$, D^* — проколотая в точке μ_0 область D.

Следуя [1], произведем в D непрерывную нормализацию, а в D^* обычную нормализацию [2], доведенную до членов третьего порядка.

Непрерывная нормальная форма в D и обычная нормальная форма в D^* таковы:

$$\bar{u}_s u_s^{\cdot} = i\lambda_s(\mu)\omega_s + \alpha_s(\mu)\bar{u}_1\bar{u}_2^2 + \omega_s(\alpha_{s1}\omega_1 + \alpha_{s2}\omega_2) + O_\mu(\|\omega\|^{5/2}) \tag{2.3}$$

$$\bar{u}_s^* u_s^{*\cdot} = i\lambda_s(\mu)\omega_s^* + \omega_s^*(\alpha_{s1}^*\omega_1^* + \alpha_{s2}^*\omega_2^*) + O_\mu^*(\|\omega^*\|^{5/2}) \tag{2.4}$$

$$\omega_s = u_s\bar{u}_s, \qquad \omega_s^* = u_s^*\bar{u}_s^*$$

Нелинейности O_μ непрерывны и ограничены в D, а O_μ^* непрерывны в D^* и неограничены при $\mu \to \mu_0$. Последнее связано с тем, что расстройка $\delta(\mu)$ входит как малый знаменатель в те коэффициенты нормализующего преобразования, которые не являются резонансными при обычной нормализации в D^*, но являются резонансными при непрерывной нормализации (согласно определению 2.1 из [1]).

Опуская вычисления, проводимые в процессе нормализации, приведем лишь необходимые для дальнейшего формулы, связывающие коэффициенты обеих нормальных форм

$$\alpha_{11}^*(\mu) = \alpha_{11}(\mu), \quad \alpha_{12}^*(\mu) = \alpha_{12}(\mu) - 2i\delta^{-1}(\mu)\alpha_1(\mu)\bar{\alpha}_2(\mu) \tag{2.5}$$

$$\alpha_{21}^*(\mu) = \alpha_{21}(\mu) - i\delta^{-1}(\mu)\alpha_2(\mu)\bar{\alpha}_2(\mu)$$

$$\alpha_{22}^*(\mu) = \alpha_{22}(\mu) - i\delta^{-1}(\mu)\bar{\alpha}_1(\mu)\alpha_2(\mu)$$

Заметим, что $\alpha_s(\mu)$ совпадают с коэффициентами при соответствующих резонансных членах в исходных уравнениях (2.1): $\alpha_1 = a^{(1)}_{0002}$, $\alpha_2 = a^{(2)}_{0101}$. Выражения для $\alpha_{js}(\mu)$ через коэффициенты исходной системы не приводим; необходимые формулы для их вычисления можно найти в [5].

Для решения задачи о сильной устойчивости и бифуркациях проведем анализ устойчивости системы (2.3) в точке μ_0 и системы (2.4) в D^*. При этом существенную роль играет взаимосвязь между коэффициентами обеих систем, выраженная формулами (2.5).

Анализ устойчивости системы (2.3) в точке μ_0 может быть проведен на основе результатов, полученных для произвольных резонансов нечетного порядка в [6, 7].

Обозначая

$A(\mu) = \operatorname{Im} \alpha_1\bar{\alpha}_2, \quad B(\mu) = \operatorname{Re} \alpha_1 \operatorname{Re} \alpha_2$

(или $B(\mu) = \operatorname{Im} \alpha_1 \operatorname{Im} \alpha_2$, если $\operatorname{Re} \alpha_1 \operatorname{Re} \alpha_2 = 0$) в соответствии с [6, 7] приходим к следующему утверждению.

Теорема 2.1. Система (2.3) неустойчива в точке μ_0, если выполняется одно из следующих условий:

а) $A(\mu_0) \neq 0$, б) $A(\mu_0) = 0, \quad B(\mu_0) > 0$

Если

в) $A(\mu_0) = 0, \quad B(\mu_0) < 0$

то система (2.3) во втором приближении устойчива и обладает в этом приближении знакоопределенным интегралом

$$V_0 = |\alpha_2(\mu_0)|\,\omega_1 + |\alpha_1(\mu_0)|\,\omega_2$$

(рассматриваемый резонанс изучался также в [8, 9].

Исследование системы (2.4) в D^* может быть проведено на основе результатов А. М. Молчанова [10]. При этом существенную роль играют числа $\operatorname{Re} \alpha_{sj}^* = a_{sj}^*$, которые в соответствии с (2.5) имеют вид

$$a_{11}^* = a_{11}(\mu), \quad a_{12}^* = a_{12}(\mu) + 2A(\mu)\delta^{-1}(\mu)$$
$$a_{21}^* = a_{21}(\mu), \quad a_{22}^* = a_{22}(\mu) - A(\mu)\delta^{-1}(\mu) \qquad (2.6)$$

Из (2.6) и теоремы 2.1 видно, что поведение системы (2.3) в D^* тесно связано с поведением системы (2.4) в точке μ_0 и функций $\delta(\mu)$, $A(\mu)$ в окрестности точки μ_0.

При исследовании (2.4) воспользуемся также следующим результатом.

Теорема 2.2. Для асимптотической устойчивости системы (2.4) вне зависимости от членов O_μ^* в точке $\mu \in D^*$ необходимо и достаточно, чтобы существовали такие $\gamma_1(\mu)$, $\gamma_2(\mu) > 0$, чтобы квадратичная форма

$$W_* = \gamma_1 a_{11}^* \omega_1^{*2} + [\gamma_1 a_{12}^* + \gamma_2 a_{21}^*]\omega_1^*\omega_2^* + \gamma_2 a_{22}^* \omega_2^{*2}$$

была определенно-отрицательной в положительном конусе $K = \{\omega_1^*, \omega_2^* \geqslant 0\}$.

Остановимся на доказательстве теоремы. Прежде всего отметим, что W_* — главная часть производной $V_*^{\boldsymbol{\cdot}}$, вычисленной в силу (2.4), где $V_* = \gamma_1\omega_1^* + \gamma_2\omega_2^*$. Достаточность очевидна.

Необходимость следует из того, что если выбором $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ нельзя обеспечить отрицательную знакоопределенность формы W_*, то система

(2.4) либо нейтральна в третьем приближении, либо неустойчива. А именно, если выбором $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ можно обеспечить лишь отрицательное знакопостоянство W_*, то система нейтральна. Если же при любом выборе $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ форма W_* знакопеременна, то неустойчивость системы в третьем приближении следует из существования у нее (в этом приближении) неустойчивых лучей [10]. Наличие последних гарантирует неустойчивость полной системы.

Рассматривая систему (2.4) вблизи резонанса, в качестве следствия получим следующее утверждение. (Всюду в дальнейшем существенно используется и предполагается непрерывность всех функций, зависящих от μ в D или D^*, а также достаточная малость области D.)

Теорема 2.3. Пусть $A(\mu_0)$, $\sigma(\mu_0) = a_{11}(\mu_0) + 2a_{21}(\mu_0) \neq 0$. Тогда для асимптотической устойчивости системы (2.4) в точке $\mu \in D^*$ независимо от членов $O_\mu{}^*$ необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

1) $a_{11}(\mu) < 0$, 2) $A(\mu)\delta^{-1}(\mu) > 0$, 3) $\sigma(\mu) < 0$

Доказательство. Малость области D и предельное соотношение $\delta(\mu) \to 0$ при $\mu \to \mu_0$ вместе с условием $A(\mu_0) \neq 0$ гарантируют в соответствии с (2.6) выполнение равенств

$$\operatorname{sign} a_{12}^*(\mu) = -\operatorname{sign} a_{22}^*(\mu) = \operatorname{sign} A(\mu)\delta^{-1}(\mu) \quad (\forall \mu \in D^*) \tag{2.7}$$

Для отрицательной знакоопределенности формы W_* при $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ необходимо, чтобы $a_{11}^*(\mu)$, $a_{22}^*(\mu) < 0$. Учитывая (2.6) и (2.7), приходим к необходимости условий 1, 2 теоремы.

Считая условия 1, 2 выполненными, выясним, когда существует необходимый выбор $\gamma_1, \gamma_2 > 0$. Из (2.7) следует, что $a_{12}^*(\mu) > 0$ ($\forall \mu \in D^*$). Если $a_{21} < 0$, то искомый выбор $\gamma_1, \gamma_2 > 0$, очевидно, существует и автоматически $\sigma(\mu) < 0$. Если $a_{21} \geqslant 0$, то выбор $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ существует только тогда, когда

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} - \sigma(\mu)A(\mu)\delta^{-1}(\mu) > 0$$

Коэффициенты a_{js} ограничены в D, а функция $\sigma A\delta^{-1}$ в условиях теоремы неограничена в D^*. Но тогда последнее неравенство эквивалентно условию $\sigma(\mu) < 0$.

Таким образом, искомый выбор $\gamma_1, \gamma_2 > 0$, удовлетворяющий требованиям теоремы 2.2, существует только при выполнении условий 1—3.

Замечание. Из доказательства видно, что требования $A(\mu_0)$, $\sigma(\mu_0) \neq 0$ теоремы 2.3 можно ослабить, заменив их требованием неограниченности функции $\sigma(\mu)A(\mu)\cdot\delta^{-1}(\mu)$. Это условие, заведомо выполнимое в исходных предположениях, может выполняться и тогда, когда обе или одна из функций $A(\mu)$, $\sigma(\mu)$ обращаются в нуль в точке $\mu = \mu_0$.

Перейдем к изучению поведения свойства устойчивости при изменении параметра μ.

Общий случай. Будем считать, что

$$a_{11}(\mu_0) \neq 0, \quad \sigma(\mu_0) \neq 0, \quad A(\mu_0) \neq 0 \tag{2.8}$$

При выполнении первых двух неравенств (2.8) для проверки условий 1,3 теоремы 2.3 в точке $\mu \in D^*$ достаточно проверить их выполнимость в точке μ_0. Если, кроме того, $A(\mu_0) \neq 0$, то проверка условия 2 сводится к установлению знака функции $\delta(\mu)$ в окрестности своего изолированного нуля μ_0. В связи с этим введем множества $D_{\pm}^* = \{\mu \mid A(\mu_0)\delta(\mu) \gtrless 0\}$. Если одно из этих множеств пусто, то второе совпадает с D^*. (Указанная ситуация соответствует случаю, когда δ при переходе через μ_0 не меняет знака.)

Пусть условия 1, 3 выполняются в точке μ_0. Тогда, в силу непрерывности, эти условия будут выполняться в области D. Поскольку условие 2 выполняется на множестве D_+^*, то теорема 2.3 позволяет утверждать, что система (2.4) асимптотически устойчива при каждом $\mu \in D_+^*$. Именно на этом множестве выполняются все три условия теоремы.

Выясним поведение системы (2.4) в рассматриваемом общем случае при нарушении хотя бы одного условия теоремы 2.3 в точке μ_0. С этой целью, следуя [10], выясним, может ли система быть нейтральной в третьем приближении.

Из (2.6), (2.8), следует, что $a_{11}^*(\mu)$, $a_{22}^*(\mu) \neq 0$, $\forall \mu \in D^*$. Поэтому нейтральных лучей на одномерных гранях конуса K система (2.4) не имеет при всех значениях $\mu \in D^*$.

Для существования нейтральных лучей внутри конуса K необходимо, чтобы обращался в нуль определитель

$$\Delta^* = \begin{vmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} - \sigma(\mu)\, A(\mu)\, \delta^{-1}(\mu)$$

Из первых двух неравенств (2.8) следует, что $\Delta^* \neq 0$, $\forall \mu \in D^*$.

Таким образом, в условиях общего случая при нарушении хотя бы одного из условий теоремы 2.3 система (2.4) неустойчива в третьем приближении. Можно показать, что неустойчивость является грубой (не зависит от нелинейностей O_μ^*). ∎

Резюмируя изложенное, получаем следующее утверждение.

Теорема 2.4. Пусть выполняются соотношения (2.8). Тогда, если неравенства 1, 3 теоремы 2.3 выполняются в точке $\mu = \mu_0$, то система (2.4) асимптотически устойчива на множестве D_+^* и неустойчива на D_-^*. Если условия 1 или 3 нарушаются в точке μ_0, то система неустойчива при всех $\mu \in D^*$.

Теоремы 2.1—2.4 позволяют дать полный анализ свойства устойчивости в рассматриваемом общем случае.

Результаты анализа представлены в таблице (АУ — асимптотическая устойчивость, Н — неустойчивость, Б — бифуркация, СН — сильная неустойчивость).

Из таблицы видно, что в системе (2.1) могут встретиться два типа бифуркаций: взрывная неустойчивость, которая характеризуется асимптотической устойчивостью в D^* и неустойчивостью в точке μ_0, и односторонняя взрывная неустойчивость, когда асимптотическая устойчивость в D_+^* сменяется неустойчивостью в точке μ_0, сохраняющейся в D_-^*. (Заметим, что при $A(\mu_0) \neq 0$ множества $D_{\pm}^*$, если они оба не пусты, совпадают с одной из полуокрестностей точки μ_0).

$a_{11}(\mu_0)$	$\sigma(\mu_0)$	Характер устойчивости			
		D_-^*	μ_0	D_+^*	D
$-$	$-$	Н	Н	АУ	Б
$-$	$+$	Н	Н	Н	СН
$+$	$\pm$	Н	Н	Н	СН
$-$	$-$	$\varnothing$	Н	АУ $D_+^* = D^*$	Б
$-$	$+$	$\varnothing$	Н	Н $D_+^* = D^*$	СН
$\pm$	$\pm$	Н $D_-^* = D^*$	Н	$\varnothing$	СН

Неустойчивость в точке μ_0 при $A(\mu_0) \neq 0$ объясняет отсутствие в таблице сильной асимптотической устойчивости.

Вырожденные случаи. Остановимся на случаях, когда нарушаются условия (2.8).

Прежде всего заметим, что теоремы 2.1—2.4 позволяют провести анализ устойчивости в D и в случае нарушения первых двух условий (2.8). Для этого необходимо привлечь информацию о поведении функций $a_{11}(\mu)$, $\sigma(\mu)$ в окрестности точки μ_0, которая теперь является нулем хотя бы одной из этих функций.

Остановимся на случае, когда $A(\mu_0) = 0$, в предположении, что первые два условия (2.8) выполняются. Поведение системы (2.1) в точке μ_0 описывается теперь случаями б) и в) теоремы 2.1, и в случае в) для исследования необходимо привлекать члены более высокого порядка. Для получения достаточных признаков устойчивости в качестве функции Ляпунова может быть использован интеграл модельной системы V_0.

Исследование системы в D^* существенно зависит от поведения функции $A(\mu)\delta^{-1}(\mu)$ в D^*. В предположении, что $A(\mu) \neq 0$, $\forall \mu \in D^*$, возможны два случая:

α) функция $A(\mu)\delta^{-1}(\mu)$ неограничена в D^*,

β) функция $A(\mu)\delta^{-1}(\mu)$ ограничена в D^*.

В случае α исследование системы (2.4) в D^*, так же как и в общем случае, может быть проведено на основе теоремы 2.3 (см. замечание). Учитывая, что $A(\mu_0) = 0$, получим следующее определение множеств $D_\pm^*$: $D_\pm^* = \{\mu \mid A(\mu)\delta(\mu) \gtrless 0\}$. По-прежнему, при выполнении условий 1—3 теоремы 2.3 в точке μ_0 система (2.4) асимптотически устойчива на множестве D_+^* и неустойчива на множестве D_-^*.

В случае β предположим, что

$$\beta') \quad \exists \lim_{\mu \to \mu_0} A(\mu)\delta^{-1}(\mu) = k < \infty$$

и дополнительно

$$(2.9) \qquad a_{22}(\mu_0) \neq k, \quad a_{12}(\mu_0) \neq -2k$$

$$\Delta(\mu_0) = a_{11}(\mu_0)a_{22}(\mu_0) - a_{21}(\mu_0)a_{12}(\mu_0) \neq k\sigma(\mu_0)$$

Применение теоремы 2.2 показывает, что в условиях β', (2.9) для асимптотической устойчивости системы (2.4) в точке μ необходимо и достаточно выполнения одной из следующих групп условий:

$$a_{11}(\mu) < 0, \quad a_{22}(\mu) < k; \quad a_{12}(\mu) + 2k < 0 \quad \text{или} \quad a_{21}(\mu) < 0 \tag{2.10}$$

$$a_{11}(\mu) < 0, \quad a_{22}(\mu) < k; \quad \Delta(\mu) > k\sigma(\mu) \tag{2.11}$$

Первые два условия (2.8) и условия (2.9) позволяют сделать вывод, что система (2.4) в рассматриваемом случае не может быть нейтральной. Следовательно, нарушение в некоторой точке $\mu \in D^*$ условий (2.10), (2.11) приводит к неустойчивости системы (2.4) в этой точке. Предположение (2.9) позволяет проводить проверку условий (2.10), (2.11), ограничиваясь значением $\mu = \mu_0$. Поэтому нарушение условий (2.10), (2.11) в точке μ_0 приводит к неустойчивости в D^*.

Изложенное выше и теорема 2.1 приводят к следующему результату. Пусть $B(\mu_0) > 0$. Если в точке μ_0 выполняются условия (2.10) или (2.11), то в точке μ_0 — бифуркация типа взрывной неустойчивости. В остальных случаях — сильная неустойчивость.

В случае, когда $A(\mu_0) = 0$, $B(\mu_0) < 0$, поведение системы в D^* точно такое же, как и выше. В точке μ_0 возможна асимптотическая устойчивость, для чего достаточна знакоопределенность (отрицательная) формы

$$|\alpha_2|\, a_{11}\omega_1^2 + (|\alpha_2|\, a_{12} + |\alpha_1|\, a_{21})\omega_1\omega_2 + |\alpha_1|\, a_{22}\omega_2^2$$

в точке μ_0 при $\omega_1, \omega_2 \geqslant 0$.

Поэтому в условиях определенной отрицательности этой формы и при выполнении (2.10) или (2.11) в точке μ_0 — сильная асимптотическая устойчивость.

Пусть теперь $A(\mu) \equiv 0$ ($\forall \mu \in D$). Из (2.6) видно, что поведение свойства устойчивости системы (2.4) в D^* в третьем приближении не зависит от характера устойчивости системы в резонансной точке μ_0. Однако в случае асимптотической устойчивости (2.4) близость к резонансу влияет, по-видимому, на размеры области притяжения, так как по-прежнему $O_\mu^* \to \infty$ при $\mu \to \mu_0$. Необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости содержатся в теореме 2.2. Поведение системы (2.3) в точке μ_0 описано выше.

Заметим, что случай $A(\mu) \equiv 0$ в практически важных ситуациях может сопровождаться равенствами $a_{sj}(\mu) \equiv 0$. Тогда для общих систем исследование усложняется. Для исследования в D^* можно использовать результаты из [11, 12].

Описанная ситуация заведомо реализуется в гамильтоновых системах. Для них рассматриваемая задача может быть решена на основе ряда хорошо известных в теории гамильтоновых систем результатов с привлечением непрерывной нормальной формы.

Отметим еще, что случай, когда $A(\mu_0) = 0$, но $A(\mu) \neq 0$ ($\forall \mu \in D^*$), может встретиться при исследовании систем, близких к гамильтоновым.

3. Трехчастотный резонанс. Рассмотрим систему (2.1), в которой теперь $s = 1, 2, 3$, и будем считать, что она обладает единственным внутренним резонансом третьего порядка

$$\lambda_1(\mu_0) + \lambda_2(\mu_0) + \lambda_3(\mu_0) = 0 \tag{3.1}$$

Процесс нормализации в D и D^* приводит к следующим системам, соответствующим непрерывной нормальной форме в D и обычной нормальной форме в D^*:

(3.2) $\qquad \bar{u}_s u_s^{\cdot} = i\lambda_s(\mu)\omega_s + \alpha_s\bar{u}_1\bar{u}_2\bar{u}_3 + \omega_s\Sigma\alpha_{sj}\omega_j + O_\mu(\|\omega\|^{5/2})$

(3.3) $\qquad \bar{u}_s^* u_s^{*\cdot} = i\lambda_s(\mu)\omega_s^* + \omega_s^*\Sigma\alpha_{sj}^*\omega^*_j + O_\mu^*(\|\omega^*\|^{5/2})$

Свойства нелинейности O_μ, O_μ^* аналогичны описанным в п. 2.

Связь между коэффициентами нормальных форм следующая:

(3.4) $\qquad \alpha_{sj}^* = \alpha_{sj} - i\alpha_s\bar{\alpha}_k\delta^{-1}(\mu), \quad j \neq s \neq k; \quad j, s, k = 1, 2, 3$

$\qquad \alpha_{jj}^* = \alpha_{jj}, \quad \delta(\mu) = \lambda_1(\mu) + \lambda_2(\mu) + \lambda_3(\mu) \to 0 \quad$ при $\quad \mu \to \mu_0$

Введем обозначения $a_{sj}(\mu) = \operatorname{Re}\alpha_{sj}(\mu)$, $c_{sj} = \operatorname{Im}\alpha_s(\mu)\bar{\alpha}_k(\mu)$ (заметим, что $c_{sj} = -c_{kj}$).

Общий случай. Будем считать, что в точке μ_0

(3.5) $\qquad c_{sj}(\mu_0) = c_{sj}^\circ \neq 0 \quad (\forall s, j \mid s \neq j), \quad a_{jj}(\mu_0) \neq 0$

Обозначим $c_{13}^\circ = \alpha$, $c_{21}^\circ = \beta$, $c_{12}^\circ = \gamma$.

Исследование системы (3.1) в условиях (3.5) при $\mu = \mu_0$ основывается на следующем результате, вытекающем из [6,13].

Теорема 3.1. Пусть выполняются условия (3.5). Система (3.2) устойчива в точке μ_0 во втором приближении тогда и только тогда, когда

(3.6) $\qquad \operatorname{sign}\alpha = \operatorname{sign}\beta = -\operatorname{sign}\gamma$

(что соответствует двум схемам знаков $(++-)$ и $(--+)$). В остальных случаях система неустойчива вне зависимости от нелинейности O_μ.

При выполнении (3.6) система (3.2) во втором приближении в точке μ_0 допускает знакоопределенный интеграл

(3.7) $\qquad V_0 = \beta\omega_1 - \gamma\omega_2 + \alpha\omega_3$

Сформулированная теорема есть следствие теорем 2.1, 2.2, 3.1 из [6]. Условия (3.5), (3.6) гарантируют выполнение условий (2.2) и (2.5) А в [6].

Вид интеграла (3.7) устанавливается непосредственным вычислением аналогично [13].

Рассмотрим теперь систему (3.3) в D^*. Ее исследование в третьем приближении проведем, следуя [10]. С этой целью перейдем в (3.3) к переменным ω_s^* и рассмотрим модельную систему

(3.8) $\qquad {}^1/_2\omega_s^{*\cdot} = \omega_s^*\Sigma a_{sj}^*\omega_j^*$

$\qquad (a_{sj}^* = \operatorname{Re}\alpha_{sj}^* = a_{sj}(\mu) + c_{sj}(\mu)\delta^{-1}(\mu), \ s \neq j; \ a_{jj}^* = a_{jj}(\mu))$

Все коэффициенты a_{sj}, c_{sj} непрерывны и ограничены в D.

Введем матрицу $A = (a_{sj}^*)_1^3$ и матрицы A_j, получаемые из A вычеркиванием j-го столбца и j-й строки. Рассмотрим далее совокупность семи систем уравнений

(3.9) $\qquad Aq = l, \quad A_j q^{(j)} = l^{(j)}, \quad j = 1, 2, 3; \quad a_{ss}q_s = 1, \quad s = 1, 2, 3$

Здесь $q = (q_1, q_2, q_3)$, $l = (l_1, l_2, l_3)$, $l_j = 1$ или 0 $(\forall j)$; $q^{(j)}$, $l^{(j)}$ — проекции векторов q, l на плоскости $q_j = 0$, $l_j = 0$.

Как известно [10], для того чтобы система (3.8) была неустойчивой, необходимо и достаточно, чтобы совокупность (3.9) имела строго положительное решение при $l \neq 0$.

Неустойчивость гарантируется существованием растущего частного решения, расположенного либо внутри конуса $K = \{\omega_1^*, \omega_2^*, \omega_3^* \geqslant 0\}$, если положительное решение существует у трехмерной системы в (3.9), либо на одно- и двумерных гранях конуса K, если положительное решение имеет одна из соответствующих систем совокупности (3.9).

Прежде всего ясно, что если

$$(3.10) \qquad (\exists j) \quad (a_{jj}(\mu_0) > 0)$$

то система (3.8) неустойчива, так как существует растущее решение на j-й одномерной грани конуса K.

Пусть теперь

$$(3.11) \qquad (\forall j)\,(a_{jj}(\mu_0) < 0)$$

Выясним, существуют ли растущие решения на двумерных гранях конуса K.

Вычисляя определители $\Delta_j = |A_j|$, получим

$$\Delta_1 = -\alpha\gamma\delta^{-2} + O(\delta^{-1}), \quad \Delta_2 = \alpha\beta\delta^{-2} + O(\delta^{-1})$$
$$\Delta_3 = -\beta\gamma\delta^{-2} + O(\delta^{-1})$$

Из этих равенств видно, что определители Δ_j в условиях (3.5) отличны от нуля и сохраняют знак в D^*. Анализируя системы $A_j\, q^{(j)} = l^{(j)}$ при $l^{(j)} = (1; 1)$, приходим к выводу, что при нарушении условий (3.6) хотя бы одна из них имеет положительное решение.

Таким образом, грубая неустойчивость системы (3.2) в точке μ_0, связанная с нарушением (3.6), приводит к неустойчивости и в D^*.

Пусть условия (3.6) выполняются. Тогда растущих решений на двумерных гранях система (3.8) не имеет. Неустойчивость системы возможна лишь при наличии растущего решения внутри конуса K.

Рассматривая систему $Aq = l \neq 0$, вычислим прежде всего ее определитель

$$\Delta = |A| = \Delta_0\delta^{-2} + O(\delta^{-1})$$
$$\left(\Delta_0 = -\alpha\gamma \sum_{j=1}^{3} a_{j1} + \alpha\beta \sum_{j=1}^{3} a_{j2} - \beta\gamma \sum_{j=1}^{3} a_{j3}\right)$$

Будем считать, что $\Delta_0 \neq 0$. Тогда определитель $\Delta \neq 0$ и сохраняет знак в D^*. Вычисления показывают, что растущее решение внутри конуса K существует, если выполняется условие (3.6) и $\Delta_0 > 0$. Поскольку все определители $\Delta_s \neq 0$ (в силу (3.5)), то на двумерных гранях конуса K нейтральных лучей нет. Их нет на одномерных гранях, если $a_{jj}(\mu_0) \neq 0\ (\forall j)$ и внутри конуса K, если $\Delta_0 \neq 0$. Поэтому при выполнении условий (3.6) и

$$(3.12) \qquad \Delta_0(\mu_0) < 0, \quad a_{jj}(\mu_0) < 0 \quad (\forall j)$$

система (3.8) асимптотически устойчива в D^*.

При выполнении условий (3.6) остается неисследованной устойчивость исходной системы только в точке μ_0. Для получения достаточных признаков устойчивости воспользуемся интегралом модельной системы (3.7). Вычисляя его производную в силу (3.2) при $\mu = \mu_0$, получим

$$\begin{aligned}V_0^{\cdot} &= \beta a_{11}^\circ\omega_1^2 + (\beta a_{12}^\circ - \gamma a_{21}^\circ)\omega_1\omega_2 + (\beta a_{13}^\circ + \alpha a_{31}^\circ)\omega_1\omega_3 - \\ &- \gamma a_{22}^\circ\omega_2^2 + (-\gamma a_{23}^\circ + \alpha a_{32}^\circ)\omega_2\omega_3 + \alpha a_{33}^\circ\omega_3^2 + O(\|\omega\|^{5/2}) = \\ &= W_2 + O(\|\omega\|^{5/2})\end{aligned}$$

Если форма W_2 знакоопределенная в конусе K, то при $a_{jj}^\circ < 0$ она имеет знак, противоположный знаку V_0, что приводит к достаточным условиям асимптотической устойчивости. Остается проверить, не противоречит ли требование знакоопределенности формы W_2 при $a_{jj}^\circ < 0$ условиям (3.6).

С этой целью положим в $W_2 \omega_1 = -\alpha\gamma$, $\omega_2 = \alpha\beta$, $\omega_3 = -\beta\gamma$. Все эти числа в условиях (3.6) положительны. В этой точке конуса K получим следующее значение для W_2:

$$W_2 = -\alpha\beta\gamma\Delta_0$$

и, следовательно, $\operatorname{sign} W_2 = \operatorname{sign} \Delta_0$.

Таким образом, необходимыми условиями того, чтобы форма W_2 могла быть знакоопределенной противоположного с V_0 знака, будут следующие:

(3.13) Схема знаков в (3.6) $(+ + -)$ и $\Delta_0 < 0$

(3.14) Схема знаков в (3.6) $(- - +)$ и $\Delta_0 > 0$

Существование знакоопределенных форм W_2, знака противоположного с V_0, при выполнении (3.13) или (3.14) достаточно очевидно. Так, например, если в W_2 все $a_{js}^\circ < 0$ и схема знаков $(+ + -)$, то одновременно выполняется (3.13) и W_2 обладает нужным свойством знакоопределенности. Если среди a_{jj}° имеются положительные, то нетрудно убедиться, что система (3.2) при выполнении условий (3.5) неустойчива в третьем приближении. (Можно показать, что неустойчивость грубая.)

Из изложенного следует

Теорема 3.2. Пусть исследуемая система с резонансом (3.1) такова, что справедливы условия (3.5) и $\Delta_0(\mu_0) \neq 0$.

1) Если выполняется (3.10) или нарушается (3.6), то в точке μ_0 — сильная неустойчивость.

2) Если (3.10) нарушается (т. е. верно (3.11)) и выполняется (3.6), то при $\Delta_0(\mu_0) > 0$ система неустойчива в D^*. Если при этом схема знаков в (3.6) $(- - +)$ и форма W_2 знакоопределенная, то в точке μ_0 имеет место бифуркация — неустойчивость в D^* сменяется асимптотической устойчивостью в точке μ_0.

3) Если (3.10) нарушается и выполняется (3.6), то при $\Delta_0 < 0$ система асимптотически устойчива в D^*. Если схема знаков в (3.6) $(+ + -)$ и форма W_2 знакоопределенная в конусе $K = \{\omega_j \geqslant 0\}$, то в точке μ_0 — сильная асимптотическая устойчивость.

Сформулированная теорема не охватывает случая, когда $\Delta_0(\mu_0) = 0$. Анализ этого случая может быть проведен с привлечением свойств

$\Delta_0(\mu)$ в D^*. На исследовании вырожденных случаев, связанных с обращением в нуль некоторых из чисел $a_{jj}(\mu_0)$, $c_{sj}(\mu_0)$, не останавливаемся. Пример анализа вырожденных случаев приведен в п. 2 для двухчастотного резонанса.

В заключение отметим, что применение большей части полученных в п. 2, 3 результатов требует знания коэффициентов непрерывной нормальной формы лишь в резонансной точке μ_0 и, дополнительно, поведения расстройки резонанса $\delta(\mu)$ в окрестности точки μ_0. Поэтому практически для решения задачи о сильной устойчивости и бифуркациях достаточно построения нормальной формы лишь при $\mu = \mu_0$.

Достаточно реальна ситуация, когда знак расстройки $\delta(\mu)$ неизвестен. Она заведомо реализуется, если собственные числа или все параметры системы известны лишь приближенно. Результаты данной работы позволяют утверждать, что исследование устойчивости, проведенное в таких условиях, будет далеко не всегда достоверным.

Интерпретируя приближенную систему как погруженную в семейство (1.1), так, что ей соответствует в этом семействе некоторое неизвестное значение параметра $\mu^* \in D$, можно сделать следующий вывод. Исследование устойчивости приведет к достоверным результатам, если в системе (1.1) отсутствует бифуркация свойства устойчивости, и, таким образом, характер устойчивости для всех $\mu \in D$, включая μ^*, один и тот же.

Проверка наличия бифуркации не требует знания знака расстройки и точных значений коэффициентов нормальной формы, а требует лишь знания знака некоторых коэффициентов непрерывной нормальной формы, для чего могут быть использованы и их приближенные значения.

Таким образом, исследование сильной устойчивости параметрически возмущенных систем можно рассматривать как исследование устойчивости систем, известных лишь приближенно.

4. Пример. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

(4.1) $$z_s^{\cdot\cdot} + \lambda_s^2(\mu) z_s = Z_s^{(2)}(\mu, z, z^\cdot) + Z_s^{(3)}(\mu, z, z^\cdot) + \ldots + \;= Z_s(\mu, z, z^\cdot)$$

Ограничимся выяснением возможных бифуркаций в этой системе.

Запишем формы $Z_s^{(2)}$, $Z_s^{(3)}$ в виде

(4.2) $$Z_s^{(2)} = \sum_{j,\,h=1}^{n} a_{jh}^{(s)} z_j z_h + b_{jh}^{(s)} z_j z_h^\cdot + c_{jh}^{(s)} z_j^\cdot z_h^\cdot$$

$$Z_s^{(3)} = \sum_{j,\,h,\,k=1}^{n} a_{jhk}^{(s)} z_j z_h z_k + b_{jhk}^{(s)} z_j z_h z_k^\cdot + c_{jhk}^{(s)} z_j z_h^\cdot z_k^\cdot + d_{jhk}^{(s)} z_j^\cdot z_h^\cdot z_k^\cdot$$

Замена переменных $x_s = z_s - i\lambda_s^{-1} z_s^\cdot$ переводит (4.1) в систему

(4.3) $$x_s^\cdot = i\lambda_s x_s + X_s^{(2)}(x, \bar{x}, \mu) + X_s^{(3)}(x, \bar{x}, \mu) + \ldots$$

Проследим за структурой коэффициентов форм $X_s^{(2)}$, $X_s^{(3)}$. Можно установить (см. также [5]), что действительные части коэффициентов форм $X_s^{(2)}$ ($X_s^{(3)}$) образуются только с помощью комбинации коэффициентов $b_{jh}^{(s)}$ ($b_{jhk}^{(s)}$, $d_{jhk}^{(s)}$), а мнимые части — с помощью $a_{jh}^{(s)}$, $c_{jh}^{(s)}$ ($a_{jhk}^{(s)}$, $c_{jhk}^{(s)}$).

В соответствии с этим все члены в (4.2) разобьем на две группы. К первой группе отнесем члены с коэффициентами $b_{jh}^{(s)}$, $b_{jhk}^{(s)}$, $d_{jkh}^{(s)}$, а остальные — ко второй группе.

Если в (4.1) присутствуют только члены первой группы, то в (4.3) коэффициенты форм $X_s^{(2)}$, $X_s^{(3)}$ чисто мнимые. Можно убедиться, что тогда будут чисто мнимыми и коэффициенты обеих нормальных форм во втором и третьем порядках.

Если же в (4.1) имеются только члены второй группы, то указанные коэффициенты в (4.3) действительные. В непрерывной нормальной форме коэффициенты при членах второго порядка действительные. В третьем порядке в обеих нормальных формах коэффициенты комплексные. Но если все $b_{jhk}^{(s)} = d_{jhk}^{(s)} = 0$, то они будут чисто мнимыми.

Пусть в системе (4.1) $s = 1, 2$ и имеется резонанс (2.2). Из изложенного следует, что при наличии в (4.1) только членов первой группы коэффициенты α_1, α_2, α_{js}, α_{js}^* будут чисто мнимыми. Но тогда $A(\mu) \equiv 0$, $a_{js} \equiv 0$, и условия (2.7), (2.8) нарушаются.

Если в (4.1) имеются члены только второй группы, то α_1, α_2 действительные, $A(\mu) \equiv 0$ и (2.8) нарушается. Когда коэффициенты α_{js} комплексные, условие (2.7) будет, вообще говоря, выполняться. Оно заведомо не выполняется, если $b_{jhk}^{(s)} = d_{jhk}^{(s)} = 0$.

Оба случая — вырожденные и обсуждались в конце п. 2. Заметим, что в обоих случаях $B(\mu) \neq 0$, и если $B(\mu_0) > 0$, то в системе (4.1) в обоих вырожденных случаях может реализоваться следующий тип бифуркаций. Неустойчивость в точке μ_0 сменяется устойчивостью в любом конечном порядке в D^*. Для реализации этого случая достаточно, например, чтобы функция $Z_s(\mu, z, z^\cdot)$ не зависела от $z^\cdot$ или содержала $z^\cdot$ только в четных степенях. При выполнении этих условий коэффициенты обеих нормальных форм в любом порядке будут чисто мнимыми.

Если в (4.1) имеются обе группы членов, то коэффициенты обеих нормальных форм комплексные, и можно встретиться со всеми случаями, описанными при исследовании общего случая в п. 2.

Пусть теперь в (4.1) $s = 1, 2, 3$ и выполняется (3.1). Так же, как и в случае двухчастотного резонанса, общий случай может реализоваться только, когда в (4.1) имеются члены обеих групп, и тогда применима теорема 3.2. При наличии в (4.1) только членов первой групп нарушаются все соотношения в (3.5), так как $c_{sj} = \operatorname{Im} \alpha_s \bar{\alpha}_k \equiv 0$, $a_{sj} = \operatorname{Re} \alpha_{sj} \equiv 0$. Если в (4.1) имеются члены только второй группы, то снова $c_{sj} \equiv 0$, но a_{jj} уже могут отличаться от нуля.

Поступила 6 VI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольцер Я. М.* О сильной устойчивости резонансных систем при параметрических возмущениях. ПММ, 1977, т. 41, вып. 2.
2. *Брюно А. Д.* Аналитическая форма дифференциальных уравнений. Тр. Моск. матем. о-ва, 1971, т. 25; 1972, т. 26.
3. *Богданов Ю. С.* О преобразовании переменной матрицы к каноническому виду. Докл. АН БССР, 1963, т. 7, № 3.
4. *Арнольд В. И.* О матрицах, зависящих от параметра. Успехи матем. наук, 1971, т. 26, вып. 2.
5. *Старжинский В. М.* Прикладные методы нелинейных колебаний. М., «Наука», 1977.
6. *Гольцер Я. М., Куницын А. Л.* Об устойчивости автономных систем при внутреннем резонансе. ПММ, 1975, т. 39, вып. 6.
7. *Гольцер Я. М., Нурпеисов С. К.* К исследованию одного критического случая при наличии внутреннего резонанса. Изв. АН КазССР. Сер. физ., матем., 1972, № 1.
8. *Куницын А. Л.* Об устойчивости в критическом случае чисто мнимых корней при внутреннем резонансе. Дифференциальные уравнения, 1971, т. 7, № 9.
9. *Хазина Г. Г.* Некоторые вопросы устойчивости при наличии резонансов. ПММ, 1974, т. 38, вып. 1.
10. *Молчанов А. М.* Устойчивость в случае нейтральности линейного приближения. Докл. АН СССР, 1961, т. 141, № 1.
11. *Каменков Г. В.* Избранные труды, т. 1. Устойчивость движения. Колебания. Аэродинамика. М., «Наука», 1971.
12. *Веретенников В. Г.* Об устойчивости движения в случае трех пар чисто мнимых корней. Тр. Ун-та дружбы народов им. Лумумбы. Сер. теор. механ., 1966, т. 15, вып. 3.
13. *Ибрагимова Н. К.* Об устойчивости некоторых систем при наличии резонансов. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1966, т. 6, № 5.