

**БИФУРКАЦИОННОЕ МНОЖЕСТВО И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ  
МНОГООБРАЗИЯ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА  
В ЛИНЕЙНОМ ПОЛЕ СИЛ**

**Т. И. Погосян, М. П. Харламов**  
(Донецк)

Изучается интегрируемая задача о движении твердого тела, закрепленного в центре масс, под действием линейного поля сил, представляющего собой классическое приближение для центрального ньютоновского. Найдено бифуркационное множество — совокупность критических значений интегрального отображения. Указан тип интегральных многообразий в невырожденных случаях.

**1. Постановка задачи.** Пусть твердое тело с неподвижным центром масс  $O$  помещено в поле сил, индуцированное притягивающей материальной точкой  $P$ . Свяжем с телом декартову систему координат с осями, направленными по главным центральным осям инерции тела. Соответствующие моменты инерции обозначим через  $A, B, C$ . Эллипсоид инерции считаем трехосным и полагаем без ограничения общности

$$(1.1) \quad A < B < C$$

Введем неизменный в пространстве единичный вектор

$$(1.2) \quad \mathbf{v} = \vec{OP} / |OP|$$

и обозначим через

$$(1.3) \quad v_1, v_2, v_3$$

его компоненты в подвижных осях. Пусть

$$(1.4) \quad p, q, r$$

— компоненты в тех же осях вектора мгновенной угловой скорости тела.

В силу соотношения

$$(1.5) \quad v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1$$

пространство переменных (1.3), (1.4) есть пятимерное многообразие  $M^5 = S^2 \times \mathbf{R}^3$ . Динамическая система на  $M^5$ , описывающая движение твердого тела, задается уравнениями Эйлера — Пуассона

$$(1.6) \quad A \frac{dp}{dt} = (B - C)(qr - \varepsilon^2 v_2 v_3), \quad \frac{dv_1}{dt} = rv_2 - qv_3$$

$$(ABC, pqr, 123)$$

При этом в разложении потенциальной энергии учтены лишь члены, квадратичные по переменным (1.3), так что  $U = 1/2 (Av_1^2 + Bv_2^2 + Cv_3^2) \cdot \varepsilon^2$  (параметр  $\varepsilon$  зависит от расстояния  $OP$  и гравитационной постоянной). Заметим, что выбором подходящих единиц измерения переменных (1.4) и времени  $t$  параметру  $\varepsilon$  можно придать любое отличное от нуля значение. Для дальнейшего удобно считать  $\varepsilon^2 = 1 / (ABC)$ .

Уравнения (1.6) в дополнение к классическим интегралам площадей и энергии

$$(1.7) \quad J = Apv_1 + Bqv_2 + Crv_3$$

$$(1.8) \quad H = \frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) + \frac{1}{2} \left( \frac{v_1^2}{BC} + \frac{v_2^2}{CA} + \frac{v_3^2}{AB} \right)$$

допускают квадратичный интеграл, впервые указанный Клебшем в математически эквивалентной задаче [1]

$$(1.9) \quad K = \frac{1}{2} (A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2) - \frac{1}{2} \left( \frac{v_1^2}{A} + \frac{v_2^2}{B} + \frac{v_3^2}{C} \right)$$

Система (1.6) с интегралами (1.8), (1.9) допускает одновременную замену знака у величин  $p, q, v_3$ . При этом знак постоянной площадей

$$(1.10) \quad J = s$$

изменяется на противоположный, и, значит, достаточно изучить случай  $s \geq 0$ .

Перейдем от переменных (1.4) к новым переменным  $v_1^{\cdot}, v_2^{\cdot}, v_3^{\cdot}$  по формулам

$$(1.11) \quad v_1^{\cdot} = rv_2 - qv_3, v_2^{\cdot} = pv_3 - rv_1, v_3^{\cdot} = qv_1 - pv_2$$

На множестве (1.10) такая замена обратима, и обратная к ней определяется формулами Колосова [2]

$$(1.12) \quad p = \frac{Cv_3v_2^{\cdot} - Bv_2v_3^{\cdot} + sv_1}{Av_1^2 + Bv_2^2 + Cv_3^2}, \quad q = \frac{Av_1v_3^{\cdot} - Cv_3v_1^{\cdot} + sv_2}{Av_1^2 + Bv_2^2 + Cv_3^2}$$

$$r = \frac{Bv_2v_1^{\cdot} - Av_1v_2^{\cdot} + sv_3}{Av_1^2 + Bv_2^2 + Cv_3^2}$$

В силу (1.11)  $v_1v_1^{\cdot} + v_2v_2^{\cdot} + v_3v_3^{\cdot} = 0$ , так что пространство переменных (1.3), (1.11) — касательное расслоение единичной сферы (1.5), обозначаемое далее через  $T(S^2)$ .

Положим  $a = 1/A, b = 1/B, c = 1/C, D = bcv_1^2 + cav_2^2 + abv_3^2$ . Функции (1.8), (1.9) в подстановке (1.12) примут вид

$$(1.13) \quad H = \frac{1}{2D} (av_1^{\cdot 2} + bv_2^{\cdot 2} + cv_3^{\cdot 2} + abcs^2) + \frac{D}{2}$$

$$(1.14) \quad K = \frac{1}{2D^2} \{ a^2v_1^{\cdot 2} + b^2v_2^{\cdot 2} + c^2v_3^{\cdot 2} - (av_1v_1^{\cdot} + bv_2v_2^{\cdot} + cv_3v_3^{\cdot})^2 +$$

$$+ 2s [a^2(b-c)v_2v_3v_1^{\cdot} + b^2(c-a)v_3v_1v_2^{\cdot} + c^2(a-b)v_1v_2v_3^{\cdot}] +$$

$$+ s^2 (b^2c^2v_1^2 + c^2a^2v_2^2 + a^2b^2v_3^2) \} - 1/2 (av_1^2 + bv_2^2 + cv_3^2)$$

Уравнения (1.6) заменой (1.12) переводятся в систему уравнений второго порядка, определяющую векторное поле  $X$  на  $T(S^2)$ . Это векторное поле гамильтоново в некоторой симплектической структуре [3] и порождено

гамильтонианом (1.13). В этой же структуре скобка Пуассона

$$(1.15) \quad (H, K) \equiv 0$$

Поле  $X$  называем приведенной системой. Приведенная система описывает движение вектора (1.2) в базисе, связанном с твердым телом, и тем самым определяет движение тела с точностью до вращения вокруг оси  $Ov$ .

Для каждой пары  $(k, h) \in \mathbb{R}^2$  обозначим через  $I_{k,h}$  подмножество в  $T(S^2)$ , выделяемое соотношениями

$$(1.16) \quad H = h, K = k$$

Очевидно, что  $I_{k,h}$  — интегральная поверхность приведенной системы и для почти всех  $(k, h)$  есть гладкое многообразие размерности 2.

Дальнейшая задача — найти множество  $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$  точек  $(k, h)$ , при переходе через которые меняется топологический тип  $I_{k,h}$ , и выяснить этот тип для остальных точек  $\mathbb{R}^2$ .

Более строго, определим бифуркационное множество  $\Sigma$  как множество точек  $(k, h) \in \mathbb{R}^2$ , над которыми отображение

$$(1.17) \quad I = K \times H: T(S^2) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

не является локально тривиальным. Аналогично [4] можно показать, что  $\Sigma$  совпадает с множеством критических значений (1.17), при этом если  $(k_0, h_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$ , то для  $(k, h)$ , близких к  $(k_0, h_0)$ , многообразия  $I_{k,h}$  гладко по  $k, h$  диффеоморфны  $I_{k_0, h_0}$ . В частности, в связной компоненте  $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$  дифференцируемый тип  $I_{k,h}$  сохраняется.

Согласно (1.15), применима теорема Арнольда — Лиувилля [5], и, следовательно, при  $(k, h) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$  либо  $I_{k,h} = \emptyset$ , либо каждая связная компонента  $I_{k,h}$  диффеоморфна двумерному тору, движение на котором условно-периодическое, так что в некритических случаях остается найти лишь связность  $I_{k,h}$ .

**2. Аналитическое задание бифуркационного множества.** Введем на сфере (1.5) локальные координаты

$$(2.1) \quad \xi = \int_b^\lambda \tau^{1/2} f^{-1/2}(\tau) d\tau, \quad \eta = \int_c^\mu \tau^{1/2} g^{-1/2}(\tau) d\tau$$

$$f(\tau) = (a - \tau)(b - \tau)(c - \tau), \quad g(\tau) = -f(\tau)$$

$$v_1^2 = \frac{(a - \lambda)(a - \mu)}{(a - b)(a - c)}, \quad v_2^2 = \frac{(\lambda - b)(b - \mu)}{(a - b)(b - c)}, \quad v_3^2 = \frac{(\lambda - c)(\mu - c)}{(a - c)(b - c)}$$

где  $\lambda, \mu$  — эллиптические переменные Колосова. В силу (1.1)  $c \leq \mu \leq b \leq \lambda \leq a$ .

*Замечания.* 1°. В дальнейшем изложении фигурируют функции  $\lambda(\xi)$  и  $\mu(\eta)$ , представляющие собой обращения интегралов (2.1). Для сокращения записи аргумент этих функций опускается.

2°. Величины (2.1) являются локальными координатами на  $S^2$  (правда, теряющими однозначность при переходе через координатные сечения, но на отыскании критических значений (1.17) это не сказывается) всюду, кроме точек  $\lambda = \mu = b$ . Последние должны быть исследованы отдельно. Такое исследование здесь не приводится, поскольку выясняется, что полу-

ченные в результате него соотношения включены в общие соотношения, найденные при условии  $\lambda \neq \mu$ .

3°. Можно показать, что если  $z \in T(S^2)$  — критическая точка отображения (1.17), то существует касательный вектор  $z' \in T(S^2)$ , приложенный в первом октанте сферы (1.5), также критический для (1.17), причем  $I(z) = I(z')$ . В силу этого все дальнейшие вычисления проделаны для точек первого октанта.

4°. Будем считать параметр  $s$  строго положительным. При  $s = 0$  вычисления значительно упрощаются. Ограничимся тем, что укажем ниже, как соответствующее множество  $\Sigma$  получается из общего случая при  $s \rightarrow 0$ .

Выразим функции (1.13), (1.14) в переменных (2.1) (см. замечания 1°, 3°)

$$(2.2) \quad 2H = \frac{\lambda - \mu}{4\lambda\mu} (\xi^2 + \eta^2) + \frac{abcs^2}{\lambda\mu} + \lambda\mu$$

$$(2.3) \quad 2K = \frac{\lambda - \mu}{4\lambda^2\mu^2} (\lambda\xi^2 + \mu\eta^2) - \frac{s}{\lambda^2\mu^2} [\lambda\sqrt{\lambda g(\mu)}\xi - \mu\sqrt{\mu f(\lambda)}\eta] + \\ + \frac{s^2}{\lambda^2\mu^2} [(bc + ca + ab)\lambda\mu - abc(\lambda + \mu)] + \lambda + \mu - (a + b + c)$$

Рассмотрим функцию

$$2.4) \quad H - \sigma K$$

с неопределенным множителем Лагранжа (неопределенный множитель перед  $H$  взят равным единице, поскольку все критические точки функции  $K$  оказываются критическими и для  $H$ ). Критические точки (1.17) совпадают с критическими точками (2.4), найденными при всевозможных значениях  $\sigma$ . Приравняем нулю градиент (2.4) по переменным  $\xi, \eta, \xi', \eta'$ , получим

$$(2.5) \quad (\sigma - \mu)(\lambda - \mu)\xi' = 2s\sigma\sqrt{\lambda g(\mu)}$$

$$(\lambda - \sigma)(\lambda - \mu)\eta' = 2s\sigma\sqrt{\mu f(\lambda)}$$

$$(2.6) \quad \left\{ \frac{\sigma - \mu}{4\lambda^2\mu} \xi^2 - \frac{\lambda\mu + (\lambda - 2\mu)\sigma}{4\lambda^3\mu} \eta^2 + \frac{s\sigma\sqrt{g(\mu)}}{2\lambda\mu^2\sqrt{\lambda}} \xi - \frac{2s\sigma\sqrt{f(\lambda)}}{\lambda^3\sqrt{\mu}} \eta + \right. \\ \left. + \frac{s^2}{\lambda^2\mu} \left[ abc - (bc + ca + ab)\sigma + \frac{abc\sigma}{\lambda\mu} (\lambda + 2\mu) \right] + \sigma - \mu \right\} \sqrt{f(\lambda)} + \\ + \frac{s\sigma f'(\lambda)}{2\lambda^2\sqrt{\mu}} \eta' = 0$$

$$\left\{ \frac{\lambda\mu - (2\lambda - \mu)\sigma}{4\lambda\mu^3} \xi^2 + \frac{\lambda - \sigma}{4\lambda\mu^2} \eta^2 + \frac{2s\sigma\sqrt{g(\mu)}}{\mu^3\sqrt{\lambda}} \xi - \frac{s\sigma\sqrt{f(\lambda)}}{2\lambda^2\mu\sqrt{\mu}} \eta + \right. \\ \left. + \frac{s^2}{\lambda\mu^2} \left[ abc - (bc + ca + ab)\sigma + \frac{abc\sigma}{\lambda\mu} (2\lambda + \mu) \right] - (\lambda - \sigma) \right\} \times \\ \times \sqrt{g(\mu)} - \frac{s\sigma g'(\mu)}{2\mu^2\sqrt{\lambda}} \xi' = 0$$

При условии  $f(\lambda) = g(\mu) = 0$  получаем следующий набор критических точек:

$$(2.7) \quad \lambda = b, \mu = c, \xi' = \eta' = 0$$

$$\lambda = a, \mu = c, \xi' = \eta' = 0$$

$$\lambda = a, \mu = b, \xi' = \eta' = 0$$

(это есть не что иное, как упомянутые критические точки самих функций  $K$  и  $H$ ).

Пусть

$$(2.8) \quad f^2(\lambda) + g^2(\mu) \neq 0$$

Легко показать, что при этом

$$(2.9) \quad \sigma \neq \lambda, \quad \sigma \neq \mu$$

и, следовательно

$$(2.10) \quad \xi = \frac{2s\sigma \sqrt{\lambda g(\mu)}}{(\lambda - \mu)(\sigma - \mu)}, \quad \eta = \frac{2s\sigma \sqrt{\mu f(\lambda)}}{(\lambda - \mu)(\lambda - \sigma)}$$

При подстановке значений (2.10) уравнения (2.6) сведутся к одному  $(\lambda - \sigma)^2 (\sigma - \mu)^2 = s^2 f(\sigma)$ .

Обозначая  $F(\sigma) = \sqrt{f(\sigma)}$ , из последнего соотношения имеем

$$(2.11) \quad (\lambda - \sigma)(\sigma - \mu) = sF(\sigma)$$

если  $\mu < \sigma < \lambda$  (напомним, что  $s > 0$ ), и

$$(2.12) \quad (\lambda - \sigma)(\sigma - \mu) = -sF(\sigma)$$

если  $\sigma < \mu$  или  $\sigma > \lambda$ .

Обозначим через  $U^+(\lambda, \mu)$  множество корней уравнения (2.11), а через  $U^-(\lambda, \mu)$  — множество корней уравнения (2.12), на которых выполнено (2.8), (2.9), и пусть

$$U^+ = \bigcup_{\lambda, \mu} U^+(\lambda, \mu), \quad U^- = \bigcup_{\lambda, \mu} U^-(\lambda, \mu)$$

Подстановка (2.10), (2.11) в функции (2.2), (2.3) приводит к следующим параметрическим уравнениям:

$$(2.13) \quad h = \frac{\sigma^2}{2} - s[F(\sigma) - \sigma F'(\sigma)]$$

$$k = \sigma + sF'(\sigma) - \frac{a + b + c}{2}$$

при этом  $\sigma$  пробегает множество  $U^+$ . Точку множества  $\Sigma$ , определяемую равенствами (2.13), обозначим через  $\Sigma^+(\sigma)$ .

Поясним соответствующую выкладку. Внося значения (2.10) в (2.2), получаем

$$2h = \frac{s^2}{(\lambda - \sigma)^2 (\sigma - \mu)^2} \{abc [3\sigma^2 - 2(\lambda + \mu)\sigma + \lambda\mu] - (bc + ca + ab) \times \\ \times [2\sigma - (\lambda + \mu)] \sigma^2 + (a + b + c)(\sigma^2 - \lambda\mu) \sigma^2 - [(\lambda + \mu)\sigma - 2\lambda\mu] \sigma^3\} + \lambda\mu$$

Выражение в фигурных скобках представимо в виде

$$\left\{ (\lambda - \sigma)(\sigma - \mu) \frac{df(\sigma)}{d\sigma} - f(\sigma) \frac{d}{d\sigma} [(\lambda - \sigma)(\sigma - \mu)] \right\} \sigma - f(\sigma)(\lambda - \sigma)(\sigma - \mu)$$

Используя тождество

$$\lambda\mu = \sigma^2 - (\lambda - \sigma)(\sigma - \mu) + \sigma \frac{d}{d\sigma} [(\lambda - \sigma)(\sigma - \mu)]$$

и равенство (2.11), приходим к первому соотношению (2.13).

Вычислим значения функции (2.3) в точках (2.10)

$$2k = \frac{s^2}{(\lambda - \sigma)^2 (\sigma - \mu)^2} \left\{ (\lambda - \sigma)(\sigma - \mu) \frac{df(\sigma)}{d\sigma} - f(\sigma) \frac{d}{d\sigma} [(\lambda - \sigma)(\sigma - \mu)] \right\} + \\ + \lambda + \mu - (a + b + c)$$

С учетом тождества

$$\lambda + \mu = 2\sigma + \frac{d}{d\sigma} [(\lambda - \sigma)(\sigma - \mu)]$$

находим

$$2k = 2\sigma + \frac{s^2}{(\lambda - \sigma)(\sigma - \mu)} \frac{df(\sigma)}{d\sigma} + \left[ 1 - \frac{s^2 f(\sigma)}{(\lambda - \sigma)^2 (\sigma - \mu)^2} \right] \times \\ \times \frac{d}{d\sigma} [(\lambda - \sigma)(\sigma - \mu)] - (a + b + c)$$

Подстановка (2.11) в полученное равенство приводит к второму соотношению (2.13).

Аналогично показывается, что каждому значению  $\sigma \in U^-$  соответствует точка множества  $\Sigma$ , определяемая системой

$$(2.14) \quad h = \frac{\sigma^2}{2} + s[F(\sigma) - \sigma F'(\sigma)]$$

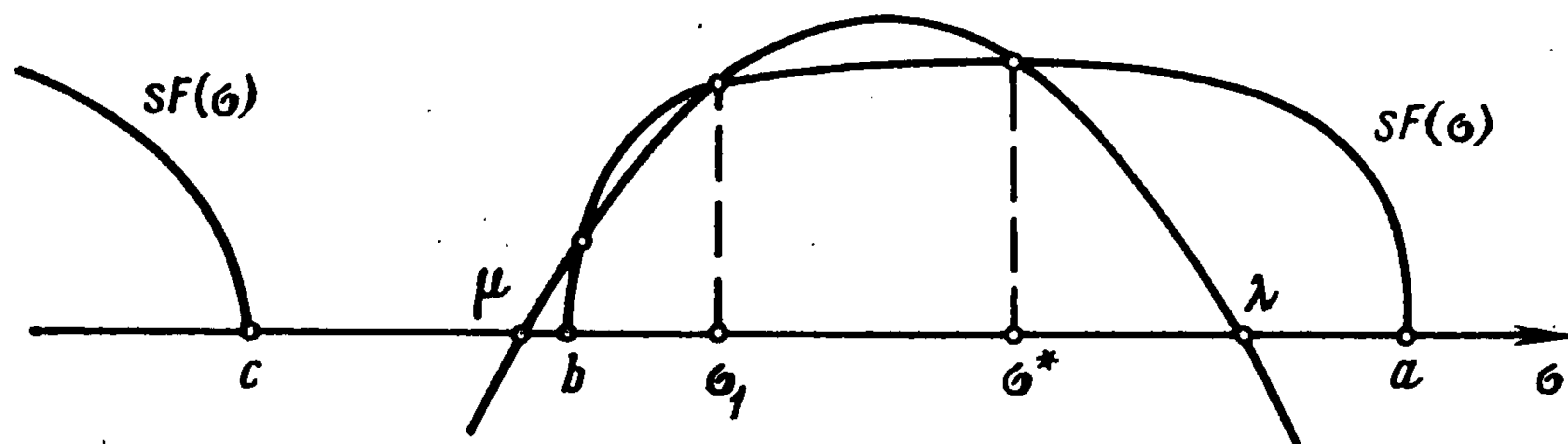
$$k = \sigma - sF'(\sigma) - \frac{a + b + c}{2}$$

и обозначаемая  $\Sigma^-(\sigma)$ .

Окончательно

$$\Sigma = \Sigma^+ \cup \Sigma^-, \quad \Sigma^\pm = \bigcup_{\sigma \in U^\pm} \Sigma^\pm(\sigma)$$

*Замечание.* Равенства (2.13), (2.14) являются частными случаями системы (2.5) работы [6]. Эта система описывает кривую кратных корней в задаче с разделяющимися



Фиг. 1

переменными и определяет, по существу, бифуркацию некоторых квадратичных интегралов. В задаче, изучаемой в данной работе, при  $s \neq 0$  переменные разделить не удастся<sup>1</sup>. Можно предположить, что уравнения, аналогичные (2.5) [6], всегда возникают при исследовании механических систем, допускающих полный набор квадратичных (не обязательно квадратично-однородных) первых интегралов в инволюции.

**3. Построение множества  $\Sigma$  при малых значениях постоянной площадей.** Отметим три узловые точки множества  $\Sigma$ , соответствующие (2.7)

$$P_a = (1/2 (s^2 - a), 1/2 (as^2 + bc))$$

$$P_b = (1/2 (s^2 - b), 1/2 (bs^2 + ca))$$

$$P_c = (1/2 (s^2 - c), 1/2 (cs^2 + ab))$$

Выясним структуру множеств  $U^\pm$ , считая величину  $s > 0$  достаточно малой. Последнее условие в дальнейшем специально не оговаривается — необходимые оценки каждый раз могут быть легко получены.

<sup>1</sup> См. Харламов М. П. О разделении переменных в задаче Клебша. Тезисы докладов 6-й Казахской межвуз. конф. по матем. и механ., ч. 2. Механика, Алма-Ата, 1977.

Уравнение (2.11) имеет не более трех корней, при этом все они лежат на отрезке  $[b, a]$  (см. фиг. 1). Обозначим через  $\sigma^*(\lambda, \mu, s)$  максимальный корень (2.11). Имеем

$$(3.1) \quad \sigma^*(\lambda, \mu, 0) = \lambda$$

*Лемма*

$$\max_{\lambda, \mu} \sigma^*(\lambda, \mu, s) = \sigma^*(a, c, s) < a$$

Утверждение очевидно, если заметить, что все параболы  $\zeta = (\lambda - \sigma)(\sigma - \mu)$  на плоскости  $\zeta\sigma$  конгруэнтны. Кроме того, используя (3.1), найдем

$$\sigma^*(a, c, s) = a - s^2 \frac{a-b}{a-c} + o(s^2)$$

что меньше  $a$  при малых  $s$ .

Значения  $\sigma^*(\lambda, \mu, s)$  целиком заполняют отрезок  $[b, \sigma^*(a, c, s)]$ , поэтому другие корни (2.11), существующие, когда  $\mu$  достаточно близко к  $b$ , не добавляют новых точек в  $\Sigma^+$ .

Окончательно,  $U^+ = (b, \sigma^*(a, c, s)]$ . Значение  $\sigma = b$  не включено в  $U^+$ , поскольку при этом либо  $\mu = b$ , либо  $\lambda = b$ , и вступает в силу условие (2.9). Значение  $\sigma = \sigma^*(a, c, s)$  формально не содержится в  $U^+$ , так как нарушено (2.8). Однако, воспользовавшись равенствами (2.5) и очевидным неравенством  $f(\sigma^*(a, c, s)) \neq 0$ , получаем

$$(3.2) \quad \lim_{\sigma \nearrow \sigma^*(a, c, s)} \Sigma^+(\sigma) = P_b \in \Sigma$$

Ниже аналогичные пределы вычисляются без дополнительных оговорок.

Рассмотрим уравнение (2.12). Оно имеет ровно один корень  $\sigma_*(\lambda, \mu, s)$  на полуинтервале  $(b, a]$  и самое большее два корня

$$(3.3) \quad \sigma_0(\lambda, \mu, s) \leq \sigma^0(\lambda, \mu, s)$$

в области  $\sigma \leq c$ . Как и в предыдущем случае, можно показать, что значения (3.3) целиком заполняют отрезок  $[\sigma_0(b, c, s), c]$ , а  $\sigma_*(\lambda, \mu, s)$  меняется в пределах  $b < \sigma_*(b, c, s) \leq \sigma_*(\lambda, \mu, s) \leq a$ . Поэтому

$$U^- = [\sigma_0(b, c, s), c] \cup [\sigma_*(b, c, s), a]$$

Значения  $\sigma = c$ ,  $\sigma = a$ , а также  $\sigma = b$ , являющееся корнем (2.12) при  $\lambda = b$ , исключены согласно (2.9). Значения  $\sigma = \sigma_0(b, c, s)$  и  $\sigma = \sigma_*(b, c, s)$  считаем принадлежащими  $U^-$ , поскольку

$$(3.4) \quad \lim_{\sigma \searrow \sigma_0(b, c, s)} \Sigma^-(\sigma) = \lim_{\sigma \searrow \sigma_*(b, c, s)} \Sigma^-(\sigma) = P_a \in \Sigma$$

Перейдем к построению  $\Sigma$ . Обозначим через  $\sigma_1(a, b, s)$  корень уравнения (2.11) при  $\lambda = a$ ,  $\mu = b$ , отличный от  $\sigma^*(a, b, s)$ . Такой корень существует при малых  $s$  и является единственным (см. фиг. 1). Имеем  $\Sigma^+(\sigma_1(a, b, s)) = \Sigma^+(\sigma^*(a, b, s)) = P_c$ , и, следовательно, кривая  $\Sigma^+$  обладает самопересечением.

На интервале  $\sigma_1(a, b, s) < \sigma < \sigma^*(a, b, s)$  кривая  $\Sigma^+$  имеет две точки возврата, в чем можно убедиться, разрешая уравнение  $1 + sF''(\sigma) = 0$  в

виде рядов по  $s$  и сравнивая решения с разложениями величин  $\sigma_1(a, b, s)$  и  $\sigma^*(a, b, s)$ , полученными с учетом (3.1). Асимптотой  $\Sigma^+$  ( $\sigma$ ) при  $\sigma \searrow b$  служит прямая

$$(3.5) \quad h = b \left( k + \frac{c+a}{2} \right)$$

Кривая  $\Sigma^-$  ( $\sigma$ ) имеет угловую точку  $P_a$  (см. (3.4)) и асимптоты

$$(3.6) \quad h = a \left( k + \frac{b+c}{2} \right) \quad \text{при } \sigma \nearrow a$$

$$(3.7) \quad h = c \left( k + \frac{a+b}{2} \right) \quad \text{при } \sigma \nearrow c$$

Прямые (3.5) — (3.7) служат касательными к параболе

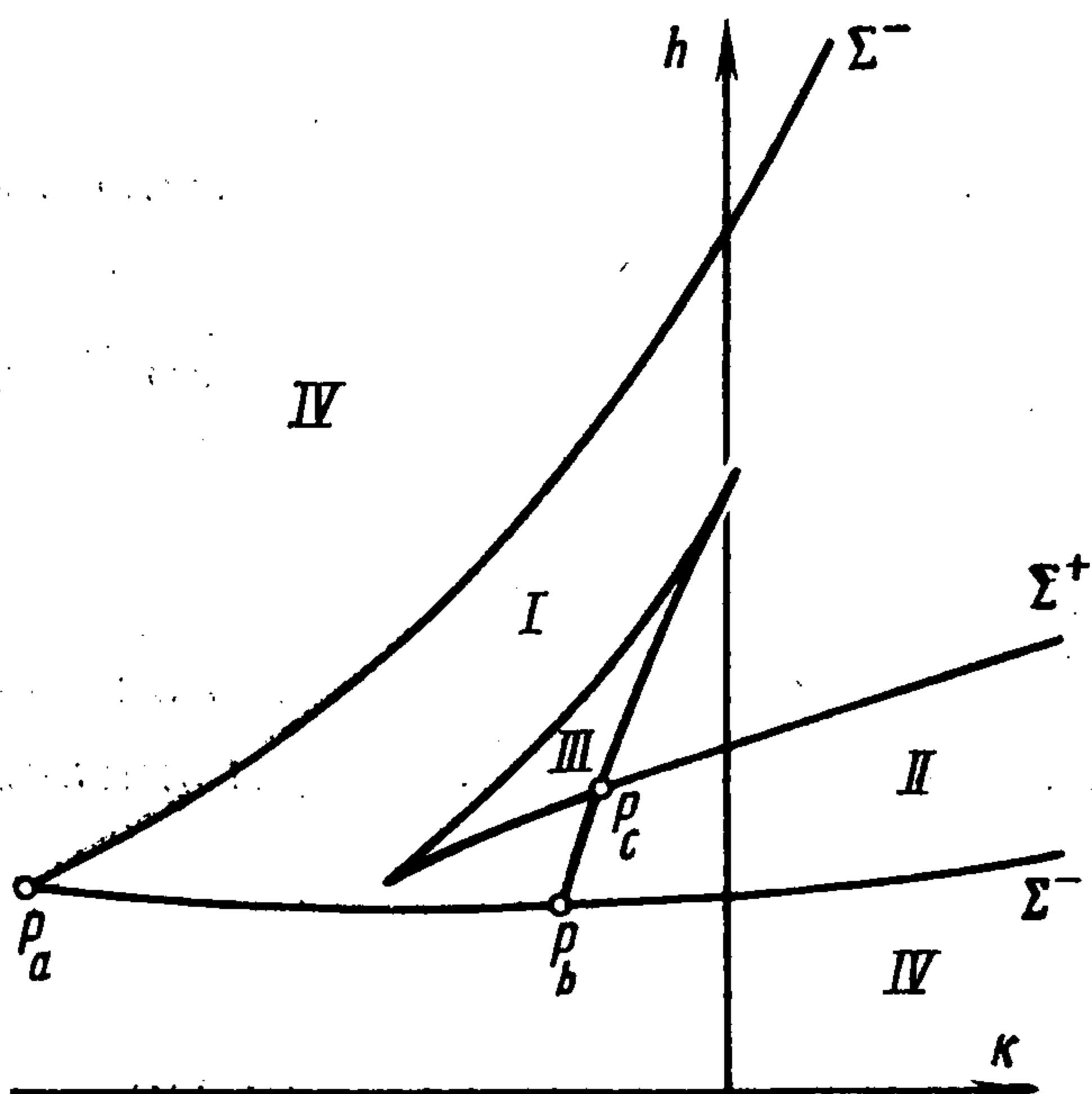
$$(3.8) \quad h = \frac{1}{2} \left( k + \frac{a+b+c}{2} \right)^2$$

в точках

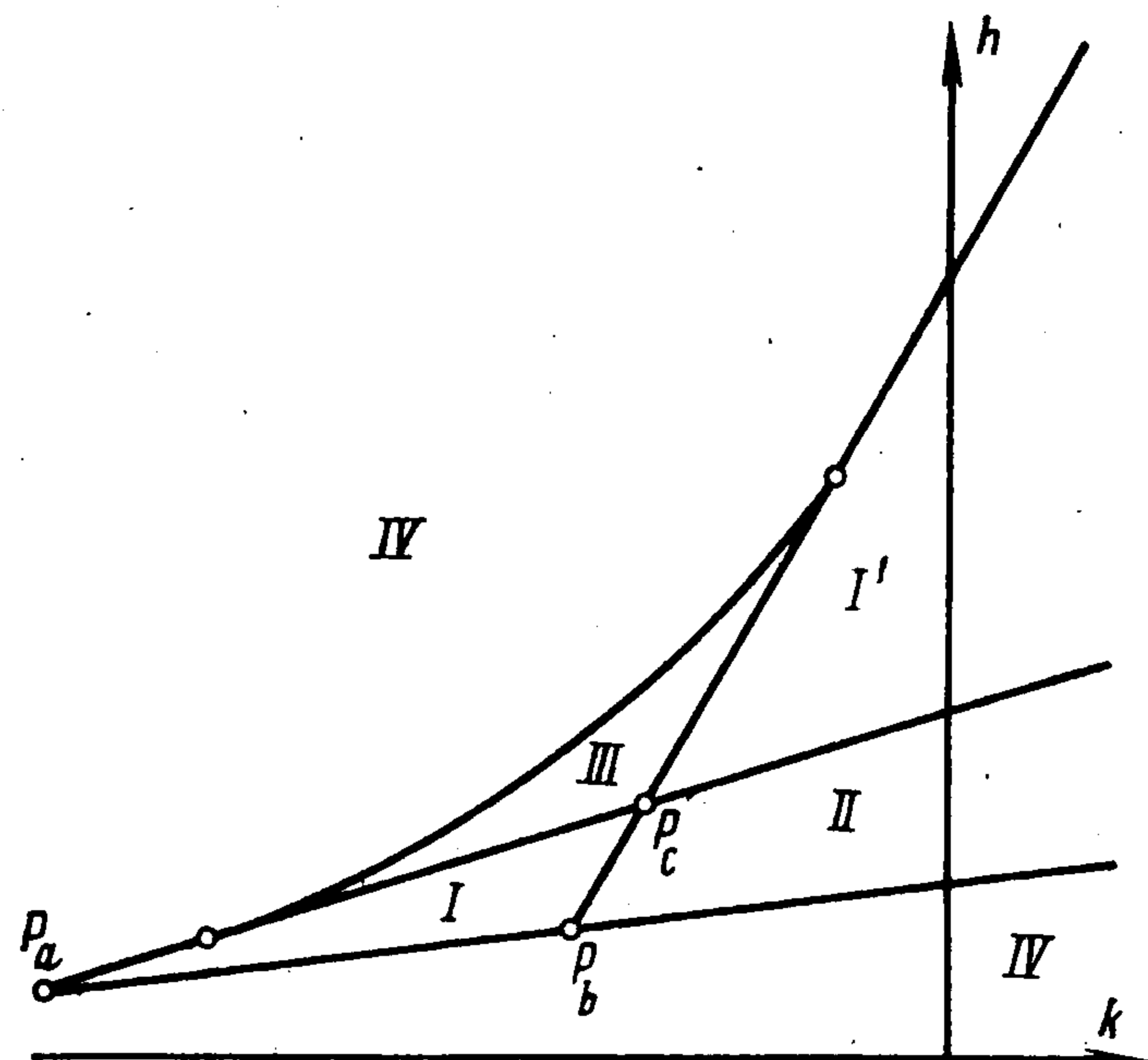
$$k = \frac{b-(c+a)}{2}, \quad k = \frac{a-(b+c)}{2}, \quad k = \frac{c-(a+b)}{2}$$

Отметим, наконец, что значение  $\sigma_0(a, c, s) \in U^-$ . При этом  $\Sigma^-(\sigma_0(a, c, s)) = P_b$ , так что, в силу (3.2), точка  $P_b$  — общая для  $\Sigma^+$  и  $\Sigma^-$ .

Суммируя сказанное, получаем множество, изображенное на фиг. 2.



Фиг. 2



Фиг. 3

Пусть  $s \rightarrow 0$ . Точка  $P_a$  при таком стремлении переходит в точку пересечения прямых (3.5) и (3.7), точка  $P_b$  — в точку пересечения прямых (3.6), (3.7), а точка  $P_c$  — в точку пересечения прямых (3.5), (3.6). Отрезок кривой  $\Sigma^+$  между точками возврата «склеивается» с отрезком параболы (3.8) в пределах

$$(3.9) \quad \frac{b-(c+a)}{2} \leq k \leq \frac{a-(b+c)}{2}$$

Остальная часть  $\Sigma$  вырождается в лучи, лежащие на прямых (3.5) — (3.7). В результате получаем множество, изображенное на фиг. 3.

*Замечание.* При  $s = 0$  равенства (2.13), (2.14) описывают лишь часть множества  $\Sigma$  (а именно, отрезок параболы (3.8)). Это происходит вследствие того, что остальные критические значения отображения  $I$  достигаются в этом случае в точках, где  $f(\lambda) = g(\mu) = 0$ , и могут быть найдены из уравнений (2.5), (2.6).

**4. Структура интегральных многообразий.** Как уже отмечалось, при  $(k, h) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$  связные компоненты многообразий  $I_{k,h}$  — двумерные торы. Выясним связность  $I_{k,h}$  для различных областей  $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$ .

Бифуркационное множество разбивает плоскость  $\mathbb{R}^2$  на четыре связных области I — IV при  $s \neq 0$  и на пять связных областей I, I', II — IV при  $s = 0$ . Область IV в обоих случаях содержит точки с большими по абсолютной величине отрицательными координатами, а так как функции  $K$  и  $H$  ограничены снизу, то для  $(k, h)$ , принадлежащих области IV, множество  $I_{k,h}$  пусто.

При больших положительных  $k, h$  в изучаемой задаче имеют место «быстрые вращения», так что приведенная система стандартным приемом может быть истолкована как возмущение приведенной системы задачи Эйлера — Пуансо. При этом интеграл Клебша «отщепляется» от интеграла модуля вектора момента количества движения. В случае Эйлера — Пуансо все некритические интегральные многообразия имеют две связные компоненты [7]. В силу теоремы Морса [8] это свойство сохранится при малых возмущениях интегрального отображения. Следовательно, при малых  $s \neq 0$  в областях I, II имеем  $I_{k,h} = 2T^2$ . Устремляя  $s$  к нулю и замечая, что рассматриваемые многообразия остаются некритическими, получим, что  $I_{k,h} = 2T^2$  в областях I, I', II при  $s = 0$ .

Несколько сложнее обстоит дело с областью III. Из соображений типа теоремы Морса следует, что связность  $I_{k,h}$  при  $s = 0$  и при  $0 < s \ll 1$  одна и та же. Воспользуемся тем, что при  $s = 0$  многообразия  $I_{k,h}$  могут быть найдены явно.

Действительно, из (1.16) с учетом (2.2), (2.3) при  $s = 0$  находим

$$2k + a + b + c - \left(\lambda + \frac{2h}{\lambda}\right) = \frac{(\lambda - \mu)^2}{4\lambda^2\mu^2} \zeta^2 \geq 0$$

$$\mu + \frac{2h}{\mu} - 2k - (a + b + c) = \frac{(\lambda - \mu)^2}{4\lambda^2\mu^2} \eta^2 \geq 0$$

Поэтому движение происходит в области

$$(4.1) \quad \frac{2h}{\lambda} + \lambda \leq 2k + a + b + c \leq \frac{2h}{\mu} + \mu$$

Условие того, что  $(k, h)$  принадлежит области III, определяется неравенствами (3.9) и

$$\max \left[ b \left( k + \frac{c+a}{2} \right), a \left( k + \frac{b+c}{2} \right) \right] < h < \frac{1}{2} \left( k + \frac{a+b+c}{2} \right)^2$$

(см. фиг. 3), откуда заключаем, что область (4.1) состоит из двух колец

$$(4.2) \quad b < k_1 - \sqrt{k_1^2 - 2h} \leq \lambda \leq k_1 + \sqrt{k_1^2 - 2h} < a$$

( $\mu$  — любое,  $2k_1 = 2k + a + b + c$ ), расположенных симметрично относительно сечения сферы (1.5) плоскостью  $v_1 = 0$ . Приведенная система

при  $s = 0$  натуральна, и движение по каждому из колец (4.2) происходит в двух направлениях. Кольцо с фиксированным направлением движения дает в фазовом пространстве связное многообразие — двумерный тор. Окончательно,  $I_{k,h} = 4T^2$ . В силу сказанного выше, последнее равенство имеет место для  $(k, h)$ , принадлежащих области III, и для достаточно малых значений  $s$ .

*Замечание.* С использованием параметрических уравнений (2.13), (2.14) множество  $\Sigma$  может быть построено для произвольных значений постоянной площадей. При этом, начиная с некоторого  $s_0 > 0$ , оно оказывается более простым, чем множество, изображенное на фиг. 2 (точки возврата и самопересечения кривой  $\Sigma^+$  исчезают). Анализ соответствующих интегральных многообразий не составит труда. По-видимому, наибольший интерес представляет исследование критических интегральных поверхностей, поскольку движения на них носят нетривиальный характер.

В заключение отметим работу [9], в которой для общей задачи о движении тела с неподвижной точкой в ньютоновском поле найдены бифуркации функций (1.7), (1.8). При этом интегральные многообразия трехмерны, и понизить их размерность невозможно из-за отсутствия первого интеграла (1.9). Предложенный выше метод доводит исследование фазовой топологии до конца в случае, когда центр масс совпадает с закрепленной точкой.

Поступила 2 VI 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Clebsch R. F. A. Uber die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit. Math. Ann., 1870, Bd 3, S. 238—262.
2. Колосов Г. В. О некоторых видоизменениях начала Гамильтона в применении к решению вопросов механики твердого тела. С.-Пб., 1903.
3. Харламов М. П. Понижение порядка в механических системах с симметрией. В сб.: Механика твердого тела, вып. 8. Киев, «Наукова думка», 1976, стр. 4—18.
4. Татаринов Я. В. К исследованию фазовой топологии компактных конфигураций с симметрией. Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., 1973, № 5.
5. Арнольд В. И. Об одной теореме Лиувилля, касающейся интегрируемых проблем динамики. Сиб. матем. ж., 1963, т. 4, № 2.
6. Алексеев В. М. Обобщенная пространственная задача двух неподвижных центров. Классификация движений. Бюл. Ин-та теор. астрон. АН СССР, 1965, т. 10, № 4.
7. Харламов М. П. Интегральные многообразия приведенной системы в задаче о движении по инерции твердого тела с неподвижной точкой. В сб.: Механика твердого тела, вып. 8. Киев, «Наукова думка», 1976, стр. 18—23.
8. Милнор Дж. Теория Морса. М., «Мир», 1965.
9. Татаринов Я. В. Портреты классических интегралов задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки. Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., 1974, № 6.