

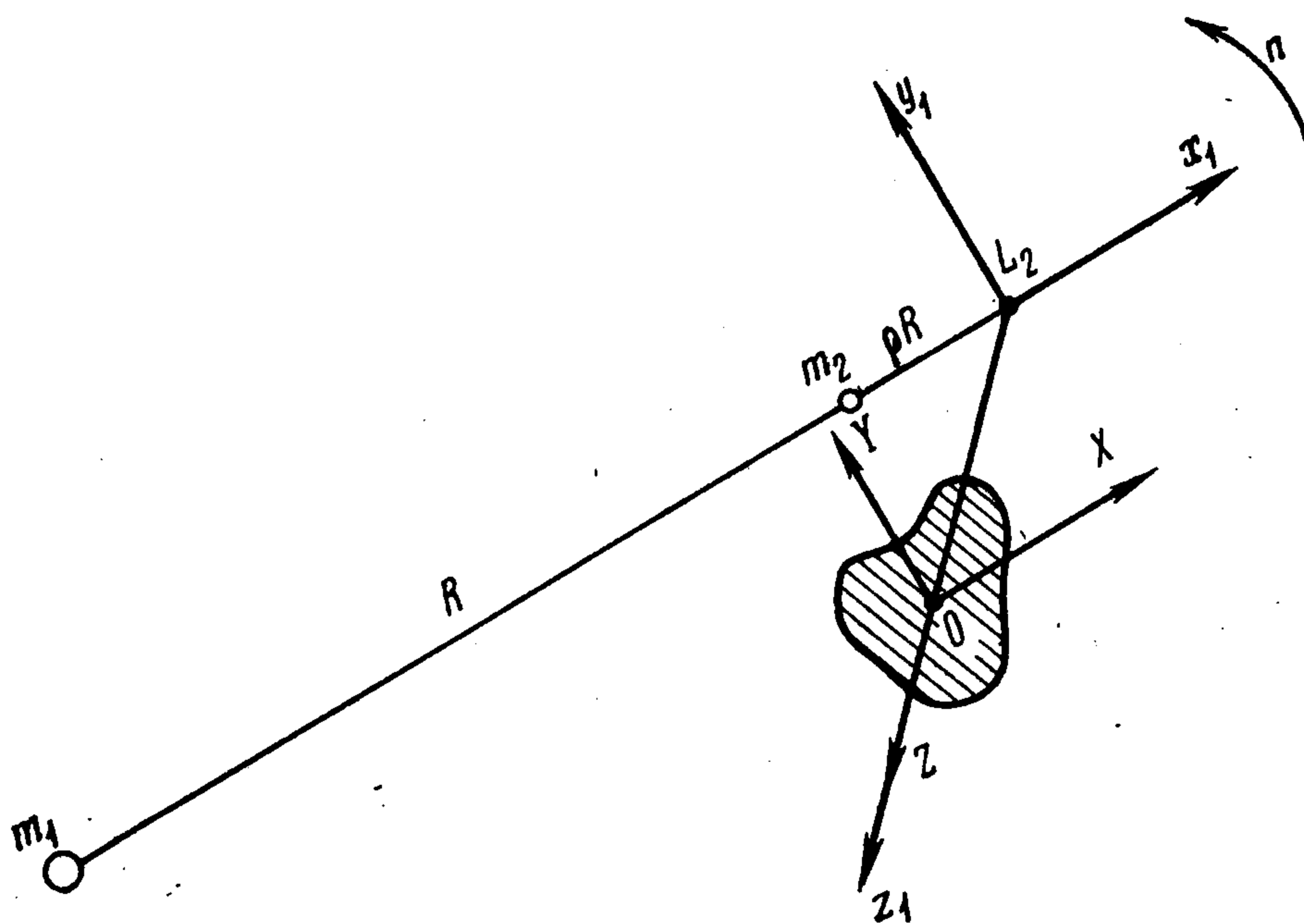
## О СТАЦИОНАРНЫХ ВРАЩЕНИЯХ ТВЕРДОГО ТЕЛА НА ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ОРБИТЕ ВБЛИЗИ КОЛЛИНЕАРНОЙ ТОЧКИ ЛИБРАЦИИ

А. П. Маркеев

(Москва)

Рассматривается задача о движении динамически симметричного твердого тела относительно центра масс вблизи коллинеарной точки либрации  $L_2$  ограниченной круговой задачи трех тел (материальных точек). Предполагается, что периодическая орбита центра масс твердого тела представляет собой отрезок прямой, перпендикулярной плоскости вращения основных притягивающих масс и проходящей через  $L_2$ . Найдено два типа стационарных в орбитальной системе координат вращений твердого тела и исследована их устойчивость в первом приближении.

1. **Постановка задачи.** Вращательное движение твердого тела, центр масс которого движется по периодической орбите вблизи коллинеарной точки либрации  $L_2$ , происходит под действием гравитационных моментов, обусловленных материальными точками  $m_1$  и  $m_2$ . Линейные размеры тела малы по сравнению с расстояниями от его центра масс  $O$  до точек  $m_1$  и  $m_2$ , поэтому считается, что движение твердого тела относительно центра масс не влияет на движение самого центра масс. Будем предполагать, что орбита центра масс  $O$  твердого тела описывается в рамках круговой ограниченной задачи трех тел (точнее, трех точек  $m_1$ ,  $m_2$  и  $O$ ).



На фигуре изображена система координат  $L_2 x_1 y_1 z_1$ . Ее ось  $L_2 x_1$  направлена вдоль линии  $m_1 m_2$ , ось  $L_2 y_1$  расположена в плоскости движения основных притягивающих масс  $m_1$  и  $m_2$  и направлена в сторону их вращения, ось  $L_2 z_1$  дополняет оси  $L_2 x_1$  и  $L_2 y_1$  до правой системы координат. Направле-

ние вращения  $m_1$  и  $m_2$  указано стрелкой, через  $n$  обозначена величина угловой скорости вращения  $m_1$  и  $m_2$ ; для системы Земля — Луна  $n = 0.23$  рад/сут, что соответствует периоду (сидерическому месяцу) обращения Луны вокруг Земли, равному 27.3 сут. Через  $R$  обозначено расстояние между точками  $m_1$  и  $m_2$ , а через  $\rho R$  — расстояние от  $m_2$  до  $L_2$ . Величина  $\rho$  — корень многочлена пятой степени с коэффициентами, зависящими от  $\mu$ . Для системы Земля — Луна  $\mu = m_2 / (m_1 + m_2) = 0.01215$  и  $\rho = 0.1678$ .

В круговой ограниченной задаче трех материальных точек во вращающейся вместе с  $m_1$  и  $m_2$  системе координат существуют два близких к  $L_2$  дупараметрических семейства периодических движений точки бесконечно малой массы [1] (в рассматриваемом случае это будет центр масс  $O$  твердого тела). Если в уравнениях движения ограниченной задачи трех точек пренебречь нелинейными членами относительно отклонений от  $L_2$ , то траектория одного из упомянутых периодических движений будет представлять собой отрезок прямой, перпендикулярной плоскости вращения точек  $m_1$  и  $m_2$  и проходящей через  $L_2$ . Уравнение этой траектории запишем в виде

$$(1.1) \quad x_1 \equiv 0, \quad y_1 \equiv 0, \quad z_1 = \varepsilon R \sin \omega_z n t \\ \omega_z = \sqrt{A_2}, \quad A_2 = \frac{1 - \mu}{(1 + \rho)^3} + \frac{\mu}{\rho^3}$$

Здесь  $\varepsilon$  — произвольный малый параметр, являющийся постоянной интегрирования. Другая постоянная интегрирования положена равной нулю.

Для системы Земля — Луна  $\omega_z = 1.786$ , что соответствует периоду движения точки бесконечно малой массы по орбите (1.1), равному 15.3 сут.

Будем считать, что движение центра масс  $O$  твердого тела происходит по орбите (1.1) и во всех уравнениях будем пренебрегать членами, порядок которых относительно  $\varepsilon$  выше первого.

Следует отметить, что периодические движения точки бесконечно малой массы вблизи  $L_2$  неустойчивы. Тем не менее сформулированная задача [о движении твердого тела относительно центра масс интересна не только с теоретической точки зрения, но и с точки зрения ее приложений, так как движение центра масс твердого тела по неустойчивой периодической орбите (1.1) может поддерживаться, например, при помощи управляющего ускорения, вектор которого проходит через центр масс тела. Различные проекты практического использования точек либрации задачи трех тел приведены, например, в [2].

**2. Уравнения движения твердого тела относительно центра масс.** На фигуре изображена орбитальная система координат  $OXYZ$ . Она имеет начало в центре масс твердого тела, который по постановке задачи все время находится на оси  $L_2z_1$ . Направления осей  $OX$ ,  $OY$  и  $OZ$  совпадают с направлениями осей  $L_2x_1$ ,  $L_2y_1$  и  $L_2z_1$  соответственно. Оси  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  не показанной на фигуре, связанной с твердым телом системы координат, совпадают с главными центральными осями инерции тела, причем ось  $Oz$  направлена по оси динамической симметрии тела. Взаимная ориентация связанной и орбитальной систем координат задается углами прецессии  $\psi$ , нутации  $\theta$  и собственного вращения  $\varphi$ .

Уравнения движения твердого тела относительно центра масс запишем в виде уравнений Лагранжа второго рода. Пусть  $A$  — экваториальный, а  $C$  — полярный моменты инерции тела. Тогда кинетическая энергия тела вычисляется по формуле

$$(2.1) \quad T = \frac{1}{2} A (p^2 + q^2) + \frac{1}{2} C r^2$$

где  $p$ ,  $q$  и  $r$  — проекции абсолютной угловой скорости тела на главные центральные оси инерции  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  соответственно. Отметим, что в силу динамической симметрии тела величина  $r = (\psi' + n) \cos \theta + \varphi'$  будет интегралом движения. Положим  $r = r_0 = \text{const}$ .

Силовая функция  $U$  может быть [3] записана в виде

$$(2.2) \quad U = -\frac{3}{2} (C - A) \sum_{i=1}^2 \frac{k_i}{r_i^3} \alpha_i^2$$

где  $\alpha_i$  — косинусы углов между направлениями радиус-векторов  $r_i$  центра масс тела относительно точек  $m_i$  и осью  $Oz$  связанной системы координат,  $k_i = f m_i$ ,  $f$  — универсальная гравитационная постоянная. Имеют место соотношения

$$f(m_1 + m_2) = n^2 R^3, \quad k_1 = (1 - \mu) n^2 R^3, \quad k_2 = \mu n^2 R^3$$

Можно показать, что с точностью до величин порядка  $\varepsilon$  включительно справедливы равенства

$$(2.3) \quad \begin{aligned} r_1 &= (1 + \rho) R, \quad r_2 = \rho R \\ \alpha_1 &= \sin \psi \sin \theta + \frac{\varepsilon}{1 + \rho} \cos \theta \sin \omega_2 n t \\ \alpha_2 &= \sin \psi \sin \theta + \frac{\varepsilon}{\rho} \cos \theta \sin \omega_2 n t \end{aligned}$$

Из соотношений (2.1)–(2.3) получаем функцию Лагранжа  $L = T + U$ , а затем уравнения движения твердого тела относительно центра масс. Не останавливаясь на стандартных вычислениях, приведем окончательный вид этих уравнений

$$(2.4) \quad \begin{aligned} &\sin \theta \psi'' + 2 \cos \theta (\psi' + 1) \theta' - ab \theta' + \\ &+ 3(a - 1) \cos \psi (A_2 \sin \psi \sin \theta + \varepsilon A_3 \cos \theta \sin \omega_2 \tau) = 0 \\ &\theta'' - \sin \theta \cos \theta (\psi' + 1)^2 + ab \sin \theta (\psi' + 1) + \\ &+ 3(a - 1) \sin \psi (A_2 \sin \psi \sin \theta \cos \theta + \\ &+ \varepsilon A_3 \cos 2\theta \sin \omega_2 \tau) = 0 \end{aligned}$$

$$a = \frac{C}{A} \quad (0 \leq a \leq 2), \quad b = \frac{r_0}{n}, \quad A_k = \frac{1 - \mu}{(1 + \rho)^{k+1}} + \frac{\mu}{\rho^{k+1}}$$

$$(k = 2, 3)$$

Штрихом обозначена операция дифференцирования по независимой переменной  $\tau = nt$ .

**3. Два типа стационарных вращений.** Положения равновесия  $\psi = \text{const}$ ,  $\theta = \text{const}$  системы (2.4) (если они существуют) соответствуют стационарным в орбитальной системе координат вращениям твердого тела. Для них ось динамической симметрии тела занимает фиксированное положение в орбитальной системе координат, а само твердое тело вращает-

ся вокруг оси симметрии с постоянной угловой скоростью  $\dot{\varphi} = (b - \cos \theta) n$ .

Рассмотрим вопрос о существовании стационарных вращений. Полагая в уравнениях движения (2.4)  $\dot{\varphi} = \dot{\theta} = \ddot{\varphi} = \ddot{\theta} \equiv 0$ , получаем систему уравнений для нахождения положений равновесия  $\varphi = \text{const}$ ,  $\theta = \text{const}$  (считаем, что  $a \neq 1$ , т. е. эллипсоид инерции твердого тела не является сферой)

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \cos \psi (A_2 \sin \psi \sin \theta + \varepsilon A_3 \cos \theta \sin \omega_z \tau) &= 0 \\ \sin \theta (ab - \cos \theta) + 3(a - 1) \sin \psi (A_2 \sin \psi \sin \theta \cos \theta + \\ + \varepsilon A_3 \cos 2\theta \sin \omega_z \tau) &= 0 \end{aligned}$$

Существенно, что при постоянных значениях углов  $\psi$  и  $\theta$  система (3.1) должна удовлетворяться тождественно по  $\tau$ . Отсюда получаем два типа стационарных вращений твердого тела.

Вращение первого типа существует только при  $b = 0$ , а постоянные значения углов  $\psi_0$ ,  $\theta_0$  удовлетворяют равенствам

$$(3.2) \quad \sin \psi_0 = 0, \quad \cos \theta_0 = 0$$

Для движений (3.2) ось  $Oz$  связанной системы координат лежит на оси  $OY$  орбитальной системы координат. Следовательно, ось симметрии твердого тела во все время движения находится в проходящей через  $L_2$  плоскости, перпендикулярной прямой  $m_1 m_2$ , и остается параллельной плоскости вращения точек  $m_1$  и  $m_2$ . При этом твердое тело не вращается вокруг оси симметрии, а его центр масс совершает периодическое движение по нормали к плоскости орбит точек  $m_1$  и  $m_2$ , проходящей через  $L_2$ .

Стационарное вращение второго типа существует, когда параметры  $a$  и  $b$  связаны соотношением

$$(3.3) \quad ab + [3(a - 1)A_2 - 1] \cos \theta_0 = 0$$

а постоянные значения углов  $\psi_0$ ,  $\theta_0$  удовлетворяют равенствам

$$(3.4) \quad \cos \psi_0 = 0, \quad \cos 2\theta_0 = 0$$

Для движений (3.4) ось  $Oz$  связанной системы координат перпендикулярна оси  $OY$  орбитальной системы и направлена по биссектрисе угла  $XOZ$ . Следовательно, ось симметрии твердого тела во все время движения лежит в плоскости, проходящей через точки  $m_1$  и  $m_2$  перпендикулярно плоскости их вращения и составляет с последней угол  $\pi / 4$ .

В дальнейшем для стационарного вращения первого типа будем принимать  $\psi_0 = \pi$ ,  $\theta_0 = \pi / 2$ , а для стационарного вращения второго типа считаем  $\psi_0 = \pi / 2$ ,  $\theta_0 = \pi / 4$ . Другие значения углов  $\psi_0$ ,  $\theta_0$ , удовлетворяющие равенствам (3.2) и (3.4), сводятся к названным путем изменения направления осей связанной системы координат.

**4. Устойчивость стационарного вращения первого типа.** Рассмотрим устойчивость найденных стационарных вращений твердого тела. Ограничимся исследованием устойчивости в первом приближении. Пусть  $\psi$ ,  $\theta$  обозначают отклонения углов прецессии и нутации от их равновесных значений  $\psi_0$ ,  $\theta_0$ . Для стационарного вращения первого типа система первого

приближения уравнений возмущенного движения будет такой:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \psi'' + 3(a-1)A_2\psi + \varepsilon 3(a-1)A_3 \sin \omega_z \tau \theta &= 0 \\ \theta'' + \theta + \varepsilon 3(a-1)A_3 \sin \omega_z \tau \psi &= 0 \end{aligned}$$

Из (4.1) видно, что при  $\varepsilon = 0$  устойчивость имеет место, если  $a > 1$ . При  $\varepsilon \neq 0$  возможна неустойчивость из-за параметрического резонанса. Пусть  $\omega_1 = \sqrt{3(a-1)A_2}$  и  $\omega_2 = 1$  — частоты собственных колебаний в системе (4.1) при  $\varepsilon = 0$ . В силу того, что при  $\varepsilon = 0$  система (4.1), очевидно, имеет знакоопределенный интеграл энергии, появление неустойчивости при  $\varepsilon \neq 0$  возможно только вблизи таких значений параметров, для которых величины  $2\omega_1$ ,  $2\omega_2$  или  $\omega_1 + \omega_2$  кратны  $\omega_z$  [4].

Можно показать, что при всех  $\mu$  выполняются неравенства  $1.252 < \omega_z < 2$ , поэтому величина  $2\omega_2$  не может быть кратной  $\omega_z$ . Ограничиваясь исследованием только в первом приближении по  $\varepsilon$ , получаем, что неустойчивость в рассматриваемой задаче возможна, если либо  $2\omega_1$ , либо  $\omega_1 + \omega_2$  будут равны  $\omega_z$ . Соответствующие значения параметра  $a$  таковы:

$$(4.2) \quad a_1 = \frac{13}{12}, \quad a_2 = \frac{4\omega_z^2 - 2\omega_z + 1}{3\omega_z^2}$$

При  $\varepsilon \neq 0$  в плоскости  $a$ ,  $\varepsilon$  из точек оси  $a$ , соответствующих значениям  $a_1$  и  $a_2$ , должны, вообще говоря, выходить области неустойчивости. Границы этих областей можно найти, записав, например, систему (4.1) в гамильтоновой форме и применив затем каноническое преобразование, исключаящее из гамильтониана нерезонансные члены. Несложный анализ упрощенного таким путем гамильтониана дает области устойчивости и неустойчивости системы (4.1). Вычисления особенно просты, если при  $\varepsilon = 0$  линейная система уравнений возмущенного движения приведена к уравнениям, описывающим колебания не связанных один с другим осцилляторов, что имеет место в случае уравнений (4.1).

Вычисления показали, что в окрестности  $a = a_1$  в первом приближении по  $\varepsilon$  область неустойчивости не обнаруживается, а в окрестности  $a = a_2$  область неустойчивости обнаруживается уже в первом приближении по  $\varepsilon$ . Ее границы задаются уравнениями

$$(4.3) \quad a = a_2 \pm \varepsilon \frac{(\omega_z - 1)^{3/2}}{3\omega_z^4} A_3$$

Для системы Земля — Луна  $A_3 = 15.8452$ , и границы (4.3) области неустойчивости таковы:

$$a = 1.065 \pm 0.284\varepsilon$$

**5. Устойчивость стационарного вращения второго типа.** Для стационарного вращения второго типа линеаризованные уравнения возмущенного движения имеют вид

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \psi'' + (\gamma + 1)\theta' - \gamma\psi - \varepsilon\gamma A_3 / A_2 \sin \omega_z \tau \psi &= 0 \\ \theta'' - \frac{1}{2}(\gamma + 1)\psi' - \frac{1}{2}(\gamma - 1)\theta - \varepsilon 2\gamma A_3 / A_2 \sin \omega_z \tau \theta &= 0 \\ \gamma &= 3(a - 1)A_2 \end{aligned}$$

Рассмотрим сначала устойчивость системы (5.1) при  $\varepsilon = 0$ . Корни ее характеристического уравнения при  $\varepsilon = 0$  будут, как легко проверить, чисто мнимыми, только если выполнено неравенство  $\gamma(\gamma - 1) > 0$ . Это неравенство дает необходимые условия устойчивости системы (5.1) при  $\varepsilon = 0$ . Если  $\gamma(\gamma - 1) \neq 2$ , то это условие будет и достаточным, так как тогда частоты  $\omega_i$  ( $i = 1, 2$ ) линейных колебаний будут различными. Они удовлетворяют уравнению

$$(5.2) \quad 2\omega^4 - (\gamma^2 - \gamma + 2)\omega^2 + \gamma(\gamma - 1) = 0$$

Будем считать, что  $\omega_1 > \omega_2 > 0$ . Тогда

$$(5.3) \quad \begin{aligned} \omega_1 = 1, \quad \omega_2 = [\gamma(\gamma - 1)/2]^{1/2}, \quad 0 < \gamma(\gamma - 1) < 2 \\ \omega_1 = [\gamma(\gamma - 1)/2]^{1/2}, \quad \omega_2 = 1, \quad \gamma(\gamma - 1) > 2 \end{aligned}$$

Области устойчивости удобно также выразить через инерционный параметр  $a$  твердого тела. Получим, что при  $\varepsilon = 0$  имеет место устойчивость, если  $a$  принадлежит одной из двух областей 1 или 2.

Область 1 состоит из двух интервалов

$$0 < a < 1 - 1/(3A_2), \quad 1 - 1/(3A_2) < a < 1$$

Область 2 также состоит из двух интервалов

$$1 + 1/(3A_2) < a < 1 + 2/(3A_2), \quad 1 + 2/(3A_2) < a < 2$$

Отметим, что значения параметров  $a = 1 - 1/(3A_2)$  и  $a = 1 + 2/(3A_2)$  исключены из рассмотрения, так как они соответствуют равным частотам ( $\omega_1 = \omega_2 = 1$ ).

Пусть теперь параметр  $\varepsilon$  отличен от нуля. Для нахождения областей неустойчивости удобно записать уравнения (5.1) в гамильтоновой форме, выбрав канонические переменные так, чтобы при  $\varepsilon = 0$  функция Гамильтона была суммой гамильтонианов не связанных один с другим осцилляторов с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Полагая в рассматриваемом случае

$$\begin{aligned} q_\psi = \psi, \quad q_\theta = \theta \\ p_\psi = \psi' + 1/2(\gamma + 1)\theta, \quad p_\theta = 2\theta' - 1/2(\gamma + 1)\psi \end{aligned}$$

и делая затем по алгоритму работы [5] каноническую замену переменных

$$(5.4) \quad \begin{aligned} q_\psi &= -2(\gamma + 1)[\kappa_1\omega_1q_1 \pm \kappa_2\omega_2q_2] \\ q_\theta &= 2[(\gamma + \omega_1^2)\kappa_1p_1 + (\gamma + \omega_2^2)\kappa_2p_2] \\ p_\psi &= (\gamma + 1)[(\gamma - \omega_1^2)\kappa_1p_1 + (\gamma - \omega_2^2)\kappa_2p_2] \\ p_\theta &= [(\gamma - 1)^2 - 4\omega_1^2]\kappa_1\omega_1q_1 \pm [(\gamma - 1)^2 - 4\omega_2^2]\kappa_2\omega_2q_2 \\ (\kappa_i &= \{4\omega_i | (\gamma + 1)[(\gamma + 2)\omega_i^2 - \gamma^2] | \}^{-1/2}, \quad i = 1, 2) \end{aligned}$$

получим функцию Гамильтона линеаризованных уравнений возмущенного движения в виде

$$(5.5) \quad \begin{aligned} H &= H^0 + \varepsilon H^1 \\ H^0 &= 1/2\omega_1(q_1^2 + p_1^2) \pm 1/2\omega_2(q_2^2 + p_2^2) \\ H^1 &= -2\gamma A_3/A_2 [(\gamma + 1)^2\kappa_1^2\omega_1^2q_1^2 + 4(\gamma + \omega_1^2)^2\kappa_1^2p_1^2 + \\ &+ (\gamma + 1)^2\kappa_2^2\omega_2^2q_2^2 + 4(\gamma + \omega_2^2)^2\kappa_2^2p_2^2 + \\ &+ 8(\gamma + \omega_1^2)(\gamma + \omega_2^2)\kappa_1\kappa_2p_1p_2 \pm \\ &\pm 2(\gamma + 1)^2\kappa_1\kappa_2\omega_1\omega_2q_1q_2] \sin \omega_2\tau \end{aligned}$$

Верхний знак в формулах (5.4) и (5.5) относится к области 1, а нижний — к области 2.

Теперь исследуем задачу о параметрическом резонансе при  $\varepsilon \neq 0$ . Рассмотрим сначала область 1, где при  $\varepsilon = 0$  есть знакоопределенный интеграл энергии  $H^0 = \text{const}$ . В первом приближении по  $\varepsilon$  неустойчивость возможна вблизи тех значений  $a$ , для которых выполнено одно из следующих резонансных соотношений:  $2\omega_1 = \omega_z$ ,  $2\omega_2 = \omega_z$  или  $\omega_1 + \omega_2 = \omega_z$ . Анализ, проведенный с использованием уравнения (5.2), показал, что первое из этих резонансных соотношений в области 1 невозможно, а второе и третье реализуются соответственно при

$$a_3 = 1 + \frac{1 - [1 + 2\omega_z^2]^{1/2}}{6\omega_z^2}, \quad a_4 = 1 + \frac{1 - [1 + 8(\omega_z - 1)^2]^{1/2}}{6\omega_z^2}$$

Границы области неустойчивости, исходящей из точки  $a = a_3$ , как показывают вычисления, описываются уравнениями

$$(5.6) \quad a = a_3 \pm \varepsilon \frac{|\gamma| |4(\gamma + \omega_2^2)^2 - (\gamma + 1)^2 \omega_2^2| \kappa_2^2}{\omega_z^2 |d\omega_2/da|} A_3$$

Для системы Земля — Луна эти уравнения таковы:

$$a = 0.91 \pm 0.008\varepsilon$$

Область неустойчивости, исходящая из точки  $a = a_4$ , имеет такие границы:

$$(5.7) \quad a = a_4 \pm \varepsilon 2 \frac{|\gamma| |4(\gamma + \omega_1^2)(\gamma + \omega_2^2) - (\gamma + 1)^2 \omega_1 \omega_2| \kappa_1 \kappa_2}{\omega_z^2 |d(\omega_1 + \omega_2)/da|} A_3$$

которые для системы Земля — Луна имеют вид

$$a = 0.925 \pm 0.37\varepsilon$$

Теперь рассмотрим область 2, где при  $\varepsilon = 0$  интеграл  $H^0 = \text{const}$  не будет знакоопределенным. В первом приближении по  $\varepsilon$  неустойчивость здесь возможна вблизи тех значений  $a$ , для которых выполняется одно из резонансных соотношений:  $2\omega_1 = \omega_z$ ,  $2\omega_2 = \omega_z$ ,  $\omega_1 - \omega_2 = \omega_z$ . Анализ показал, что первый резонанс в области 2 невозможен, а второй и третий возможны. Соответствующие значения параметра  $a$  следующие:

$$a_5 = 1 + \frac{1 + [1 + 2\omega_z^2]^{1/2}}{6\omega_z^2}, \quad a_6 = 1 + \frac{1 + [1 + 8(\omega_z + 1)^2]^{1/2}}{6\omega_z^2}$$

Границы области неустойчивости, исходящей из точки  $a_5$ , задаются уравнениями (5.7), в которых только надо заменить  $a_3$  на  $a_5$ . Для системы Земля — Луна эти уравнения имеют вид

$$a = 1.194 \pm 7.164\varepsilon$$

Границы области неустойчивости вблизи резонансного значения  $a = a_6$  задаются уравнениями (5.7), в которых надо заменить  $a_4$  на  $a_6$  и  $\omega_2$  на  $-\omega_2$ .

Для системы Земля — Луна эти границы задаются уравнениями

$$a = 1.467 \pm 3.095\varepsilon$$

Поступила 15 VII 1978

## ЛИТЕРАТУРА

1. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М., «Наука», 1964.
  2. Farquhar R. W. Lunar communications with libration-point satellites. J. Spacecraft and Rockets, 1967, vol. 4, No. 10.
  3. Белецкий В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М., «Наука», 1965.
  4. Якубович В. А., Старжинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М., «Наука», 1972.
  5. Маркеев А. П. Решение одной матричной системы в задаче нормализации дифференциальных уравнений Гамильтона. Научн. тр. Моск. авиац. ин-та им. С. Орджоникидзе, 1977, вып. 424.
-