Прикладная математика и механика. Том 43, 1979

УДК 629.195.1

ПЛОСКИЕ РЕЗОНАНСНЫЕ ВРАЩЕНИЯ СПУТНИКА НА ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОРБИТЕ

В. В. Белецкий, Д. Ю. Погорелов

(Москва)

Методом Пуанкаре определяются и исследуются на устойчивость плоские резонансные вращения спутника на эллиптической орбите. Обнаружено, что резонансы типа $k:2$ (k — целое) определяются первым приближением по малому параметру, резонансы типа $k:4$ — вторым приближением, резонансы типа $k:3$ и $k:6$ — третьим. Исследовано влияние приливного момента на существование и устойчивость плоских резонансных вращений.

1. Рассмотрим уравнение плоских колебаний спутника на эллиптической орбите [1]

$$(1.1)\qquad (1+e\cos\nu)\frac{d^2\theta}{d\nu^2}-2e\sin\nu\frac{d\theta}{d\nu}+\frac{n^2}{2}\sin 2\theta=2e\sin\nu$$

Здесь θ — угол между радиус-вектором центра масс спутника и его главной центральной осью инерции, лежащей в плоскости орбиты и отвечающей моменту инерции C; ν — истинная аномалия, e — эксцентриситет орбиты, $n^2=3(A-C)/B$, A, B, C — главные центральные моменты инерции спутника. Будем считать, что $n^2>0$.

К резонансным движениям типа $k:m$ отнесем вращения спутника вида [2]

$$(1.2)\qquad \theta=\nu(k-m)/m+\varphi(\nu)$$

Здесь k — целое, m — натуральное, k и m — взаимно-простые числа; $\varphi(\nu)$ — периодическая функция с периодом $2\pi m$. При движении (1.2) спутник за ms оборотов вокруг планеты сделает ks оборотов вокруг оси, перпендикулярной плоскости орбиты.

Уравнение (1.1) детально исследовано (см., например, [2–10] [1]). Асимптотическими методами [3–5] обнаружены и исследованы резонансы типа $k:2$. Численно найдены резонансы $5:4$ и $7:4$ [2]. Периодические решения уравнения (1.1) исследованы в работах [6–8]. Для отыскания резонансных движений спутника применим метод Пуанкаре малого параметра [11, 12].

Сделаем замену переменных

$$(1.3)\qquad x_1=2\theta-2\nu(k-m)/m,\quad x_2=x_1^{\cdot}$$

[1] *Сарычев В. А., Златоустов В. А.* Периодические колебания спутника в плоскости эллиптической орбиты. М., 1975. Препринт Ин-та прикладной математики АН СССР, № 48.

Введем малый параметр $\mu = -n^2$, считая $(A - C) / B \ll 1$.

При замене (1.3) уравнение (1.1) преобразуется в квазилинейную систему с периодическими коэффициентами периода 2π вида

$$\frac{dx_1}{d\nu} = x_2, \quad (1 + e\cos\nu)\frac{dx_2}{d\nu} = 2e\sin\nu\left(x_2 + 2 + \frac{p}{q}\right) + \tag{1.4}$$
$$+ \mu\sin\left(\frac{p}{q}\nu + x_1\right)$$

Здесь p — целое, q — натуральное, p и q — взаимно-простые числа, $p / q = 2(k - m) / m$.

Резонансные движения спутника определяются периодическими решениями системы (1.4) с периодом $2\pi q$. Назовем систему (1.4) при $\mu = 0$ порождающей. Последняя имеет периодическое (порождающее) решение x_1°, x_2° с периодом 2π, зависящее от произвольного параметра $\alpha \in [0, 2\pi)$, вида

$$x_1^\circ(\nu, \alpha) = \alpha + (p / q + 2)(\tau(\nu) - \nu) \tag{1.5}$$
$$x_2^\circ(\nu) = \left(\frac{p}{q} + 2\right)\left(\frac{(1 - e^2)^{3/2}}{(1 + e\cos\nu)^2} - 1\right)$$

Здесь $\tau(\nu) = \omega_0 t$ — безразмерное время, ω_0 — среднее движение спутника.

Зафиксируем произвольное значение параметра α. Периодическое (с периодом $2\pi q$) решение системы (1.4) с начальными условиями

$$x_1 = x_1^\circ(0, \alpha) + \beta_1 = \alpha + \beta_1, \quad x_2 = x_2^\circ(0) + \beta_2$$

будем искать в виде

$$x_l = x_l(\mu, \beta_1, \beta_2, \alpha, \nu), \quad l = 1, 2 \tag{1.6}$$

Здесь $\beta_1(\mu, \alpha)$, $\beta_2(\mu, \alpha)$ — функции параметра μ, обращающиеся в нуль при $\mu = 0$.

По теореме Пуанкаре решение (1.6) представимо в виде ряда

$$x_l = x_l^\circ + \sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\sum_{i,j=0}^{\infty}a_{kij}^{(l)}\beta_1^i\beta_2^j, \quad k^2 + i^2 + j^2 \neq 0; \; l = 1, 2 \tag{1.7}$$

Коэффициенты $a_{kij}^{(l)}$ определяются из решения задачи

$$\frac{da_{kij}^{(1)}}{d\nu} = a_{kij}^{(2)}, \quad \frac{da_{kij}^{(2)}}{d\nu} = \frac{2e\sin\nu}{1 + e\cos\nu}a_{kij}^{(2)} + f_{kij} \tag{1.8}$$
$$a_{010}^{(1)}(0) = 1, \quad a_{001}^{(2)}(0) = 1$$
$$a_{kij}^{(1)}(0) = 0, (k, i, j) \neq (0, 1, 0); \quad a_{kij}^{(2)}(0) = 0, (k, i, j) \neq (0, 0, 1)$$

Здесь f_{kij} — многочлены, определяющиеся предыдущими приближениями по μ.

Система (1.8) интегрируется в квадратурах. В нулевом приближении по μ имеем

$$a_{010}^{(1)} = 1, \quad a_{001}^{(1)} = (1 + e)^2(1 - e^2)^{-3/2}\tau(\nu) \tag{1.9}$$
$$a_{001}^{(2)} = [(1 + e) / (1 + e\cos\nu)]^2$$
$$a_{0jm}^{(1)} = 0, \quad (j, m) \neq (0, 1), (1, 0)$$
$$a_{0jm}^{(2)} = 0, \quad (j, m) \neq (0, 1)$$

Условие периодичности решения (1.6) имеет вид

$$\psi_l(\mu, \beta_1, \beta_2, \alpha) = [x_l] = 0, \quad l = 1,2$$
$$[x] = x|_{\nu=2\pi q} - x|_{\nu=0}$$

С учетом (1.9) имеем

(1.10) $$\psi_l = \sigma_l + \mu \sum_{k,\, i,\, j=0}^{\infty} [a^{(l)}_{k+1,\, i,\, j}]\, \mu^k \beta_1{}^i \beta_2{}^j = 0$$

$$\sigma_1 = [a^{(1)}_{001}]\beta_2, \quad \sigma_2 = 0$$

Определим β_1 и β_2 из системы (1.10) при условии $\beta_1(0, \alpha) = 0$, $\beta_2(0, \alpha) = 0$. Из (1.10) следует, что якобиан $\{\partial(\psi_1, \psi_2) / \partial(\beta_1, \beta_2)\}_{\mu=0} = 0$ и

(1.11) $$(\partial\psi_1 / \partial\beta_2)_{\mu=0} = [a^{(1)}_{001}] > 0$$

С учетом (1.11) разрешим первое уравнение системы (1.10) относительно β_2:

(1.12) $$\beta_2 = \beta_2(\mu, \beta_1, \alpha), \quad \beta_2(0, 0, \alpha) = 0$$

Из (1.12) и второго уравнения системы (1.10) получим уравнение для определения β_1 [12] в виде

(1.13) $$\psi_2(\mu, \beta_1, \beta_2(\mu, \beta_1, \alpha), \alpha) = \mu^s (P_s(\alpha) + (dP_s / d\alpha)\,\beta_1 + O(\mu, \beta_1^2)) = 0$$

Здесь s — некоторое натуральное число.

Решение уравнения (1.13) относительно β_1 существует при условии

(1.14) $$P_s(\alpha) = 0$$

Каждому значению параметра $\alpha = \alpha^*$, определенному из (1.14), отвечает единственное и аналитическое по μ решение $\beta_1(\alpha^*, \mu)$, если α^* — простое решение уравнения (1.14), т. е.

(1.15) $$(dP_s / d\alpha)_{\alpha=\alpha^*} \neq 0$$

Подставляя найденные значения β_1 и β_2 в (1.7), для каждого значения параметра $\alpha = \alpha^*$ получим единственное периодическое (с периодом $2\pi q$) решение системы (1.4), обращающееся при $\mu = 0$ в порождающее.

2. Исследуем устойчивость полученного решения $x_1(\nu, \alpha^*)$, $x_2(\nu, \alpha^*)$. Рассмотрим для (1.4) систему уравнений в вариациях. Ее характеристическое уравнение в форме Пуанкаре имеет вид [11]

(2.1) $$\det \| X_{ij} \|_{\beta_l = \beta_l(\mu, \alpha^*)} = 0, \; l = 1, 2; \; i, j = 1, 2$$
$$X_{ii} = 1 - \rho + \partial\psi_i / \partial\beta_i; \quad X_{ij} = \partial\psi_i / \partial\beta_j \quad (i \neq j)$$

При $\mu = 0$ уравнение (2.1) имеет корень $\rho = 1$ кратности два, которому соответствует элементарный делитель второго порядка. Согласно [13], в этом случае корни уравнения (2.1) следует искать в виде ряда по степеням $|\mu|^{1/2}$. Будем искать решение характеристического уравнения в виде

(2.2) $$\rho = 1 + |\mu|^{r/2} \rho_1 + |\mu|^{r/2} K(\mu)$$

Здесь $K(0)=0$, r — некоторое натуральное число. Предполагая, что $\rho_1 \neq 0$, запишем уравнение (2.1) с учетом (2.2) в виде

$$|\mu|^r (\rho_1 + K(\mu))^2 - |\mu|^{r/2} I_* (\rho_1 + K(\mu)) + J_* = 0 \tag{2.3}$$

$$I_* = (\partial\psi_1 / \partial\beta_1 + \partial\psi_2 / \partial\beta_2)_{\beta_i = \beta_i(\mu, \alpha^*)}$$

$$J_* = \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial\beta_1}\frac{\partial\psi_2}{\partial\beta_2} - \frac{\partial\psi_1}{\partial\beta_2}\frac{\partial\psi_2}{\partial\beta_1}\right)_{\beta_i=\beta_i(\mu, \alpha^*)}$$

В исследуемом случае для устойчивости периодического решения необходимо $|\rho| = 1$, т. е. ρ_1 — чисто мнимое. Покажем, что для устойчивых движений величина I_* имеет порядок по μ выше, чем r. Пусть $I_* = |\mu|^a \Psi(\mu)$, где $\Psi(0) \neq 0$, $a \leqslant r$. Тогда из (2.3) следует, что либо $\rho_1 = 0$, либо существует корень ρ_1 с отличной от нуля вещественной частью, что противоречит выбору ρ_1 и условию устойчивости. Следовательно, $a > r$. Покажем, что

$$J_* = (-1)^{s+1} |\mu|^s \left.\frac{dP_s}{d\alpha}\right|_{\alpha=\alpha^*} \left.\frac{\partial\psi_1}{\partial\beta_2}\right|_{\mu=0} + O(|\mu|^{s+1}) \tag{2.4}$$

Действительно, из (1.13) следует

$$\partial\psi_2(\mu, \beta_1, \beta_2(\mu, \beta_1, \alpha^*), \alpha^*) / \partial\beta_1 = (-1)^s |\mu|^s (dP_s / d\alpha)_{\alpha=\alpha^*} + O(|\mu|^{s+1}, |\mu|^s \beta_1)$$

С другой стороны

$$\frac{\partial\psi_2}{\partial\beta_1} = \left\{\frac{\partial\psi_2}{\partial\beta_1} + \frac{\partial\psi_2}{\partial\beta_2}\frac{\partial\beta_2}{\partial\beta_1}\right\}, \quad \frac{\partial\beta_2}{\partial\beta_1} = -\left\{\frac{\partial\psi_1/\partial\beta_1}{\partial\psi_1/\partial\beta_2}\right\}$$

Фигурные скобки в двух последних равенствах означают, что после выполнения частного дифференцирования вместо β_2 подставляется (1.12). Из трех последних равенств следует (2.4). Заметим, что из (2.3) и (2.4) следует, что $r = s$. Приравнивая нулю коэффициент при $|\mu|^s$ в уравнении (2.3), с учетом (1.11) получим необходимое условие устойчивости в виде

$$(-1)^s (dP_s / d\alpha)_{\alpha=\alpha^*} < 0 \tag{2.5}$$

Условие (2.5) аналогично достаточному условию устойчивости, полученному в [14] для случая, когда $s = 1$, а уравнение (2.1) при $\mu = 0$ имеет один корень $|\rho^{(1)}| < 1$, другой — $\rho^{(2)} = 1$.

3. Перейдем теперь к отысканию в явном виде условий существования и устойчивости периодических решений системы (1.4), а также к построению этих решений. Учитывая результаты работы [12], ищем периодическое решение системы (1.4) в виде формального ряда

$$x_i = x_i^\circ(\nu, \alpha) + \sum_{\sigma=1}^{\infty} x_{i\sigma}(\nu, \alpha)\mu^\sigma; \quad i = 1, 2 \tag{3.1}$$

Здесь $x_i^\circ(\nu, \alpha)$ — порождающее решение (1.5). Тогда если уравнения

$$[x_{2m}] = 0, \quad m = 1, 2, \ldots, s-1 \tag{3.2}$$

удовлетворяются тождественно относительно α, а уравнение

$$[x_{2s}] = P_s(\alpha) = 0$$

определяет простое решение $\alpha = \alpha^*$, то система (1.4) допускает единственное периодическое решение, аналитическое по μ в окрестности $\mu = 0$.

Из (3.1) и (1.4) получим уравнения типа (1.8) для определения $x_{i\sigma}$. Проинтегрировав эти уравнения, получим следующие рекуррентные соотношения:

(3.3) $$x_{1\sigma} = \frac{1}{(1-e^2)^{3/2}}\left(\tau c_\sigma^{(2)} + \tau\int_0^\nu Y_\sigma d\nu - \int_0^\nu \tau Y_\sigma d\nu\right) + c_\sigma^{(1)}$$

$$x_{2\sigma} = \frac{1}{(1+e\cos\nu)^2}\left(\int_0^\nu Y_\sigma d\nu + c_\sigma^{(2)}\right)$$

$$Y_\sigma = F^{(\sigma)}(1+e\cos\nu)^2, \quad F^{(1)} = \{F\}$$

$$F^{(\sigma)} = \sum_{k=1}^{\sigma-1}\frac{1}{k!}\left\{\frac{\partial^k F}{\partial x_1{}^k}\right\}\sum_{i_1+i_2+\ldots+i_k=\sigma-1} x_{1i_1}x_{1i_2}\ldots x_{1i_k}$$

$$F = \sin(\nu\, p\,/\,q + x_1)\,/\,(1+e\cos\nu)$$

Здесь $c_\sigma{}^{(l)}$ — постоянные интегрирования. Функции в фигурных скобках определяются на порождающем решении (1.5). Для определения α^* и постоянных интегрирования $c_\sigma{}^{(l)}$ служат условия периодичности решения $[x_{l\sigma}] = 0$, $l = 1, 2$; $\sigma = 1, 2, \ldots$.

Замечание 1. Система (1.4) инвариантна относительно подстановки

(3.4) $$\nu \to \nu - 2\pi q, \quad x_1 \to x_1 + 2\pi k\,/\,q, \quad x_2 \to x_2$$

Здесь k — целое. Это означает, что если $x_1(\nu)$, $x_2(\nu)$ — решение системы (1.4), то $x_1(\nu - 2\pi k) + 2\pi k\,/\,q$, $x_2(\nu - 2\pi k)$ — также ее решение. При k кратных q эти два решения тождественны, в противном случае, вообще говоря, нет.

Замечание 2. Обозначим $P_\sigma{}^{pq} = [x_{2\sigma}]$. Из (3.4) следует, что

$$P_\sigma^{pq}(\alpha) = \sum_{k=1}^{\sigma+1} A_{k\sigma}^{pq}\sin^{\sigma-k+1}\alpha\cos^{k-1}\alpha, \quad \sigma = 1, 2, \ldots$$

Здесь $A_{k\sigma}{}^{pq}$ — некоторые постоянные, зависящие от эксцентриситета орбиты.

Численными методами для $q = 1, 2, 3$ показано, что при $m < q$ равенство (3.2) тождественно относительно α, а при $m = q$ принимает вид

(3.5) $$P_q{}^{pq}(\alpha) = A_q{}^p \sin q\alpha = 0$$

Зависимости $A_2{}^p\,/\,(4\pi)$ (сплошная линия) и $A_3{}^p\,/\,(12\,\pi^2)$ (штриховая) от эксцентриситета приведены на фиг. 1. Здесь сплошные кривые *1, 2, 3* соответствуют $p = 1, 5, 9$; штриховые линии *1—5* соответствуют $p = 1, 2, 4, -2, -1$. Функция $A_1{}^p(e)$ получена в [4]. Для малых e имеем

(3.6) $$A_1{}^p \sim e^{|p|}, A_2{}^p \sim e^{(2|p|-1)}, A_3{}^{-2} \sim A_3{}^2 \sim e^2, \; A_3{}^{-1} \sim A_3{}^1 \sim e, \; A_3{}^4 \sim e^3$$

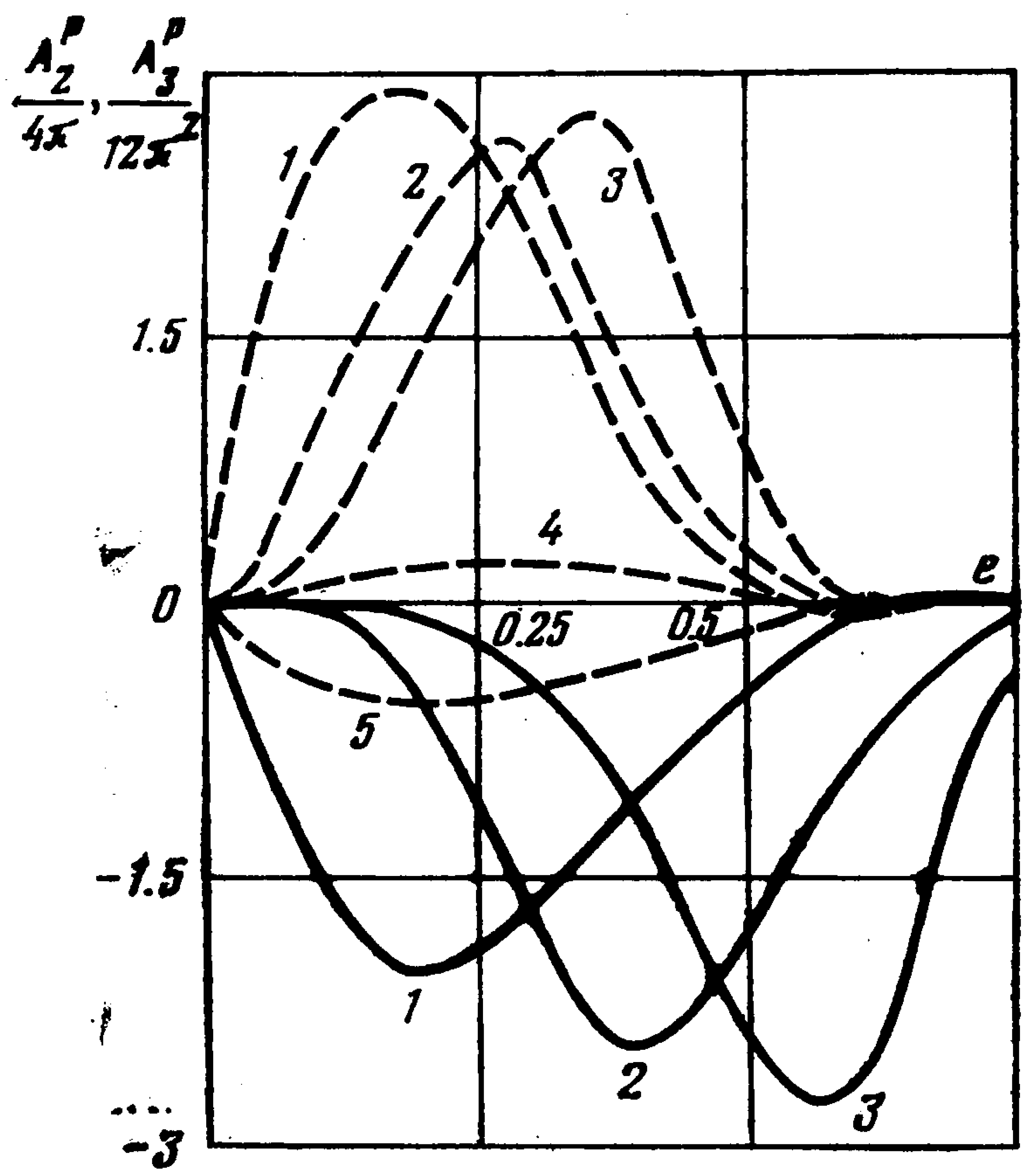
Заметим, что $q = 1$ соответствует резонансам типа $k : 2$, $q = 2$ — резонансам $k : 4$; $q = 3$ — $k : 3$ и $k : 6$ (k — целое число, взаимно-простое с q). Для нулевого эксцентриситета $A_q{}^p \neq 0$ только при $p = 0$ $q = 1$ (резонанс 1 : 1 типа Луны); для остальных p и q условие существования периодического решения выполняется тождественно, так как $A_q{}^p = 0$.

Система (1.4) при $e = 0$ интегрируется аналитически [9]; анализ решения позволяет заключить, что движения типа (1.2) на круговой орбите существуют при любых p и q; все они, кроме резонанса 1 : 1, неустойчивы.

Будем рассматривать только такие орбиты, для которых $A_q^p \neq 0$. Уравнение (3.5) имеет удовлетворяющие условию (1.15) решения

$$\alpha^* = 0,\ \pi / q, \ldots, (2q-1)\,\pi / q; \qquad q = 1, 2, 3$$

Каждому α^* соответствует единственное $2\pi q$-периодическое решение системы (1.4), обращающееся при $\mu = 0$ в порождающее. Согласно замечанию 1, достаточно определить решения, соответствующие $\alpha^* = 0$ и $\alpha^* = \pi / q$, так как остальные получаются из данных при помощи подстановки (3.4). Таким образом, решения разбиваются на два класса, соответствующие указанным значениям α^*.



Фиг. 1

Необходимое условие устойчивости принимает вид

$$(3.7) \qquad (-1)^q\, q \cos q\alpha^*\, A_q^p < 0, \quad q = 1, 2, 3$$

Из (3.7) следует, что при $(-1)^q A_q^p < 0$ решения класса $\alpha^* = \pi / q$ неустойчивы, а для решений класса $\alpha^* = 0$ выполняется условие (3.7). При $(-1)^q A_q^p > 0$ неустойчивы решения класса $\alpha^* = 0$, а для класса $\alpha^* = \pi / q$ выполняется (3.7).

Численные расчеты показывают, что, по крайней мере для рассмотренных p, при условии $e < 0.6$, $(-1)^q A_q^p < 0$, $p > 0$, $q = 1, 2, 3$. В этом случае устойчивыми могут быть только решения из класса $\alpha^* = 0$.

При отрицательных p с возрастанием $|p|$ происходит чередование знака величины $(-1)^q A_q^p$, начиная с положительного. Например, при $q = 3$ величина $-A_q^p$ положительна при $p = -1, -4, -7$ и отрицательна при $p = -2, -5, -8$. В первом случае устойчивыми могут быть решения класса $\alpha^* = \pi / q$, во втором — класса $\alpha^* = 0$.

Начальные значения периодического решения $x_1(0, \alpha^*)$, $x_2(0, \alpha^*)$ вычисляются для достаточно малых μ с любой точностью по формулам

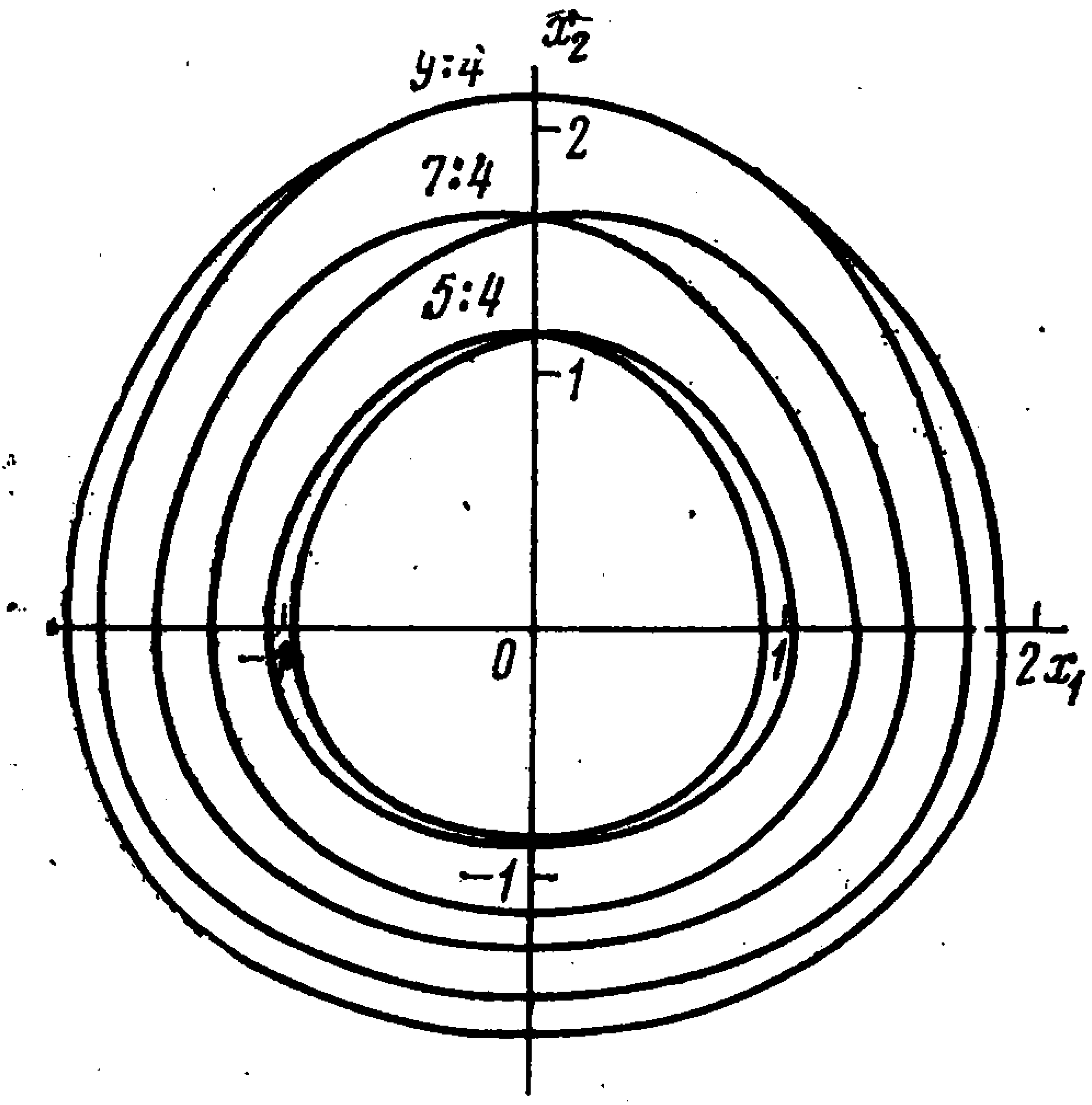
$$x_1(0) = \alpha^* + \sum_{l=1}^{N} c_l^{(1)} \mu^l + O(\mu^{N+1})$$

$$x_2(0) = \left(\frac{p}{q} + 2\right)\left[\frac{(1-e^2)^{3/2}}{(1+e)^2} - 1\right] + \sum_{l=1}^{N} c_l^{(2)} \mu^l + O(\mu^{N+1})$$

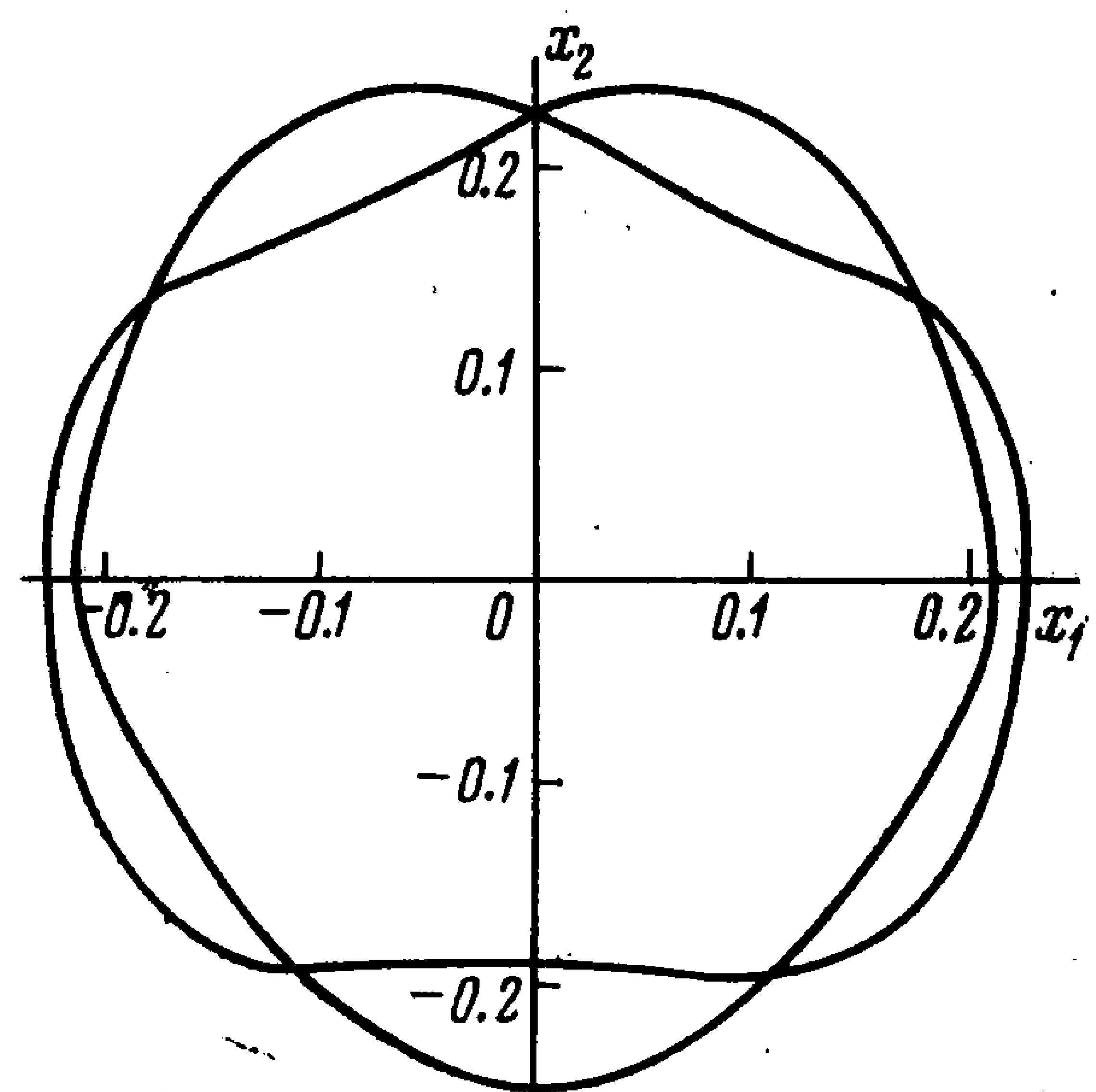
Здесь $c_l^{(i)}$ определяются единственным образом из условий периодичности [11]. В частности

$$c_l^{(2)} = \frac{1}{2\pi q} \int\limits_0^{2\pi q} \tau F^{(l)} (1 + e \cos \nu)\, d\nu, \quad l = 1, 2, 3, \ldots$$

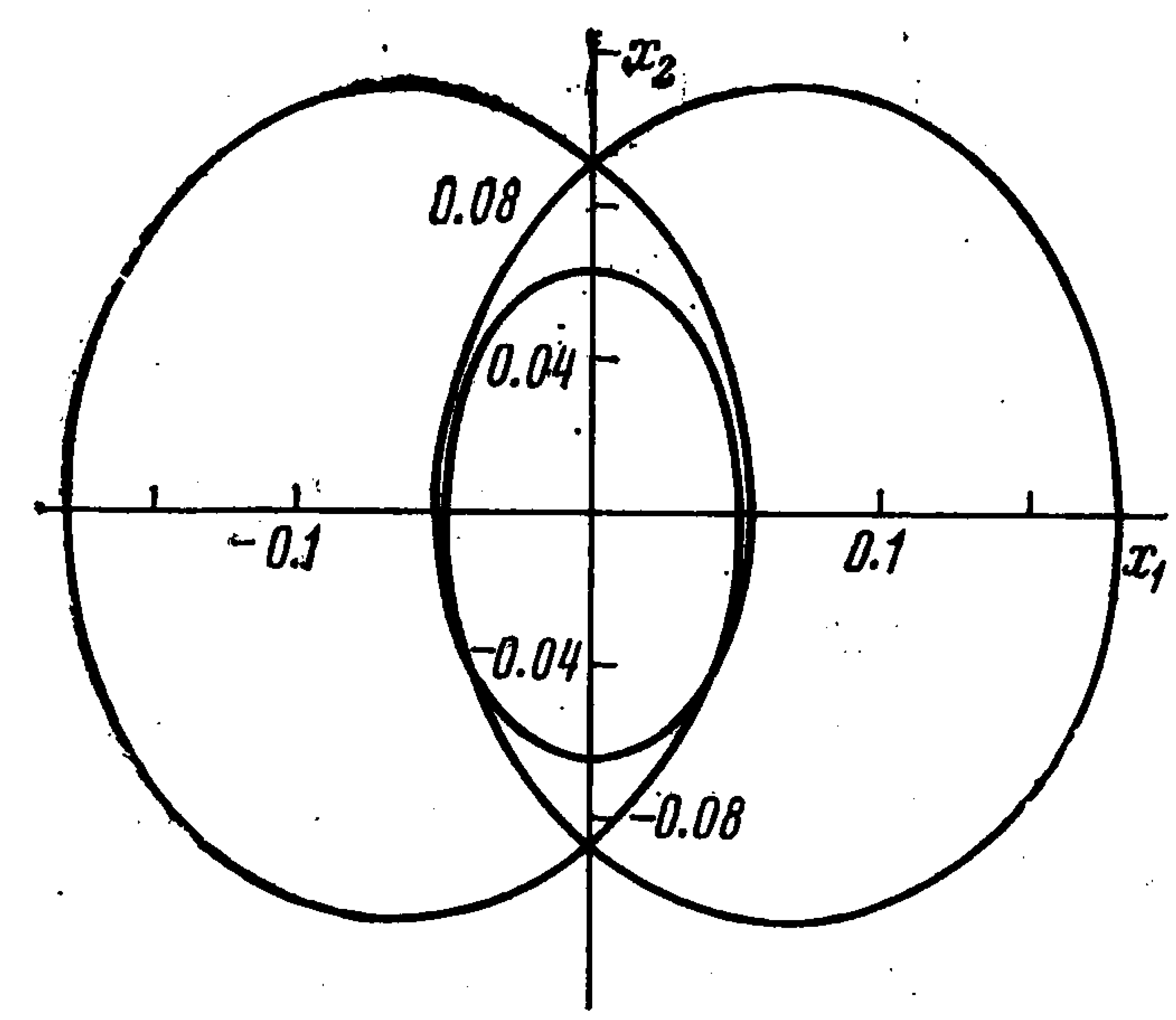
На фиг. 2—5 изображены фазовые портреты периодических решений системы (1.4) при $\alpha^* = 0$. Фиг. 2 соответствует значениям $\mu = -0.1$, $e = 0.2$; типы резонансов 5 : 4, 7 : 4 и 9 : 4 соответствуют величинам $q = 2$, $p = 1$, 3, 5 и начальным значениям $x_2(0) = -0.852$, -1.138,



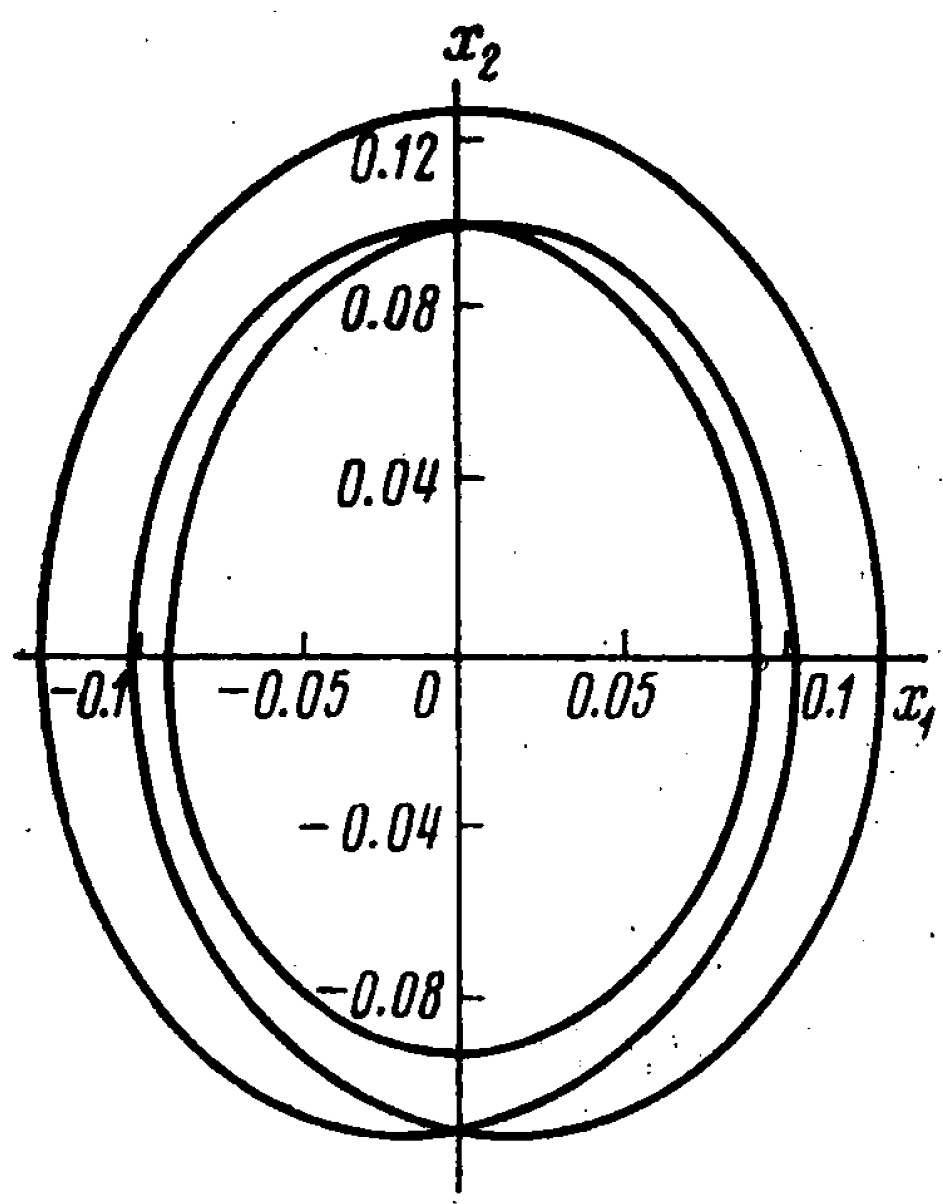
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

-1.490. Фиг. 3 изображает фазовый портрет для резонанса 11 : 4, $q = 2$, $p = 7$, при $e = 0.02$, $\mu = -0.1$; для $x_2(0)$ в этом случае имеем $x_2(0) = -0.186$. Фиг. 4 соответствует резонансу 7 : 6, $q = 3$, $p = 1$; $e = 0.02$, $\mu = -0.01$, $x_2(0) = -0.0637$. На фиг. 5 иллюстрируется резонанс типа 4 : 3, $q = 3$, $p = 2$ при $\mu = -0.01$, $e = 0.02$; здесь $x_2(0) = -0.0926$.

Начальные значения $x_2(0)$ при $\alpha^* = 0$ для некоторых резонансов приведены также в таблице. Все полученные периодические решения при $\alpha^* = 0$ имеют $x_1(0) = 0$ в качестве начального значения.

q	e	μ	p	$k:m$	$x_2(0)$
2	0.02	−0.1	3	7 : 4	−0.061
			5	9 : 4	−0.134
		−0.01	3	7 : 4	−0.13
			5	9 : 4	−0.173
3	0.2	−0.01	−1	5 : 6	−0.601
			1	7 : 6	−0.8
			2	4 : 3	−0.93
			4	5 : 3	−1.029

Согласно замечанию 1, фазовые портреты для $\alpha^* = 2\pi k / q$ получаются из фазового портрета для $\alpha^* = 0$ сдвигом по оси x_1 на $2\pi k/q$.

Выясним физический смысл условий существования и устойчивости периодического решения (1.14), (1.15), (2.5) при $q = 1$. $P_1(\alpha)$ и возмущающая силовая функция имеют вид

$$P_1(\alpha) = \frac{1}{(1+e)^2} \int_0^{2\pi} \sin[p\tau + 2(\tau - \nu) + \alpha](1 + e\cos\nu)\, d\nu$$

$$U = -cR^{-3}\cos(p\nu + x_1), \quad c = \text{const}, \quad c > 0$$

Осредним U по времени, используя вместо x_1 порождающее решение; среднее значение u как функция параметра α имеет вид

$$u(\alpha) = -c' \int_0^{2\pi} \cos[p\tau + 2(\tau - \nu) + \alpha](1 + e\cos\nu)\, d\nu$$

$$c' = \text{const} > 0$$

Сравнивая P_1 с u и учитывая условие устойчивости (2.5), заключим, что периодические (с периодом 2π) решения системы (1.4), обращающиеся при $\mu = 0$ в порождающие, могут соответствовать лишь тем значениям параметра $\alpha = \alpha^*$, при которых осредненная по времени возмущающая силовая функция на порождающем решении принимает экстремальное значение. Решения могут быть устойчивыми только в том случае, когда экстремум представляет собой максимум.

Полученный экстремальный принцип отчасти согласуется с гипотезой, сформулированной в [2], согласно которой осредненная вдоль точного решения системы (1.4) возмущающая силовая функция имеет по начальным данным максимум для устойчивых резонансных движений вида (1.2).

4. Пусть теперь на спутник кроме гравитационного действует момент приливных сил [15]

$$M = -k\omega / r^6$$

Здесь k — положительная постоянная, r — расстояние от спутника до планеты, ω — угловая скорость вращения спутника относительно орбитальной системы координат. Предположим, что момент приливных сил имеет по μ порядок n. Наличие приливного момента приводит к появлению в правой части второго уравнения системы (1.4) дополнительного слагаемого

(4.1) $$-|\mu|^n k_1 (1+e\cos\nu)^5 (x_2' + p/q)$$

Здесь k_1 — положительная постоянная; x_1', x_2' — переменные задачи при наличии приливного момента.

Периодические решения в этом случае будем искать, используя процедуру, примененную к системе (1.4). Так как система (1.4) с учетом (4.1) с точностью до μ^{n-1} совпадает с системой (1.4), то все результаты, получаемые с учетом (4.1), с точностью, меньшей μ^n, совпадают с аналогичными формулами для (1.4). Для ψ_2' имеем

(4.2) $$\psi_2'(\mu, \beta_1', \beta_2'(\mu, \beta_1', \alpha'), \alpha') = \psi_2(\mu, \beta_1', \beta_2'(\mu, \beta_1', \alpha'), \alpha') + \\ + \mu^n(b + O(\mu, \beta_1'))$$

$$b = (-1)^{n+1}\frac{2\pi q k_1}{(1+e)^2}\left\{\left(\frac{p}{q}+2\right)(1-e^2)^{3/2}\left(1+3e^2+\frac{3}{8}e^4\right) - \\ -2-15e^2-\frac{45}{4}e^4-\frac{5}{8}e^6\right\}$$

Здесь штрихи соответствуют наличию приливного момента.

Пусть $n < s$. Тогда уравнение (4.2) разрешимо относительно β_1' ($\beta_1'(0, \alpha') = 0$) только при условии $b = 0$. Это равенство в общем случае не выполнимо (кроме конечного числа значений эксцентриситета).

При $n = s$ условие существования принимает вид

$$P_s(\alpha') + b = 0$$

или, если $q = 1, 2, 3$

$$A_q^p \sin q\alpha' + b = 0$$

Это уравнение имеет решение относительно α' при условии

(4.3) $$|b / A_q^p| < 1$$

Выше показано, что $s = q$ при $q = 1, 2, 3$ и $s \geqslant 4$ при $q \geqslant 4$. Поэтому, если момент приливных сил достаточно велик (достаточно $n < s$), то условие существования решения уравнения (4.2) не выполняется, т. е. не существует периодического решения системы (1.4) с учетом (4.1), обращающегося при $\mu = 0$ в порождающее. При больших q для «замывания» резонансного движения в указанном смысле достаточно намного более слабых приливных сил, чем для $q = 1$.

Отметим, что для каждого конкретного спутника μ хотя и предполагается малым, но является конечным. Рассмотрим случаи $q = 1, 2, 3$. Пусть величина приливного момента имеет превосходящий q порядок по μ. В этом случае будем считать $M = -|\mu|^q k_2\omega / r^6$, т. е. k_2 будет малой конечной величиной. Рассмотрим неравенство (4.3). Из (3.6) следует, что для малых эксцентриситетов величина $|A_q^p|$, $q = 1,2,3$, с ростом $|p|$ быстро уменьшается. Величина b при росте $|p|$ изменяется сравнительно мало, поэтому условие (4.3) существования периодического решения, обращающегося при $\mu = 0$ в порождающее, будет выполнено для малых $|p|$ и не выполнено для достаточно больших $|p|$. Таким образом, при $q = 1, 2, 3$ даже слабые приливные моменты будут замывать почти все резонансы, кроме конечного числа резонансов с небольшими по абсолютной величине p.

Для естественных небесных тел параметр $\mu \sim 10^{-3} \div 10^{-5}$. Если предположить, что приливные силы меньше гравитационных возмущений в 10^6 раз, то для таких небесных тел будут возможны только резонансы с $q = 1$ и, возможно, $q = 2$ при достаточно малых $|p|$, если орбита слабо эллиптична.

В общем случае замывание резонансов высокого порядка при добавлении диссипативных сил следует из теоремы [16] о необходимых условиях синхронизма в динамической системе.

Рассмотрим случай $n > s$ и p не слишком велико по абсолютной величине в том смысле, что резонанс не замывается приливами. Тогда условия существования периодического решения системы (1.4) с учетом (4.1), при $\mu = 0$ обращающегося в порождающее, тождественно совпадут с аналогичными условиями (1.14), (1.15) в случае отсутствия приливов. Следовательно, α'^* принимают те же значения, что и α^*. При этих условиях сформулируем, опуская доказательство, следующее утверждение для резонансных движений типа $k:2$ $(q = 1)$. Если корни характеристического уравнения (2.1) $\rho^{(i)}$, $i = 1, 2$ (при отсутствии приливов) отличны по абсолютной величине от единицы на величину порядка $o(\mu^n)$, а момент приливных сил имеет порядок μ^n, то резонансное движение при добавлении приливного момента становится асимптотически устойчивым. В частности, если движение устойчиво без приливов, то оно становится асимптотически устойчивым при добавлении приливного момента.

Можно показать, что $|\rho^{(i)}|$, $i = 1, 2$, отличны от единицы по меньшей мере на величины порядка $o(\mu^2)$, и, следовательно, если приливной момент имеет порядок μ^2, все резонансы вида $k:2$, для которых выполнены условия существования, будут асимптотически устойчивыми.

Поступила 5 VI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белецкий В. В.* О либрации спутника. В сб.: Искусственные спутники Земли, вып. 3. М., Изд-во АН СССР, 1959.
2. *Белецкий В. В., Шляхтин А. Н.* Экстремальные свойства резонансных движений. Докл. АН СССР, 1976, т. 231, № 4.
3. *Черноусько Ф. Л.* Резонансные явления при движении спутника относительно центра масс. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, т. 3, № 3.
4. *Lutze F. H. Jr., Abbit M. W. Jr.* Rotation locks for near symmetric satellites. Celest. Mech., 1969, vol. 1, No. 1.
5. *Белецкий В. В., Лавровский Э. К.* К теории резонансного вращения Меркурия. Астрон. ж., 1975, т. 52, вып. 6.
6. *Килль И. Д.* О периодических решениях одного нелинейного уравнения, содержащего малый параметр. Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1964, № 1.
7. *Златоустов В. А., Охоцимский Д. Е., Сарычев В. А., Торжевский А. П.* Исследование колебаний спутника в плоскости эллиптической орбиты. Космические исследования, 1964, т. 2, вып. 5.
8. *Торжевский А. П.* Периодические решения уравнения плоских колебаний спутника на эллиптической орбите. Космические исследования, 1964, т. 2, вып. 5.
9. *Белецкий В. В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М., «Наука», 1965.
10. *Демин В. Г., Сингх Р. Б.* Нелинейные плоские колебания спутника на эллиптической орбите. Космические исследования, 1973, т. 11, вып. 2.
11. *Малкин И. Г.* Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. Л.—М., Гостехиздат, 1949.
12. *Мерман Г. А.* Новый класс периодических решений в ограниченной задаче трех тел и в задаче Хилла. Тр. Ин-та теор. астрон. АН СССР, 1952, вып. 1.
13. *Шиманов С. Н.* Об отыскании характеристических показателей систем нелинейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. ПММ, 1958, т. 22, вып. 3.
14. *Блехман И. И.* Синхронизация динамических систем. М., «Наука», 1971.
15. *Goldreich P., Peale S. J.* The dynamics of planetary rotations. In: Ann. Rev. Astron. and Astroph., vol. 6. Palo Alto, Calif., Ann. Revs. Inc., 1968.
16. *Гуртовник А. С., Неймарк Ю. И.* О синхронизации динамических систем. ПММ, 1974, т. 38, вып. 5.