Прикладная математика и механика. Том 43, 1979

УДК 531/533

О ПОСТРОЕНИИ МОДЕЛЕЙ СПЛОШНЫХ СРЕД, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ С ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

Л. И. Седов, А. Г. Цыпкин

(Москва)

Предлагается общая теория конструирования моделей сплошных сред при наличии взаимодействия материальных тел с электромагнитным полем с учетом электрических токов, поляризации и намагничивания, основанная на использовании базисного вариационного уравнения. Для непрерывных движений при заданных внешних воздействиях устанавливается замкнутая система уравнений, в том числе уравнения Максвелла, уравнения состояния, описывающие поляризацию, намагничивание и внутренние механические напряжения. (Как известно [1, 2], из базисного вариационного уравнения можно также получать условия на сильных разрывах.)

Показано, что базисное вариационное уравнение для действительных явлений сводится локально к первому и второму закону термодинамики также и в случае присутствия электромагнитных полей. Разъясняется ряд существенных обстоятельств (смысл употребляемых частных производных по времени и вариаций от компонент тензоров; понятие об энергии электромагнитного поля как о четырехмерном скаляре; выбор скалярной функции для лагранжиана, фиксирование отличного от нуля функционала δW^*; выражение для некомпенсированного тепла, для варьируемых и действительных процессов и т. д.), возникающих в деталях, связанных с переходом от уравнений первого и второго законов термодинамики к универсальному вариационному уравнению. Обсуждаются типичные конкретизированные примеры моделей твердых и жидких материальных сред, взаимодействующих с электромагнитным полем.

Построению моделей сплошных сред с учетом явлений поляризации и намагничивания, распределенных подвижных зарядов и токов проводимости в последнее время посвящено много работ. Однако до сих пор приходится сталкиваться с отсутствием рационально обоснованных конструкций моделирования, основанных на использовании термодинамических методов с минимальным числом простейших допущений. Ценно, чтобы сформулированные допущения, которые всегда необходимы, были бы введены на основе универсальных физических принципов.

Еще в 1965 г. Л. И. Седовым показано [3], что в типичных простейших случаях для обратимых процессов в сплошных средах для получения макроскопической замкнутой системы уравнений из первого и второго законов термодинамики, выполняющихся для непрерывных процессов, достаточно задать, кроме внешних воздействий, внутреннюю энергию для поля и материальной среды как функции тензора поляризации — намагничивания, механических характеристик движения и термодинамических внутренних определяющих параметров. В рассмотренных моделях этот путь позволяет получить все уравнения состояния и, в частности, уравнения состояния для законов поляризации и намагничивания.

Дальнейшему развитию этой теории с использованием базисного вариационного уравнения и распространению ее на процессы со слабыми и сильными разрывами и присутствию в аргументах функции Лагранжа высших производных посвящен ряд работ [4–6]. Отметим, что в употреблявшихся вариационных уравнениях при наличии электромагнитного поля плотность функции Лагранжа не поддавалась термодинамическому истолкованию.

Базисное вариационное уравнение для малого элемента объема среды и электромагнитного поля в случае действительных процессов, согласно основной идее, должно сводиться локально к полному уравнению балансов для приращений всех видов энергий, возникающих при взаимодействиях в полях и в материальных средах в изучаемых процессах. Это обстоятельство может служить основным ведущим физическим указанием для установления вида функционалов, фигурирующих в базисном вариационном уравнении, которое, однако, может содержать также дополнительно члены, обращающиеся в нуль для действительных процессов. В частности, такими членами могут быть элементарные притоки энергии гироскопической природы или специального вида члены, связанные с необратимостью для варьированных процессов, и др.

Предлагаемая работа в основном посвящена следующему.

1. Разъяснению вопроса о локальном сведении базисного вариационного уравнения к уравнению энергии для системы «электромагнитное поле плюс материальная среда», рассматриваемых как единое целое. До сих пор возможность такого сведения подвергалась сомнению. Приводимое ниже обсуждение этого вопроса показывает, что даже в случае обратимых процессов в электромагнитных полях конструкция базисного вариационного уравнения оказывается усложненной за счет учета взаимодействия малого объема поля и среды с соседними элементарными объемами. В случае изучения необратимых явлений усложнение происходит также за счет появления дополнительных членов в выражении для варьированного приращения некомпенсированного тепла.

2. Построению в рамках специальной теории относительности замкнутой системы уравнений, в том числе уравнений состояния, для системы электромагнитное поле плюс материальная среда.

1. Основные обозначения и системы координат. Пусть x^1, x^2, x^3, $x^4 = ct$ — координаты в некоторой выбранной инерциальной декартовой системе отсчета наблюдателя четырехмерного псевдоевклидова пространства, $ds^2 = (cdt)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$, c — скорость света в вакууме, t — время и пусть ξ^1, ξ^2, ξ^3, $\xi^4 = c\tau$ — лагранжевы координаты точек среды в подвижной сопутствующей системе координат, вмороженной в среду; примем по определению, что $d\tau$ вдоль мировой линии $\xi^\alpha = \mathrm{const}$ равно приращению собственного времени. Обозначим соответственно через g_{ij}, $g_{ij}\hat{}$ ($g_{44}\hat{} = 1$) ковариантные компоненты метрического тензора системы отсчета наблюдателя и сопутствующей системы координат; $ds^2 = g_{ij}\hat{} d\xi^i d\xi^j$.

Здесь и далее принимается, что малые латинские индексы пробегают значения *1—4*, малые греческие — значения *1—3*; по верхним и нижним совпадающим индексам проводится суммирование. Индекс ^ указывает, что соответствующие компоненты взяты относительно сопутствующей системы координат.

При $ds \neq 0$ обозначим через

$$u^i = dx^i/d\xi^4 = dx^i/ds$$

контравариантные компоненты четырехмерного единичного безразмерного вектора скорости точек среды, а через

$$\rho = \rho_0 (\xi^\mu) [\det \| g_{ij}\hat{} - u_i\hat{} u_j\hat{} \|]^{-1/2} \tag{1.1}$$

по определению — массовую плотность среды. Аналогичной формулой определяется плотность свободных электрических зарядов ρ_e. На основании определения (1.1) нетрудно убедиться, что введенные в сопутствующей системе отсчета массовая плотность среды ρ и плотность зарядов ρ_e удовлетворяют четырехмерным уравнениям неразрывности

$$(1.2) \qquad \nabla_i (\rho u^i) = 0, \quad \nabla_i (\rho_e u^i) = 0$$

где ∇_i — четырехмерный оператор ковариантного дифференцирования в любой системе координат.

В дальнейшем, кроме системы отсчета наблюдателя, базисные векторы которой обозначим через $\mathfrak{э}_i$, и сопутствующей системы координат с базисными векторами $\mathfrak{э}_i^{\wedge}$ в четырехмерном пространстве в каждой точке среды M введем еще локально[1] для этой точки собственную инерциальную систему координат x^i с базисной тетрадой $\mathfrak{э}_i{}^*$, такую, чтобы в точке M выполнялось равенство нулю трехиндексных символов Кристоффеля, т. е. $\Gamma_{sj}{}^{*k} = 0$, а трехмерная скорость точки среды относительно собственной системы координат равнялась бы нулю. Четырехмерные скорости $\mathbf{u}^*$ точек собственной системы будут в точности равны четырехмерной скорости точки M среды $\mathbf{u}$. В точках среды, соседних с точкой M на мировой линии и в пространстве, вообще говоря, $\mathbf{u}^* \neq \mathbf{u}$.

В силу выбора сопутствующей системы координат ($g_{44}{}^{\wedge} = 1$) в точке M верны равенства

$$(1.3) \qquad \mathbf{u}^* = \mathbf{u} = \mathfrak{э}_4{}^* = \mathfrak{э}_4{}^{\wedge}$$

и, следовательно, ось времени t для собственной системы координат направлена по касательной к мировой линии среды в точке M, поэтому

$$dt^* = d\tau^* = d\tau$$

Так как, вообще говоря, $g_{4\hat{\alpha}}\,(\xi^\alpha, \tau)$ невозможно обратить в нуль во всех точках среды, то легко усмотреть, что для всех точек среды, вообще говоря, невозможно удовлетворить равенству $\mathfrak{э}_\alpha{}^* = \mathfrak{э}_\alpha{}^{\wedge}$. Однако такое равенство может быть выполнено в любой одной точке при соответствующем выборе системы лагранжевых координат.

Совокупность собственных систем отсчета с реперами $\mathfrak{э}_i{}^*$ для всевозможных точек M образует неголономное семейство, иначе говоря, нельзя указать глобальную систему отсчета с введенными инерциальными координатными реперами $\mathfrak{э}_i{}^*$.

Вдоль мировых линий точек среды имеем

$$(1.4) \qquad \frac{d\mathbf{u}^*}{d\tau} = 0, \quad \frac{d\mathfrak{э}_i{}^*}{d\tau} = 0, \quad \frac{d\mathfrak{э}_i{}^*}{dx^k} = 0$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\tau} = \mathbf{a}, \quad \frac{d\mathfrak{э}_i{}^{\wedge}}{d\tau} = \Gamma_{i4}^{\wedge k}\mathfrak{э}_k{}^{\wedge} = \frac{d\mathbf{u}}{d\xi^i} = \nabla_i{}^{\wedge} u^{\wedge k}\mathfrak{э}_k{}^{\wedge} \neq 0$$

Здесь $\mathbf{a}$ — абсолютно определенный, вообще отличный от нуля, четырехмерный вектор ускорения точек среды.

Если мировая линия изотропна, то $g_{44}{}^{\wedge} = 0$, $d\tau = 0$, и в этом случае можно выписать равенства, аналогичные (1.4), в которых вместо $d\tau$ надо

[1] В пространстве Римана локальность существенна; в пространстве Минковского собственную систему координат можно вводить для каждой точки M как глобальную систему отсчета.

поставить приращения $d\lambda$ соответствующего параметра λ, определенного вдоль изотропной мировой линии.

Для описания эффектов взаимодействия электромагнитного поля с поляризующейся и намагничивающейся средой введем антисимметричные тензоры электромагнитного поля с компонентами F_{ij} и H^{ij}

$$F_{ij}=\begin{Vmatrix}0 & B^3 & -B^2 & E_1\\ -B^3 & 0 & B^1 & E_2\\ B^2 & -B^1 & 0 & E_3\\ -E_1 & -E_2 & -E_3 & 0\end{Vmatrix},\quad H^{ij}=\begin{Vmatrix}0 & H_3 & -H_2 & -D^1\\ -H_3 & 0 & H_1 & -D^2\\ H_2 & -H_1 & 0 & -D^3\\ D^1 & D^2 & D^3 & 0\end{Vmatrix} \tag{1.5}$$

где обозначения соответствуют принятым в работах [1,3,4]. Заметим, что в силу способа выбора собственной системы координат при $\mathfrak{э}_i^{\frown} = \mathfrak{э}_i^*$ компоненты тензоров F_{ij} и H^{ij} в каждой одной данной точке в собственной и сопутствующей системах координат совпадают.

2. Уравнения энергии для электромагнитного поля и среды. Уравнение энергии для электромагнитного поля в любой инерциальной и, в частности, в собственной системе координат можно записать в виде

$$\partial W/\partial\tau = -\operatorname{div}\mathbf{S} - F \tag{2.1}$$

где по определению в собственной системе координат соответственно $W = (\mathbf{BH} + \mathbf{DE})/8\pi$ — энергия электромагнитного поля (W — трехмерный скаляр); $\mathbf{S} = (c\ /\ 4\pi)\ \mathbf{E}\times\mathbf{H}$ — трехмерный вектор Умова — Пойнтинга, F — приток энергии от поля к среде, определяемый процессами выделения джоулева тепла и процессами поляризации и намагничивания сплошной среды.

Легко проверить, что подобно кинетической энергии в ньютоновской механике величина $(1/8\pi)$ $(\mathbf{BH} + \mathbf{DE})$ зависит от выбора инерциальной системы отсчета. Для двух различных инерциальных систем координат, движущихся одна относительно другой с постоянной трехмерной поступательной скоростью, имеет место неравенство

$$\frac{\mathbf{B}^*\mathbf{H}^* + \mathbf{D}^*\mathbf{E}^*}{8\pi} \neq \frac{\mathbf{B}'\mathbf{H}' + \mathbf{D}'\mathbf{E}'}{8\pi}$$

где знак звездочка указывает, что векторы вычислены в собственной системе координат, а индекс штрих означает, что соответствующие векторы вычислены в произвольной инерциальной системе координат. С другой стороны, всегда верно скалярное равенство

$$\frac{\mathbf{B}^*\mathbf{H}^* + \mathbf{D}^*\mathbf{E}^*}{8\pi} = \frac{1}{16\pi}\left(F_{ij}H^{ij} - 4u^{*k}u^{*s}F_k{}^jH_{sj}\right) \tag{2.2}$$

Четырехмерный инвариант, стоящий в правой части этого равенства, дает выражение для энергии электромагнитного поля в любой инерциальной системе координат. Через u^{*i} обозначены компоненты четырехмерной скорости точек собственной системы координат в любой системе координат, в которой компоненты тензоров $F_k{}^j$ и H_{sj} выражаются через векторы **E**, **H**, **D**, **B**.

Формула (2.2) дает определение энергии электромагнитного поля как четырехмерного скаляра.

При отсутствии среды (т. е. в «пустоте») в выборе исходной («собственной») инерциальной системы координат на первый взгляд появляется произвол. Этот произвол исключается, если учесть, что введение понятий напряженности электрического и магнитного полей возможно только при помещении в пустоту «пробных» тел, а введение пробных тел позволяет ввести сопутствующие и собственные системы координат.

В фиксированной собственной инерциальной системе координат для точки M выражение для энергии электромагнитного поля по формуле (2.2) можно рассматривать не только в выбранной точке M, в которой $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*$, но и в соседних точках M', в которых $\mathbf{u}(M') \neq \mathbf{u}^*(M')$; в этом случае существенно, что в формуле (2.2) под u^{*i} подразумеваются компоненты четырехмерной скорости точек для собственной системы координат, отвечающей фиксированной точке M. При дифференцировании выражения для энергии в формуле (2.2) по четырехмерным координатам (в частности, по времени) необходимо учитывать равенства (1.4), выполняющиеся в любой системе координат.

Уравнение энергии для электромагнитного поля имеет вид (2.1) в любой (а не только в собственной) инерциальной системе координат. Однако в произвольной системе координат величины W и F уже не будут иметь смысла энергии электромагнитного поля в среде и притока энергии от электромагнитного поля к среде соответственно. Используя уравнение Умова — Пойнтинга, уравнение энергии (2.1) можно записать в виде [1]

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = \frac{1}{4\pi}\left(\mathbf{H}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \tau} + \mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \tau}\right) + \mathbf{jE} - F$$

В результате простых выкладок последнее уравнение можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\mathbf{BH} - \mathbf{DE}}{8\pi}\right) = \frac{1}{4\pi}\left(\mathbf{H}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \tau} - \mathbf{D}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \tau}\right) + \mathbf{jE} - F \tag{2.3}$$

С использованием четырехмерных тензоров электромагнитного поля введем четырехмерные инварианты

$$\frac{\mathbf{BH} - \mathbf{DE}}{8\pi} = \frac{1}{16\pi}F_{ij}H^{ij} = L, \quad \mathbf{jE} = cI^kF_{ki}u^i \tag{2.4}$$

$$\frac{1}{4\pi}\left(\mathbf{H}^*\frac{\partial \mathbf{B}^*}{\partial \tau} - \mathbf{D}^*\frac{\partial \mathbf{E}^*}{\partial \tau}\right) = \frac{c}{8\pi}H^{ij}u^k\nabla_k F_{ij}$$

Здесь $\mathbf{j}^*\mathbf{E}^* = cI^kF_{ki}u^i$ — джоулево тепло, I^k — компоненты четырехмерного электрического тока с компонентами $I^\alpha = c^{-1}j^\alpha$, $I^4 = \rho_e c$.

На основании соотношений (2.4) уравнение энергии для электромагнитного поля (2.3) можно записать в инвариантном виде

$$dL = \frac{1}{8\pi}H^{ij}\nabla_k F_{ij}dx^k + I^kF_{ki}\,dx^i - F\,d\tau \tag{2.5}$$

Здесь приток энергии от среды к электромагнитному полю $F = F_4$ определен в собственной системе координат [1].

Уравнению энергии для элемента объема сплошной среды в собственной системе координат можно придать вид

$$dU = Fd\tau + dK \tag{2.6}$$

где U — четырехмерный скаляр, равный полной энергии единицы объема, взятого в собственной системе отсчета; F — приток энергии от электромагнитного поля к сплошной среде, содержащий джоулево тепло, и приток энергии, обусловленный процессами поляризации и намагничивания; dK — дополнительный внешний приток энергии к частице. Далее, положим $dK = dQ^{(e)} - Q_i dx^i + dW_0$, где $dQ^{(e)}$ — приток тепла к среде за время $d\tau$, Q_i — плотность внешней объемной силы, dW_0 — дополнительный приток энергии через границу частицы и за счет структурных параметров. Заметим, что если электромагнитное поле известно, то равенство (2.5) можно использовать для вычисления притока энергии $Fd\tau$ от поля к среде через характеристики поля. Если, наоборот, задано или известно движение среды, то приток энергии $-Fd\tau$ можно определить через характеристики движения среды из уравнения (2.6) и подставить его в уравнение (2.5).

Уравнение энергии для системы сплошная среда плюс электромагнитное поле в произвольной системе отсчета можно написать в виде

$$-d(L+U)+\frac{1}{8\pi}H^{ij}\nabla_k F_{ij}\,dx^k+I^kF_{ki}\,dx^i+ \tag{2.7}$$
$$+dQ^{(e)}+dW_0-Q_i\,dx^i=0$$

3. Определение вариаций тензорных функций и вариационное уравнение для системы сплошная среда плюс электромагнитное поле.

Пусть η^A — некоторый скаляр или компонента какого-нибудь тензора (индекс A — собирательный символ индексов для тензоров различных рангов). При наличии двух выбранных систем отсчета — системы отсчета наблюдателя x^i и сопутствующей системы отсчета ξ^k тензорные компоненты η^A, являющиеся некоторой характеристикой сплошной среды или электромагнитного поля, можно рассматривать либо как функции координат x^i, либо как функции координат ξ^k.

Вариации скалярных или тензорных функций можно определить разными формулами. В частности, можно вводить вариации инвариантных функций как неинвариантные функции, зависящие от выбора систем координат. Но можно определять вариации скаляров и тензоров соответственно как инвариантные скалярные или тензорные функции координат с бесконечно малыми компонентами.

Рассмотрим некоторые возможные определения вариаций. Пусть $\eta^{\hat{}A}=\eta^{\hat{}A}(\xi^k)$ — компоненты некоторого тензора (он, в частности, может быть скаляром) в базисе $\text{э}^{\hat{}}_i$.

При постоянных $\text{э}^{\hat{}}_i$ и ξ^k определим вариации $\delta\eta^{\hat{}A}$ как бесконечно малые компоненты тензора в одном и том же базисе $\text{э}^{\hat{}}_i$ формулой

$$\delta\eta^{\hat{}A}=\eta^{\hat{}\prime A}(\xi^k)-\eta^{\hat{}A}(\xi^k) \tag{3.1}$$

где $\eta^{\hat{}A}$ и $\eta^{\hat{}\prime A}$ — компоненты действительного и варьированного тензоров в базисе $\text{э}^{\hat{}}_i$.

Аналогичным образом, считая η^A функциями координат x^i, определим вариации $\partial\eta^A$ при постоянных x^i и э_i формулой

$$\partial\eta^A=\eta'^A(x^i)-\eta^A(x^i) \tag{3.2}$$

где $\eta^{\hat{}\prime A}$ и η^A — компоненты тензоров в базисе э_i. Отметим, что формулы (3.1) и (3.2) определяют вариации $\delta\eta^{\hat{}A}$ и $\partial\eta^A$ как произвольные тензорные или скалярные функции лагранжевых или эйлеровых координат соответственно. Этот произвол связан с тем, что варьированные тензоры $\eta^{\hat{}\prime A}$ и η'^A могут выбираться различными способами. Вариации $\delta\eta^{\hat{}A}$ и $\partial\eta^A$ можно рассматривать как в базисах $\text{э}^{\hat{}}_i$ и э_i соответственно, так и в любых других базисах.

Так как связь между эйлеровыми и лагранжевыми координатами точки сплошной среды представляет собой закон движения сплошной среды $x^i=x^i(\xi^k)$, который также варьируется, то вариацию закона движения определим формулами

$$\delta x^i=x'^i(\xi^k)-x^i(\xi^k)$$

В каждой заданной точке $x_0{}^i=x^i(\xi_0{}^k)$ введенные выше вариации δx^i, $\delta\eta^{\hat{}A}$ и $\partial\eta^A$ можно связать равенствами, вытекающими из определения тензора η

$$\eta=\eta^{\hat{}A}\text{э}^{\hat{}}_A=\eta^A\text{э}_A$$

и определения

$$\delta\eta=\partial\eta \tag{3.3}$$

где $\hat{э}_A$ и $э_A$ — полиадные произведения, составленные из векторов базисов $\hat{э}_i$ и $э_i$ соответственно.

На основании (3.3) и формулы $\delta\hat{э}_i = \nabla\hat{}_i \delta x^s \hat{э}_s$ для вектора с компонентами $\hat{\eta}^k$ или η^k можно написать серию равенств

$$\delta\eta = \delta_1 \hat{\eta}^k \hat{э}_k = (\delta_2 \hat{\eta}^k + \hat{\eta}^i \hat{\nabla}_i \delta \hat{x}^k)\hat{э}_k = \partial_1 \eta^k э_k = (\partial_2 \eta^k + \delta x^i \nabla_i \eta^k) э_k \tag{3.4}$$

Здесь через δ_1, δ_2, ∂_1 и ∂_2 обозначены различные возможные типы вариации компонент тензора η. Из (3.4) также следуют формулы связи между этими вариациями.

В частности, если $\hat{э}_i = э_i$, то имеем

$$\delta_1 \hat{\eta}^k = \partial_2 \eta^k + \delta x^i \nabla_i \eta^k, \quad \delta_2 \hat{\eta}^k = \partial_1 \eta^k - \eta^i \nabla_i \delta x^k \tag{3.5}$$

Эти же равенства (когда $\hat{э}_i \neq э_i$) можно переписать в виде

$$\delta_1 \hat{\eta}^j x_j^k = \delta_1 \eta^k = \partial_2 \eta^k + \delta x^i \nabla_i \eta^k \tag{3.6}$$

$$\delta_2 \hat{\eta}^j x_j^k = \delta_2 \eta^k = \partial_1 \eta^k - \eta^i \nabla_i \delta x^k$$

Аналогичные формулы легко выписать для ковариантных компонент η_k с учетом равенства $\delta\hat{э}^i = -\hat{\nabla}_s \delta \hat{x}^i \hat{э}^s$. Таким же образом очевидны общие формулы для тензоров любого ранга с любым строением индексов.

Наряду с вариациями $\delta_i \hat{\eta}^A$ и $\partial_i \eta^A$ $(i = 1, 2)$, которые являются компонентами тензоров, можно рассматривать также вариации, которые не являются компонентами тензоров. Например, можно ввести вариации $\delta_1{}'\eta^A$ компонент тензора η^A следующим образом:

$$\delta_1{}'\eta^A = \partial_1 \eta^A + \delta x^s \frac{\partial \eta^A}{\partial x^s} \tag{3.7}$$

где вариация $\partial_1 \eta^A$ имеет тот же смысл, что и в формуле (3.4).

Рассмотрим линейную скалярную форму

$$B_A \delta_1 \eta^A + P_i \delta x^i$$

где B_A — компоненты некоторого тензора того же ранга, что и тензор $\delta\eta^A$, а P_i — компоненты вектора. Величинам B_A и P_i в зависимости от изучаемого явления можно придавать конкретный физический или геометрический смысл.

Воспользовавшись формулами (3.4), (3.7), линейную скалярную форму можно преобразовать к виду

$$B_A \delta_1 \eta^A + P_i \delta x^i = C_A \delta_1{}'\eta^A + Q_i \delta x^i$$

Коэффициенты C_A и Q_i, в отличие от коэффициентов B_A и P_i, уже не будут компонентами тензоров и векторов. Из высказанных соображений следует, что употребление вариации типа (3.4) в геометрическом или в физическом смыслах оказывается предпочтительнее вариации типа (3.7).

Наряду с мысленно вводимыми вариациями рассматриваемых величин можно рассматривать действительные приращения, отвечающие решениям некоторых задач. При этом вариации δ_1 и ∂_1 от параметров η^A заменяются, согласно дополнительному условию на действительные локальные приращения параметров η^A, по формулам

$$\delta_1 \eta^A = d\eta^A = cu^i \nabla_i \eta^A d\tau = \dot{\eta}^A d\tau, \quad \partial_2 \eta^A = 0 \tag{3.8}$$

Ниже используются вариации δ_1 и ∂_2, которые обозначаются через δ и ∂.

Из рассмотренного в п. 2 уравнения энергии для системы материальная среда плюс электромагнитное поле, записанного в инвариантном четырехмерном виде, нельзя получить интегральное уравнение энергии для конечного объема сплошной среды. В специальной и общей теории относительности в общем случае для подвижной среды нельзя ввести общего для всего тела или конечной его части собственного времени и векторных характеристик, поэтому уравнение энергии и законы сохранения для конечных объемов, вообще говоря, не имеют физического смысла. Однако уравнение энергии для малого объема сплошной среды (2.7) дает наводящие соображения о виде задаваемых членов базисного вариационного уравнения.

Базисное вариационное уравнение, предложенное Л. И. Седовым [4], имеет вид

$$\delta \int\limits_{V_4} \Lambda\, dV_4 + \delta W^* + \delta W = 0 \tag{3.9}$$

Здесь dV_4 — четырехмерный элемент произвольного объема пространства событий V_4, ограниченного трехмерной поверхностью Σ_3; Λ — функция Лагранжа; δW^* — задаваемый функционал, представляющий собой (в случае непрерывных процессов) объемный интеграл по V_4; δW — функционал, представляющий собой интеграл по трехмерной поверхности Σ_3. В первом члене вариационного уравнения (3.9) варьируется подынтегральная функция] Λ, а произвольный объем V_4, по которому производится интегрирование, в рассматриваемой теории не варьируется.

В качестве основного предположения примем, что функции L и U для системы среда плюс электромагнитное поле задаются как функции следующих определяющих параметров:

$$x_j^i,\ s,\ F_{ij},\ \nabla_k F_{ij},\ K^B \tag{3.10}$$

где $x_j^i = \partial x^i/\partial \xi^j$, K^B — постоянные или заданные неварьируемые функции лагранжевых координат ξ^k, s — энтропия. В частности, в число K^B могут входить компоненты метрического тензора $\hat{g}_{ij}$ (если метрика пространства задана) и тензорные или скалярные константы, характеризующие геометрические и физические свойства среды. Для построения многих важных моделей сплошных сред такое допущение вполне достаточно.

В тех случаях, когда конструируемая модель должна описывать различные физические эффекты (гиромагнитный, необратимость намагничивания или деформирования и т. д.), к набору определяющих параметров модели (3.10) необходимо добавлять скалярные или тензорные величины μ^A (а иногда и их производные), ответственные за дополнительные внутренние степени свободы рассматриваемой физической модели. Последующие формулы и выводы легко обобщаются и на эти случаи. Вместо компонент тензора F_{ij} можно вводить компоненты тензора поляризации — намагничивания

$$P_{ij} = \frac{1}{4\pi}(H_{ij} - F_{ij})$$

и во многих случаях получать те же самые модели [3–5,7,8].

Кроме x_j^i, F_{ij}, в качестве искомых функций в лагранжиан Λ введем еще компоненты четырехмерного вектора $A = (A^i)$ (который окажется векторным потенциалом поля) и компоненты тензора H^{ij}.

Возьмем в качестве лагранжиана Λ сумму $-(L + U)$, стоящую в левой части уравнения (2.7) под знаком дифференциала, и добавочного члена Λ', обеспечивающего получение из вариационного уравнения уравнений Максвелла, т. е. положим

$$\Lambda = -(L + U) + \Lambda' \tag{3.11}$$

$$\Lambda' = \frac{1}{8\pi} F_{ij} H^{ij} - \frac{1}{4\pi} H^{ij} \nabla_i A_j$$

Ниже показано, что для действительных процессов слагаемое Λ' в силу уравнений Эйлера тождественно равно нулю.

Второй закон термодинамики для системы среда плюс поле в предположении, что для рассматриваемых процессов можно ввести температуру T среды, напишем в виде

$$\rho T ds = dQ^{(e)} + dQ'$$

Здесь s — энтропия, рассчитанная на единицу массы материальной среды; dQ' — некомпенсированное тепло.

Положим для простоты, что некомпенсированное тепло обусловлено только двумя механизмами — выделением джоулева тепла и диссипативными процессами, т. е.

$$dQ' = dQ_J' + dQ_0'$$

где dQ_J' — джоулево тепло, а dQ_0' — некомпенсированное тепло за счет необратимых процессов, обусловленных тензором $\tau_k{}^i$. В частности, здесь не учитываются необратимые эффекты при намагничивании и поляризации среды.

Далее в качестве основного предположения примем, что для варьированных процессов верны равенства[1]

$$\delta Q_I' = I^k F_{ki} \delta x^i - I^k \partial A_k \tag{3.12}$$

$$\delta Q_0' = \tau_k{}^i \nabla_i \delta x^k,$$

Используя (3.12), формулировку второго начала для варьированных процессов представим в виде

$$\rho T\, \delta s = \delta Q^{(e)} + I^k F_{ki} \delta x^i - I^k \partial A_k + \tau_k{}^i \nabla_i \delta x^k \tag{3.13}$$

Функционал δW^* представляет собой объемный интеграл от левой части уравнения энергии (2.7), из которого исключаются член $-d(L+U)$, входящий в Λ, и член dW_0, который (при $dK^B/d\tau = 0$) для варьированных процессов перейдет в функционал δW. Вариация δW^* получится после замены действительных приращений на возможные с последующим использованием равенства (3.13) в виде

$$\delta W^* = \int\limits_{V_4} \Big[\frac{1}{8\pi} H^{ij} \nabla_k F_{ij} \delta x^k + \rho T \delta s + \tag{3.14}$$

$$+ I^k \partial A_k - \tau_k{}^i \nabla_i \delta x^k - Q_k \delta x^k \Big] dV_4$$

---

[1] Появление члена $-I^k \partial A_k$ обосновывается, в частности, получением с его помощью уравнений Максвелла, которые содержат в себе апробированную концентрацию опытных данных. В связи с этим следует также обратить внимание на неконсервативность уравнений электромагнитного поля при наличии токов проводимости.

4. Система уравнений механики и электродинамики. Получим связанную систему уравнений механики сплошной среды и электродинамики с помощью вариационного уравнения (3.9). Возьмем выражение для лагранжиана Λ в виде (3.11), а выражение для функционала δW^* в виде (3.14). Варьирование первого слагаемого вариационного уравнения (3.9) будем проводить с учетом равенства [1]

$$\delta \int\limits_{V_4} \Lambda\, dV_4 = \iint\limits_{V_4} [\partial\Lambda + \delta x^k \nabla_k \Lambda)]\, dV_4$$

Полагая, что вариации ∂H^{ij}, ∂A_k, δx^i, δs и ∂F_{ij} непрерывны и линейно-независимы, из вариационного уравнения (3.9) получаем связанную систему уравнений электродинамики и механики. Эта система уравнений получается приравниванием к нулю коэффициентов при независимых вариациях в объемном интеграле вариационного уравнения (3.9). При вариациях ∂H^{ij} и ∂A_k получим уравнения Максвелла

$$F_{ij} = \nabla_i A_j - \nabla_j A_i \tag{4.1}$$
$$\nabla_i H^{ki} = 4\pi I^k$$

При вариациях δx^i с учетом (4.3) и (4.4) — уравнения импульсов

$$\nabla_k \left(\frac{\partial (L+U)}{\partial x_j^i} x_j^k \right) - \nabla_k \left[\frac{\partial (L+U)}{\partial \nabla_k F_{mn}} \nabla_i F_{mn} \right] + \tag{4.2}$$
$$+ \nabla_k \tau_i^k = Q_i$$

При вариации δs — формулу для температуры T

$$\rho T = \frac{\partial (L+U)}{\partial s} \tag{4.3}$$

При независимых вариациях ∂F_{ij} $(i > j)$ в данном случае получим уравнения состояния для H^{ij}, причем аргументы F_{ij} $(i < j)$ в функции $L + U$ заменены на $- F_{ij}$ $(i > j)$

$$\frac{1}{4\pi} H^{ij} = \frac{\partial (L+U)}{\partial F_{ij}} - \nabla_k \frac{\partial (L+U)}{\partial \nabla_k F_{ij}} \tag{4.4}$$

Если скаляр $L + U$ не зависит от аргумента $\nabla_k F_{ij}$, то уравнение состояния (4.4) преобретает более простой вид

$$\frac{1}{4\pi} H^{ij} = \frac{\partial (L+U)}{\partial F_{ij}} \quad (i > j)$$

Кроме соотношений (4.1) — (4.4) из вариационного уравнения получается выражение для функционала δW

$$\delta W = \int\limits_{\Sigma_3} [P_i^k \delta x^i + N^{ik} \partial A_i + M^{ijk} \delta F_{ij}]\, n_k\, d\sigma_3 \tag{4.5}$$

$$P_i^k = \frac{\partial (L+U)}{\partial x_j^i} x_j^k + \tau_i^k - \frac{\partial (L+U)}{\partial \nabla_k F_{mn}} \nabla_i F_{mn} \tag{4.6}$$
$$N^{ik} = -\frac{1}{4\pi} H^{ik}, \quad M^{ijk} = \frac{\partial (L+U)}{\partial \nabla_k F_{ij}}$$

Здесь компоненты тензора P_i^k можно истолковать как компоненты тензора энергии — импульса системы сплошная среда плюс электромагнитное поле. Очевидно, что $\nabla_k P_i{}^k = Q_i$.

Из уравнения Эйлера можно получить следующее соотношение:

$$(4.7)\qquad \rho T\frac{ds}{d\tau} = \frac{dU}{d\tau} + \frac{dx^i}{d\tau}Q_i + \frac{dx^i}{d\tau}I^k F_{ki} + \frac{dx^i}{d\tau}\nabla_k S_{i\cdot}^{\cdot k} - \frac{dx^i}{d\tau}\nabla_k \tau_i{}^k - \\ - \frac{\partial(L+U)}{\partial K^B}\frac{dk^B}{d\tau} - \nabla_k\left[\frac{dx^i}{d\tau}x_j{}^k\frac{\partial(L+U)}{\partial x_j{}^i}\right]$$

если $\delta K^B = 0$, то $dK^B/d\tau = 0$; вообще говоря, $\delta x^i \nabla_i K^B \neq 0$, а $S_i^{\cdot k}$ — компоненты тензора Минковского (см. ниже). Равенство (4.7) с учетом второго закона термодинамики (3.13), взятого для действительных процессов, после некоторых преобразований приводит к уравнению энергии

$$(4.8)\qquad \frac{d(L+U)}{d\tau} = \frac{dQ^{(e)}}{d\tau} - Q_i\frac{dx^i}{d\tau} + I^k F_{ki}\frac{dx^i}{d\tau} + \frac{1}{8\pi}[H^{jk}\nabla_i F_{jk}]\frac{dx^i}{d\tau} + \\ + \nabla_k\left(\tau_i{}^k\frac{dx^i}{d\tau}\right) + \nabla_k\left[\frac{dx^i}{d\tau}x_j{}^k\frac{\partial(L+U)}{\partial x_j{}^i}\right]$$

Нетрудно усмотреть, что уравнение (4.8) представляет собой явную запись уравнения (2.7).

При бесконечно малом преобразовании координат $x^{i'} = x^i + \delta\eta^i$, где $\delta\eta^i$ — бесконечно малые функции x^k, в локальной собственной декартовой системе координат положим $\delta\eta^i = \varepsilon_j{}^i x^j$. (Постоянные коэффициенты $\varepsilon_j{}^i$, отвечающие бесконечно малому преобразованию Лоренца, образуют антисимметричную матрицу $\varepsilon^{ij} = -\varepsilon^{ji}$.)

В этом случае из условия скалярности [9] интеграла

$$\int\limits_{V_4}\Lambda dV_4$$

найдем соотношение, которому с использованием уравнений Эйлера можно придать вид

$$(4.9)\qquad (P^{ik} - \tau^{ik}) - (P^{ki} - \tau^{ki}) = S^{ik} - S^{ki} + 2\nabla_s\left[\frac{\partial(L+U)}{\partial\nabla_s F_{kj}}F^i{}_j - \frac{\partial(L+U)}{\partial\nabla_s F_{ij}}F_j{}^k\right]$$

и рассматривать как уравнение моментов количеств движения для системы среда плюс электромагнитное поле, где

$$S^{ki} = -\frac{1}{4\pi}\left(H^{ij}F_i{}^k - \frac{1}{4}H^{mn}F_{mn}g^{ik}\right)$$

Во всех предыдущих соотношениях (4.1) — (4.9) подразумевалось, что L и U — задаваемые функции аргументов (3.10). Для того, чтобы вариационное уравнение (3.9) переходило локально в уравнение энергии, необходимо, чтобы функция L была определена равенством (2.4), которое на основании (4.4) приводит к соотношению

$$(4.10)\qquad \frac{1}{8\pi}H^{ij}F_{ij} = L = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial(L+U)}{\partial F_{ij}}F_{ij} - \nabla_k\frac{\partial(L+U)}{\partial\nabla_k F_{ij}}F_{ij}\right](i>j)$$

Равенство (4.10) представляет собой физическое ограничение на задаваемые функции L и U.

5. О различных моделях твердых, жидких и газообразных сред. Отправляясь от общих уравнений (4.1), (4.2) и уравнений состояния (4.3), (4.4), можно получать конкретные модели сплошных сред. Для этого необходимо задать функции L, U от определяющих параметров с учетом

(4.10) и зафиксировать физические законы, характеризующие необратимые процессы для четырехмерного вектора тока I^k (соотношения типа закона Ома), для компонент тензора $\tau_i^{\ k}$ (соотношения типа законов вязких напряжений). Кроме этого, конечно, необходимы данные о внешних силах Q_k и физических или геометрических параметрах K^B, характеризующих макроскопическую структуру среды.

В частности, получаемая таким путем система соотношений содержит в себе модель нелинейного упругого тела с учетом эффектов поляризации и намагничивания; модель идеальной или вязкой жидкости или газов и, в частности, модели магнитной и электрогидродинамики, модели ферромагнитных жидкостей и множество других примеров моделей, уже изучавшихся, а также новых моделей, которые необходимо еще построить применительно к различным классам явлений.

Рассмотрим некоторые общие свойства уравнений состояния для H^{ij} (4.4) и уравнений состояния (4.6), сводящихся к выражению для компонент тензора энергии импульса $P_i^{\ k}$.

В частности, можно предположить, что функция L представляет собой квадратичную форму по антисимметричным компонентам тензора F_{ij}:

$$L = \frac{1}{16\pi} c^{ijkl} F_{ij} F_{kl} \tag{5.1}$$

где компоненты тензора c^{ijkl} — некоторые задаваемые функции определяющих параметров $x_j^{\ i}$, энтропии s, а также K^B, причем из смысла формулы (5.1) компоненты тензора c^{ijkl} удовлетворяют равенствам

$$c^{ijkl} = c^{klij} = - c^{jikl} = c^{ijlk}$$

Кроме этого, предположим в соответствии с (4.10), что U не зависит от F_{ij} и $\nabla_k F_{ij}$. В этом случае уравнения состояния (4.4) для электромагнитного поля примут вид

$$H^{ij} = c^{ijkl} F_{kl}, \quad c^{ijkl} = c^{ijkl} (x_q^{\ p}, s, K^B) \tag{5.2}$$

Если компоненты тензора c^{ijkl} зависят только от g_{ij}, ρ, u^{*i}, s и, возможно, еще от других скалярных величин, то в этом случае имеет место пространственная изотропия [1], и компоненты тензора c^{ijkl} представятся формулами

$$\begin{aligned} c^{ijkl} = \frac{1}{2} \Big[& \frac{1}{\mu} (g^{ik} g^{jl} - g^{il} g^{jk}) + \\ & + \left(\varepsilon - \frac{1}{\mu}\right) (g^{ik} u^{*j} u^{*l} - g^{jk} u^{*i} u^{*l} + g^{jl} u^{*i} u^{*k} - g^{il} u^{*j} u^{*k}) \Big] \end{aligned} \tag{5.3}$$

Здесь ε и μ — коэффициенты диэлектрической и магнитной проницаемости, которые могут зависеть от ρ и s или от ρ и T и, возможно, в более общих случаях, еще от других переменных или постоянных скалярных параметров.

Соотношение (5.2) на основании (5.3) в собственной системе координат в трехмерном виде приводится к часто используемым формулам

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

[1] Для конкретных видов анизотропии также легко указать другие формулы вместо (5.3) [1].

Если материальная среда не намагничивается и не поляризуется, получается, что $\varepsilon = 1$ и $\mu = 1$. Если среда не намагничивается, а только поляризуется, то $\mu = 1$, а $\varepsilon \neq 1$. Наоборот, если среда только намагничивается и не поляризуется, то $\varepsilon = 1$ и $\mu \neq 1$. Такое простое положение присуще излагаемой конструкции с выбранной системой определяющих параметров (3.10) и дополнительными предположениями.

Если скалярная функция L и полная энергия U являются функциями следующих аргументов:

(5.4) $$\rho,\ u^i,\ F_{ij},\ s,\ K^B$$

то для компонент тензора энергии импульса $P_k{}^i$, согласно (4.6), получим

(5.5) $$P_k{}^i = \frac{\partial (L+U)}{\partial u^j}(\delta_k{}^j - u_k u^j)\,u^i - \rho\frac{\partial (L+U)}{\partial \rho}(\delta_k{}^i - u_k u^i) + \tau_k{}^i$$

Конкретизацию выражения для тензора энергии — импульса можно получить, в частности, на основании дополнительных предположений типа (5.1) и (5.3). Дальнейшее упрощение выражения для тензора энергии — импульса получится, если принять, что

(5.6) $$U = \rho c^2 + \rho U_0(\rho,\ s)$$

Модель сплошной среды, описываемой общими уравнениями (4.1) — (4.4) в предположениях (5.3) — (5.6) является релятивистской моделью вязкой изотропной сжимаемой поляризующейся и намагничивающейся жидкости после конкретизации $\tau_k{}^i$. Тензор энергии-импульса, соответствующий предположениям (5.3) — (5.6), имеет вид

$$P_k{}^i = -\left[+U + \rho^2\frac{\partial U_0}{\partial \rho}\right](\delta^i{}_k - u_k u^i) + \frac{1}{8\pi}\left[\frac{1}{2}\frac{\rho}{\mu^2}\frac{\partial \mu}{\partial \rho}F_{mn}F^{mn} + \right.$$
$$\left. + \rho\left(\frac{1}{\mu^2}\frac{\partial \mu}{\partial \rho} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right)F_{mn}F_q{}^m u^{*n}u^{*q}\right].(\delta_k{}^i - u_k u^i) +$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\frac{\varepsilon\mu - 1}{\mu}F_{mn}F_q{}^m u^{*n}u^{*i}(\delta_k{}^q - u_k u^q) + \tau_k{}^i$$

Для определения компонент тензора $\tau_k{}^i$, связанного с законами диссипации, необходимы дополнительные предположения, которые могут быть различными. Однако в данной работе эти вопросы не затрагиваются.

Описанный выше метод построения моделей с помощью базового уравнения (3.9) на первый взгляд может показаться довольно сложным и искусственным, однако эта сложность связана с существом дела и, вообще говоря, в явном, а чаще всего в неявном виде присутствует всегда, причем обычно без унифицированной, упорядоченной системы. К этому можно еще добавить, что теперь использование вариационных «принципов» (без δW^* и δW) уже стало основным и, по-видимому, единственным источником для построения примеров новых моделей в теории относительности и в других физических теориях.

Следует подчеркнуть, что проблема установления новых физико-механических моделей — это принципиально важная задача, которая должна исследоваться и разрешается один раз для многочисленных последующих отдельных приложений. Аналогичным образом устанавливаются простейшие модели идеальной жидкости, упругого тела с последующими приложениями их в гидродинамике, аэродинамике, строительной механике и в других областях.

В приложениях, при численных решениях различных конкретных задач, можно использовать уравнение (3.9) непосредственно, причем для применяемых моделей это уравнение содержит в себе не только замкнутую систему уравнений Эйлера, но и дополнительные начальные и краевые условия. Кроме того, благодаря интегральной форме уравнения (3.9) условия на сильных разрывах удовлетворяются автоматически.

Поступила 7 XII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды, т. 1. Изд. 2. М., «Наука», 1973, стр. 504—530.
2. *Седов Л. И.* Об условиях на сильных разрывах в теории гравитации. ПММ, 1972, т. 36, вып. 1.
3. *Седов Л. И.* О пондеромоторных силах взаимодействия электромагнитного поля и ускоренно движущегося материального континуума с учетом конечности деформаций. ПММ, 1965, т. 29, вып. 1.
4. *Седов Л. И.* Математические методы построения новых моделей сплошных сред. Успехи матем. наук, 1965, т. 20, вып. 5.
5. *Желнорович В. А.* Модели сплошных сред с внутренними электромагнитными и механическими моментами. В сб.: Проблемы гидромеханики и механики сплошной среды. М., «Наука», 1968, стр. 803—815.
6. *Штейн А. А.* Модели поляризующихся сред и усредненные соотношения, соответствующие им в случае высокочастотного электромагнитного поля. ПММ, 1977, т. 41, вып. 2.
7. *Цыпкин А. Г.* Об одной модели сплошной среды с учетом электромагнитных эффектов. ПММ, 1977, т. 41, вып. 1.
8. *Черный Л. Т.* Построение моделей магнитоупругих сплошных сред с учетом магнитного гистерезиса и пластических деформаций. Научн. тр. Ин-та механики МГУ, 1974, № 31.
9. *Желнорович В. А., Седов Л. И.* О вариационном выводе уравнений состояния для материальной среды и гравитационного поля. ПММ, 1978, т. 42, вып. 5.