В заключение отметим, что полученные уравнения содержат в себе как частные случаи уравнения динамики плоскокриволинейных стержней ($\varkappa = 0$) и стержней прямолинейных — закрученных ($k = 0$, $\varkappa \neq 0$) и без предварительной крутки ($k = \varkappa = 0$; см., например, [8]).

Поступила 13 X 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лурье А. И.* О малых деформациях криволинейных стержней. Тр. Ленингр. политехн. ин-та. Сер. физ.-матем. наук, 1941, № 3.
2. *Джанелидзе Г. Ю.* Теория тонких криволинейных стержней, обладающих в поперечном сечении недеформируемым контуром. ПММ, 1944, т. 8, вып. 1.
3. *Голубев О. Б.* Обобщение теории тонких стержней. Тр. Ленингр. политехн. ин-та. Динамика и прочность машин, 1963, № 226.
4. *Washizu K.* Some consideration on a naturally curved and twisted slender beam. J. Math. and Phys., 1964, vol. 43, No. 2.
5. *Аронсон А. Я.* Об одном варианте построения обобщенной теории стержней. В сб.: Динамика и прочность упругих и гидроупругих систем. М., «Наука», 1975.
6. *Погорелов А. В.* Дифференциальная геометрия. М., «Наука», 1974.
7. *Рапопорт И. М.* О колебаниях упругих стержней. Докл. АН СССР, 1963, т. 153, № 4.
8. *Гордиенко Б. А.* Выпучивание стержней при ударном нагружении. Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 1.

УДК 539.3 : 534.1

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ МЕМБРАНЫ

В. Г. Вильке

(Москва)

Методом Ляпунова в функциональном пространстве исследуются вертикальные колебания мембраны при нелинейном законе упругости и конечных деформациях.

1. Постановка задачи. Предположим, что в недеформированном состоянии мембрана занимает область Ω на плоскости Ox_1x_2 и имеет естественное состояние, деформация мембраны состоит из равномерного растяжения по осям Ox_1, Ox_2 и отклонения u по оси Ox_3, а ее граница Γ остается на плоскости Ox_1x_2, т. е.

$$x_1 = (1 + e)a_1, \quad x_2 = (1 + e)a_2, \quad x_3 = u\,(a_1, a_2, t) \qquad (e > 0) \tag{1.1}$$

$$u\,(a_1, a_2, t)\,|_\Gamma = 0, \quad \Gamma = \partial\Omega$$

Потенциальную энергию деформаций считаем зависящей только от главных удлинений тензора дилатаций.

Согласно первому предположению, кинетическая энергия мембраны определяется выражением

$$T = \frac{1}{2}\rho \int\limits_\Omega u^{\cdot 2} da \quad \left(u^\cdot = \frac{\partial u}{\partial t}, \ da = da_1 da_2\right)$$

Здесь ρ — поверхностная плотность мембраны, которую полагаем постоянной.

Из (1.1) следует, что главные удлинения тензора дилатаций имеют вид

$$\lambda_1 = 1 + e, \quad \lambda_2 = [(1 + e)^2 + u_1^2 + u_2^2]^{1/2} \ (u_1 = \partial u / \partial a_1, \ u_2 = \partial u / \partial a_2)$$

Согласно последнему предположению, потенциальная энергия деформаций представляется в виде функционала

$$\mathrm{E}\,[u] = \int\limits_\Omega F\,(\xi)\, da, \quad \xi = \lambda_2 \tag{1.2}$$

Здесь $F(\xi)$ — функция, зависящая от свойств материала мембраны. В частности, при $F(\xi) = \xi^2 - (1+e)^2$ задача о колебаниях мембраны становится линейной (см., например, [1]). Функция

$$F(\xi) = b_2\xi^2 + b_1\xi + b_0 \quad (b_1, b_2, b_0 = \mathrm{const}) \tag{1.3}$$

соответствует закону Гука, а функция

$$F(\xi) = \alpha\left[\xi^2 + \frac{1}{(1+e)^2\xi^2} + (1+e)^2 - 3\right] + \beta\left[(1+e)^2\xi^2 + \frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{(1+e)^2} - 3\right] \tag{1.4}$$

где α, β — некоторые постоянные, описывает модель несжимаемой резины, предложенную Р. Ривлином и Д. Сондерсом [2].

Конфигурационным пространством системы V является линейное пространство функций, заданных на Ω и обращающихся в нуль на границе

$$V = \{u\colon \mathrm{E}[u] < \infty,\ u|_\Gamma = 0\}$$

Свойства пространства зависят от вида функции $F(\xi)$. Так, в примерах (1.3), (1.4) $V = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. В частности

$$V = \overset{\circ}{W}{}_4^1(\Omega) \quad \text{при } F(\xi) = \sum_{k=0}^{4} b_k\xi^k$$

Фазовое пространство системы определяется как прямое произведение конфигурационного пространства V и гильбертова пространства скоростей H

$$H = \{u^\cdot : u^\cdot \in L_2(\Omega),\ u^\cdot|_\Gamma = 0\}$$

Вариационное уравнение движения мембраны (принцип Даламбера — Лагранжа) запишется в виде

$$\rho(u^{\cdot\cdot}, \delta u) + (\nabla \mathrm{E}[u], \delta u) - (f, \delta u) = 0, \quad \forall \delta u \in V \tag{1.5}$$

$$(u^{\cdot\cdot}, \delta u) \equiv \int_\Omega u^{\cdot\cdot}\delta u\,da, \quad (\nabla \mathrm{E}[u], \delta u) \equiv \int_\Omega \frac{\partial F}{\partial \xi}\frac{1}{\xi}(u_1\delta u_1 + u_2\delta u_2)\,da$$

Здесь $f(a_1, a_2)$ — внешние поверхностные силы, которые предполагаем не зависящими от времени.

2. Стационарное решение и его устойчивость. Уравнение (1.5) имеет стационарное решение $u = u_0 \in V$, описывающее положение равновесия и удовлетворяющее условию

$$(\nabla \mathrm{E}[u_0], \delta u) - (f, \delta u) = 0, \quad \forall \delta u \in V \tag{2.1}$$

Исследуем устойчивость решения u_0. Первый интеграл уравнения (1.5) (закон сохранения энергии) имеет вид

$${}^1\!/_2\rho(u^\cdot, u^\cdot) + \mathrm{E}[u] - (f, u) = E \tag{2.2}$$

Заменяя в (2.2) u на $u + u_0$, получим

$$^1\!/_2\rho(u^\cdot, u^\cdot) + \mathrm{E}[u_0 + u] - (f, u_0) - (f, u) = E \tag{2.3}$$

Здесь u — отклонение мембраны от положения равновесия.

Рассмотрим на фазовом пространстве системы функционал

$$\Phi[u^\cdot, u] = {}^1\!/_2\rho(u^\cdot, u^\cdot) + \mathrm{E}[u_0 + u] - \mathrm{E}[u_0] - (f, u) \tag{2.4}$$

При $u = u^\cdot = 0$ функционал (2.4) обращается в нуль. Предполагая $\Phi[u^\cdot, u]$ положительно-определенным и ограниченным в некоторой окрестности нуля фазового пространства (т. е. в начальных обозначениях — в окрестности $(0, u_0)$), выберем его в качестве функционала Ляпунова, производная которого в силу уравнений движения равна нулю. Таким образом, стационарное решение (2.1) оказывается устойчивым в смысле Ляпунова [3]. Величина $^1\!/_2\rho(u^\cdot, u^\cdot)$ положительно определена и ограничена на пространстве скоростей ($(u^\cdot, u^\cdot)$ — квадрат нормы).

Покажем, что функционал (2.4) является функционалом Ляпунова для законов упругости (1.3) и (1.4). Выберем норму конфигурационного пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$

в виде

$$\| u \| = \left[\int_\Omega (u_1^2 + u_2^2)\, da \right]^{1/2}$$

Лемма. Если вторая вариация по Фреше функционала E $[u]$ в некоторой окрестности стационарного решения положительно определена и ограничена, т. е.

$$k_1 \| u \|^2 \leqslant (\nabla^2 \mathrm{E}\, [v] u,\, u) \leqslant k_2 \| u \|^2 \quad (k_1 > 0) \tag{2.5}$$

при $\| v - u_0 \| < h$ $(h > 0)$, где $\| \cdot \|$ означает норму в конфигурационном пространстве V, то при $\| u \| < h$

$$\tfrac{1}{2} k_1 \| u \|^2 \leqslant \mathrm{E}\, [u + u_0] - (\nabla \mathrm{E}\, [u_0],\, u) - \mathrm{E}\, [u_0] \leqslant \tfrac{1}{2} k_2 \| u \|^2 \tag{2.6}$$

Доказательство. Введем функцию $W(\tau) : [0, 1] \to R^1$, определяемую соотношениями

$$W(\tau) = \mathrm{E}\, [u_0 + \tau u] - (\nabla \mathrm{E}\, [u_0],\, \tau u) - \mathrm{E}\, [u_0] \tag{2.7}$$

$$dW / d\tau = (\nabla \mathrm{E}\, [u_0 + \tau u] - \nabla \mathrm{E}\, [u_0],\, u)$$

$$d^2 W / d\tau^2 = (\nabla^2 \mathrm{E}\, [u_0 + \tau u] u,\, u)$$

Если $\| u \| < h$, то согласно (2.5)

$$k_1 \| u \|^2 \leqslant d^2 W / d\tau^2 \leqslant k_2 \| u \|^2 \tag{2.8}$$

Интегрируя неравенство (2.8) дважды по τ и учитывая соотношения $W(0) = dW(0) / d\tau = 0$, приходим к (2.6).

В случае (1.3) вторая вариация по Фреше функционала E $[u]$ имеет вид

$$(\nabla^2 \mathrm{E}\, [v]\, u,\, u) = \int_\Omega \left[\left(2b_2 - \frac{b_1}{\xi} \right) (u_1^2 + u_2^2) + \frac{b_1}{\xi^3} (v_1 u_1 + v_2 u_2)^2 \right] da,$$

$$\xi^2 = (1 + e)^2 + v_1^2 + v_2^2$$

Тогда справедлива оценка

$$[2b_2 - b_1 / (1 + e)] \| u \|^2 \leqslant (\nabla^2 \mathrm{E}\, [u_0] u,\, u) \leqslant (2b_2 + \tfrac{3}{2} b_1) \| u \|^2$$

Коэффициенты b_2 и b_1 выражаются через модуль сдвига G и коэффициент поперечного сжатия m (число Пуассона) [4]:

$$b_2 = Gm / (m - 1), \quad b_1 = 2 (m - e) G / (m - 1)$$

Отсюда вытекает, что $2b_2 - b_1 / (1 + e) > 0$, и, согласно лемме, функционал (1.3) положительно определен и ограничен, а, значит, стационарное решение устойчиво.

Покажем справедливость аналогичных неравенств для функционала (1.4). Рассмотрим функцию $W(\tau)$ из (2.7), построенную с помощью функционала (1.4). Имеем

$$(\nabla \mathrm{E}\, [v]\, u,\, u) = \int_\Omega 2 \left\{ \alpha \left[1 - \frac{1}{(1 + e)^2 \xi^4} \right] + \beta \left[(1 + e)^2 - \frac{1}{\xi^4} \right] \right\} (v_1 u_1 + v_2 u_2)\, da \tag{2.9}$$

$$(\nabla^2 \mathrm{E}\, [v]\, u,\, u) = \int_\Omega \left\{ \left[\frac{\alpha}{(1 + e)^2} + \beta \right] \frac{8}{\xi^6} (v_1 u_1 + v_2 u_2)^2 + \left[\alpha \left(1 - \frac{1}{(1 + e)^2 \xi^4} \right) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \beta \left((1 + e)^2 - \frac{1}{\xi^4} \right) \right] 2 (u_1^2 + u_2^2) \right\} da, \quad \xi^2 = (1 + e)^2 + v_1^2 + v_2^2$$

Поскольку $\xi^4 \geqslant (1 + e)^4$, то второе соотношение (2.9) оценивается неравенством

$$(\nabla^2 \mathrm{E}\, [v]\, u,\, u) \geqslant c_1 \| u \|^2, \quad c_1 = 2\alpha \left[1 - \frac{1}{(1 + e)^6} \right] + 2\beta \left[(1 + e)^2 - \frac{1}{(1 + e)^4} \right] > 0 \tag{2.10}$$

Ограниченность второй вариации (2.9) в $W^\circ{}_2^1\, (\Omega)$ следует из оценки

$$(\nabla^2 \mathrm{E}\, [v]\, u,\, u) \leqslant c_2 \| u \|^2, \quad c_2 = \frac{8\alpha}{(1 + e)^6} + \frac{8\beta}{(1 + e)^4} + 2\alpha + 2\beta (1 + e)^2 \tag{2.11}$$

Из неравенств (2.10) и (2.11) следует вывод, что функционал (2.4) положительно определен и ограничен, а, следовательно, стационарное решение уравнения (1.5) устойчиво по Ляпунову.

Поступила 11 III 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л.* Уравнения математической физики. М., «Наука», 1966.
2. *Гольденблат И. И.* Нелинейные проблемы теории упругости. М., «Наука», 1969.
3. *Массера Х. Л.*, *Шеффер Х. Х.* Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. М., «Мир», 1970.
4. *Треффц Е.* Математическая теория упругости. Л.—М., Гостехиздат, 1934.

Технический редактор *З. В. Филиппова*

Сдано в набор 23.01.79 Подписано к печати 22.03.79 Т-02882 Формат бумаги $70\times108^{1}/_{16}$
Высокая печать Усл. печ. л. 16,8 Уч.-изд. л. 15,6 Бум. л. 6 Тираж 2830 экз. Зак. 1461

Издательство «Наука». 103717 ГСП, Москва, К-62, Подсосенский пер., 21
2-я типография издательства «Наука». 121099, Москва, Шубинский пер., 10