которому принадлежит точка t. Уравнение (2.2) можно записать теперь в следующем виде:

$$\omega(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\sum_{k=0}^{n-1}\Big\{\exp(i\alpha_k)\left[\omega(t)\,d\ln\xi_k(t)-\overline{\omega(t)}\,d\ln\xi_k(\bar t)\right]-$$
$$-\exp(-i\alpha_k)\left[\overline{\omega(t)}\,d\xi_k(t)-\omega(t)\,d\xi_k(\bar t)\right]-$$
$$-2\pi\left[\omega(t)\,d\bar t-\overline{\omega(t)}\,dt\right]\left[\frac{1}{\bar t_0-\bar z_p\exp(-i\alpha_k)}+\frac{1}{\bar t_0-z_p\exp(i\alpha_k)}\right]\Big\}-$$
$$-C_l=f(t_0),\quad t_0\in\Gamma_{l0},\quad l=p(t_0),\quad p=p(t),\quad z_p=z_{p0} \tag{2.4}$$

где $\xi_k(t)$ определяется формулой (2.3).

Таким образом, функция $\omega(t)$ должна удовлетворять уравнению (2.4), заданному на части Γ границы L области D. Разрешимость уравнения (2.4) следует из разрешимости уравнения Шермана — Лауричелла. Правда, для единственности решения последнего уравнения Д. И. Шерманом введен в него еще один член [4] с неизвестным мнимым множителем b_{m+1}. Однако при существовании зеркальной симметрии этот член обращается в нуль, благодаря первому равенству (1.7).

Следует заметить, что для областей, обладающих только циклической симметрией, дополнительный член должен быть введен в уравнение (2.4), как это и делалось в [1, 2]. Но и при этом функция будет удовлетворять второму равенству (1.7).

Поступила 21 XII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Буйвол В. М.* Бігармонічна задача для багатозв'язних систем з циклічною симетрією. Прикл. механіка, 1959, т. 5, вип. 3.
2. *Вигдергауз С. Б.* О плоской задаче теории упругости для многосвязных областей с циклической симметрией. ПММ, 1974, т. 38, вып. 5.
3. *Шерман Д. И.* К решению плоской статической задачи теории упругости при заданных внешних силах. Докл. АН СССР, 1940, т. 28, № 1.
4. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
5. *Партон В. З.*, *Перлин П. И.* Интегральные уравнения теории упругости. М., «Наука», 1977.

УДК 624.071.3 : 534.1

ТЕОРИЯ ПРОСТРАНСТВЕННО-КРИВОЛИНЕЙНЫХ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ

Б. А. Гордиенко

(Куйбышев)

Развита геометрически нелинейная теория пространственно-криволинейных стержней с учетом инерции вращения, деформации поперечного сдвига, изменения формы и размеров сечений и дополнительных усилий, связанных с поворотом сечений стержня при его деформировании. Получены варианты гиперболических уравнений. Построены параболические приближения.

Основные соотношения и уравнения движения линейной теории кривых стержней рассматривались, например, в работах [1–5]. Уточнение результатов линейной теории велось в основном в направлении учета изменяемости контура и депланации сечений [3–5].

1. Постановка задачи. Рассматривается естественно закрученный стержень переменного сечения $F(s)$, выполненный из упругого изотропного материала с постоянными механическими характеристиками (F — площадь сечения; s — длина дуги осевой линии стержня). Способы опирания краевых сечений считаются известными, условия нагружения — заданными.

Отметим три точки стержня — P, P_0, P^*, где P_0 — проекция P на осевую линию стержня, а P^* — точка, в которую переходит P в процессе деформирования. Радиус-векторы $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{r}^*$ соответственно точек P, P_0, P^*, проведенные из неподвижного начала, удовлетворяют соотношениям

$$(1.1)\qquad \mathbf{r}^* = \mathbf{r} + \mathbf{u},\ \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \eta\mathbf{n} + \zeta\mathbf{b},\ \mathbf{u} = u_j\mathbf{e}_j$$
$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \equiv \mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b};\ u_1, u_2, u_3 \equiv u, v, w)$$

Здесь $\mathbf{u}$, u_j — вектор перемещений точки P и его компоненты; $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ — орты касательной, нормали и бинормали к осевой линии стержня ($\mathbf{t} = d\mathbf{r}_0 / ds$); s, η, ζ — соответствующие координаты точки P. По повторяющимся индексам подразумевается суммирование от единицы до трех.

Дифференцируя (1.1) и используя формулы Серре — Френе [6], получим

$$(1.2)\qquad d\mathbf{r}^* = d\mathbf{r} + d\mathbf{u}$$
$$d\mathbf{r} = (\partial\mathbf{r} / \partial s)\, ds + (\partial\mathbf{r} / \partial\eta)\, d\eta + (\partial\mathbf{r} / \partial\zeta)\, d\zeta = [(1 - k\eta)\,\mathbf{t} - \varkappa\zeta\mathbf{n} +$$
$$+ \varkappa\eta\mathbf{b}]\, ds + \mathbf{n}d\eta + \mathbf{b}d\zeta$$
$$d\mathbf{u} = (\partial\mathbf{u} / \partial s)\, ds + (\partial\mathbf{u} / \partial\eta)\, d\eta + (\partial\mathbf{u} / \partial\zeta)\, d\zeta = e_{ij}\mathbf{e}_j d\xi_i$$

$$(1.3)\qquad e_{11} = \partial u - kv,\ e_{12} = \partial v + ku - \varkappa w,\ e_{13} = \partial w + \varkappa v$$
$$e_{ij} = \partial u_j / \partial\xi_i\ (i = 2, 3;\ j = 1, 2, 3;\ \xi_1, \xi_2, \xi_3 \equiv s, \eta, \zeta;\ \partial \equiv \partial / \partial s)$$
$$(dr)^2 = g_{ij}d\xi_i d\xi_j,\ (dr^*)^2 = g_{ij}^* d\xi_i d\xi_j$$
$$g_{11} = (1 - k\eta)^2 + \varkappa^2(\eta^2 + \zeta^2),\ g_{22} = g_{33} = 1$$
$$g_{12} = g_{21} = -\varkappa\zeta,\ g_{13} = g_{31} = \varkappa\eta,\ g_{23} = g_{32} = 0$$
$$g_{ij}(\eta = 0, \zeta = 0) = \delta_i^j,\quad g_{ij}^* = g_{ij} + 2\varepsilon_{ij}$$
$$2\varepsilon_{ij} = e_{ij} + e_{ji} + e_{is}e_{js} - (1 + \delta_i^j)\, a_{ij}(\eta, \zeta)$$
$$a_{1j} = (ke_{j1} - \varkappa e_{j3})\,\eta + \varkappa e_{j2}\zeta\ (j = 1, 2, 3)$$
$$a_{21} = a_{12}, a_{31} = a_{13},\ a_{22} = a_{33} = a_{23} = a_{32} = 0$$

Здесь e_{ij} — компоненты тензора дисторсии; g_{ij}, g_{ij}^* — компоненты метрического тензора для начального и деформированного состояний стержня; δ_i^j — символ Кронекера; ε_{ij} — компоненты тензора деформаций; k, $\varkappa$ — кривизна и кручение осевой линии стержня. Из (1.2) следует, что только для точек осевой линии недеформированного стержня выбранная система координат является триортогональной.

Представляя соответствующие функции разложениями по степеням η, ζ, получим

$$(1.4)\qquad (u_j, e_{ij}, \varepsilon_{ij}) = (u_{j,pq}, e_{ij,pq}, \varepsilon_{ij,pq})\,\eta^p\zeta^q$$

$$(1.5)\qquad e_{11,pq} = \partial u_{,pq} - kv_{,pq},\ e_{13,pq} = \partial w_{,pq} + \varkappa v_{,pq} e_{12,pq} = \partial v_{,pq} + ku_{,pq} - \varkappa w_{,pq}$$
$$e_{2j,pq} = (p + 1)\, u_{j,p+1\,q},\ e_{3j,pq} = (q + 1)\, u_{j,p\,q+1}\ (j = 1, 2, 3)$$
$$2\varepsilon_{ij,pq} = e_{ij,pq} + e_{ji,pq} + e_{is,kl}e_{js,p-k\,q-l} - (1 + \delta_i^j)\, a_{ij,pq}$$
$$a_{1j,pq} = (ke_{j1,p-1\,q} - \varkappa e_{j3,p-1\,q}) + \varkappa e_{j2,p\,q-1}$$
$$a_{21,pq} = a_{12,pq},\ a_{31,pq} = a_{13,pq},\ a_{22,pq} = a_{33,pq} = a_{23,pq} = a_{32,pq} = 0$$

Здесь по индексам p, q подразумевается суммирование от 0 до ∞, по k, l — от 0 до p и q соответственно. Индексы до запятой имеют тот же смысл, что и в выражениях (1.2), (1.3).

Закон Гука в безразмерной форме для трехосного напряженно-деформированного состояния может быть записан следующим образом:

$$\varepsilon_{ij}^\circ = 2\nu\,(\varepsilon_{ij} + \delta_i^j B\theta)$$
$$(\varepsilon_{ij}^\circ = \sigma_{ij} / E,\ \nu = 1 / [2\,(1 + \mu)],\ B = \mu / (1 - 2\mu),\ \theta = \varepsilon_{ss})$$

Здесь σ_{ij}, ε_{ij}° — физические напряжения и их безразмерные аналоги; E, μ — модуль Юнга и коэффициент Пуассона.

Полагая $(\mathbf{v}, B) = (\mathbf{v}, B)_{,pq}\eta^p\zeta^q$ и используя (1.5), получим

$$\varepsilon_{ij}^\circ = \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij,pq}\eta^p\zeta^q$$

$$\overset{\bullet}{\varepsilon}_{ij,pq} = 2\,\nu_{,kl}\,(\varepsilon_{ij,p-kq-l} + \delta_i{}^j B_{,r-ks-l}\theta_{,p-rq-s})$$

$$(k \leqslant r,\ r \leqslant p,\ l \leqslant s,\ s \leqslant q)$$

Для стержней, механические характеристики которых постоянны по сечению и вдоль осевой линии

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij,pq} = 2\,\nu\,(\varepsilon_{ij,pq} + \delta_i{}^j B\theta_{,pq}) \tag{1.6}$$

Внутренние усилия и моменты в безразмерной форме могут быть определены следующим образом:

$$N_{1k}^\bullet = \overset{\circ}{N}_{k1} = \frac{1}{EF}\iint\limits_{F(s)} \overset{\circ}{\varepsilon}_{1k}\,dF = \overset{\bullet}{\varepsilon}_{1k,\,pq}\,j_{pq}^2\ (k = 1,\ 2,\ 3)$$

$$M_{11}^\bullet = \overset{\circ}{M}_t = \frac{1}{EF}\iint\limits_{F(s)} (\overset{\bullet}{\varepsilon}_{13}\eta - \overset{\bullet}{\varepsilon}_{12}\zeta)\,dF = (\varepsilon_{13,\,\overset{\circ}{p-1}\,q} - \varepsilon_{12,\,\overset{\circ}{p}\,q-1})\,j_{pq}^2$$

$$\overset{\circ}{M}_{22} = \overset{\circ}{M}_n = \frac{1}{EF}\iint\limits_{F(s)} \overset{\circ}{\varepsilon}_{11}\zeta dF = \varepsilon_{11,\,\overset{\bullet}{p}\,q-1}\,j_{pq}^2$$

$$\overset{\circ}{M}_{33} = \overset{\circ}{M}_b = -\frac{1}{EF}\iint\limits_{F(s)} \overset{\circ}{\varepsilon}_{11}\eta dF = -\varepsilon_{11,\,\overset{\circ}{p-1}\,q}\,j_{pq}^2$$

$$j_{pq}^2 = I_{pq}/(L^2F) = 1/\lambda_{pq}^2,\quad I_{pq} = \iint\limits_{F(s)} \eta^p\zeta^q dF$$

$$j_{00}{}^2 = 1,\ j_{10}{}^2 = \eta_0,\ j_{01}{}^2 = \zeta_0\ \ (L = 1)$$

Здесь $N_{11}^\bullet$, $N_{12}^\circ = N_{21}^\circ$, $N_{13}^\circ = N_{31}^\circ$ — продольная и поперечные силы; M_{11}°, M_{22}°, M_{33}° — крутящий и изгибающие моменты; F, I_{pq}, η_0, ζ_0 — площадь, моменты инерции и координаты центра тяжести сечения в системе $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$; L, λ_{pq}, j_{pq} — длина, гибкости и параметры устойчивости стержня.

Если за осевую линию принята линия центров тяжести сечений, то $\eta_0 = \zeta_0 = 0$. Если, кроме того, главные оси сечения совпадают с осями $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$, то $j_{11} = 0$. В этом случае $j_{pq} = 0$, если по крайней мере одно из чисел — p или q нечетно.

Рассмотрим теперь уравнения движения стержня, основываясь на принципе Гамильтона — Остроградского, который в безразмерной форме может быть записан следующим образом:

$$S = \int\limits_{t_0}^{t_1}\left[\int\limits_L (T - U)\,ds\right]dt \tag{1.7}$$

$$T = \iint\limits_{F(s)} \dot{u}_i\dot{u}_i dF = (j_{pq}^2 \dot{u}_{i,\,kl}\dot{u}_{i,\,p-k\,q-l})\,F(s)\qquad \left(u^\cdot \equiv \frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

$$U = \frac{1}{2\nu}\iint\limits_{F(s)} \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}\varepsilon_{ij}dF = (j_{pq}^2\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij,\,kl}\varepsilon_{ij,\,p-k\,q-l})\,\frac{F(s)}{2\nu}$$

Здесь T, U — безразмерные значения кинетической и потенциальной энергий в сечении s; линейные величины отнесены к длине стержня L, скорости — к скорости звука c $(c^2 = 2\,\nu/\rho,\ t = cT_0/L;\ \rho$ — плотность материала; T_0 — физическое время).

Функции, минимизирующие функционал (1.7), должны удовлетворять уравнениям Эйлера — Остроградского, которые в данном случае и являются уравнениями движения стержня. Число уравнений равно сумме всех коэффициентов рядов перемещений. Общий вид этих уравнений следующий:

$$\partial(\partial T/\partial r)/\partial t = \partial(\partial U/\partial p)/\partial s - \partial U/\partial\varphi \tag{1.8}$$

$$r = \partial\varphi/\partial t,\ p = \partial\varphi/\partial s,\ \varphi \equiv u_{i,pq}$$

К уравнениям (1.8) должно быть присоединено определенное количество начальных и граничных условий.

При построении различных вариантов теории стержней возможно использование лишь конечных степенных разложений (1.4) ($p \leqslant p^*$, $q \leqslant q^*$). Погрешность, вносимая при этом в результаты определения искомых функций, очевидно, неограниченно убывает при p^*, $q^* \to \infty$.

Представленные ниже варианты уравнений построены на базе соответствующих степенных разложений, в которых удерживаются слагаемые, содержащие η и ζ в степенях не выше первой. Во втором и четвертом вариантах приняты, кроме того, определенные гипотезы относительно поперечных и сдвиговых напряжений и деформаций.

2. Конкретные варианты теории криволинейных стержней. *Вариант 1.* При построении этого варианта напряженно-деформированное состояние стержня считается трехосным. В разложениях (1.4) и (1.6) удерживаются лишь слагаемые, удовлетворяющие условию: $p + q \leqslant 1$. Компоненты тензора дисторсии и деформаций и выражения для кинетической и потенциальной энергий принимают вид

(2.1) $$(u_i, e_{ij}, \varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}^\circ) = (\ldots)_{,0} + (\ldots)_{,1}\eta + (\ldots)_{,2}\zeta$$

(2.2)
$$e_{11,k} = \partial u_k - kv_k, \quad e_{12,k} = \partial v_k + ku_k - \varkappa w_k$$
$$e_{13,k} = \partial w_k + \varkappa v_k \quad (k = 0, 1, 2)$$
$$e_{i1,0} = u_{i-1}, \quad e_{i2,0} = v_{i-1}, \quad e_{i3,0} = w_{i-1} \quad (i = 2, 3)$$
$$e_{ij,k} = 0 \quad (i = 2, 3;\ j = 1, 2, 3;\ k = 1, 2)$$
$$2\varepsilon_{ij,0} = e_{ij,0} + e_{ij,0} + e_{is,0}e_{js,0} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$
$$2\varepsilon_{1j,k} = 2\varepsilon_{j1,k} = e_{1j,k} + e_{j1,k} - (1 + \delta_i^j)\, a_{1j,k} + e_{1s,0}e_{js,k} +$$
$$+ e_{1s,k}e_{js,0} \quad (j = 1, 2, 3;\ k = 1, 2)$$
$$2\varepsilon_{ij,k} = 0 \quad (i, j = 2, 3;\ k = 1, 2)$$
$$a_{1j,1} = ke_{j1,0} - \varkappa e_{j3,0}, \quad a_{1j,2} = \varkappa e_{j2,0} \quad (j = 1, 2, 3)$$
$$T = F(s)\,(V_0^2 + 2\eta_0V_0V_1 + 2\zeta_0V_0V_2 + j_{20}^2V_1^2 + 2j_{11}^2V_1V_2 +$$
$$+ j_{02}^2V_2^2)$$
$$U = F(s)\,(E_0^2 + 2\eta_0E_0E_1 + 2\zeta_0E_0E_2 + j_{20}^2E_1^2 + 2j_{11}^2E_1E_2 + j_{02}^2E_2^2)$$
$$V_pV_q = u_{i,p}^{\cdot}u_{i,q}^{\cdot}, \quad E_pE_q = \varepsilon_{ij,p}\varepsilon_{ij,q} + \delta_i^jB\theta_{,p}\theta_{,q} \quad (p, q = 0, 1, 2)$$

Многоточия в (2.1) означают соответствующую компоненту из скобок левой части выражения.

Разыскивая производные от T и U по соответствующим переменным, придем, согласно (1.8), к следующей системе уравнений:

(2.3)
$$f(u) = F_{11} - kf(\varepsilon_{12}) + b_{11}$$
$$f(v) = F_{12} + kf(\varepsilon_{11}) - \varkappa f(\varepsilon_{13}) + b_{12}$$
$$f(w) = F_{13} + \varkappa f(\varepsilon_{12}) + b_{13}$$
$$\varphi(u) = \Phi_{11} - k\varphi(\varepsilon_{12}) - \varepsilon_{21,0}^* - b_{21}$$
$$\varphi(v) = \Phi_{12} + k\varphi(\varepsilon_{11}) - \varkappa\varphi(\varepsilon_{13}) - \varepsilon_{22,0}^* - b_{22}$$
$$\varphi(w) = \Phi_{13} + \varkappa\varphi(\varepsilon_{12}) - \varepsilon_{23,0}^* - b_{23}$$
$$\psi(u) - \Psi_{11} - k\psi(\varepsilon_{12}) - \varepsilon_{31,0}^* - b_{31}$$
$$\psi(v) = \Psi_{12} + k\psi(\varepsilon_{11}) - \varkappa\psi(\varepsilon_{13}) - \varepsilon_{32,0}^* - b_{32}$$
$$\psi(w) = \Psi_{13} + \varkappa\psi(\varepsilon_{12}) - \varepsilon_{33,0}^* - b_{33}$$
$$A_{ij} = F^{-1}\partial\,[Fa(\varepsilon_{ij})]; \quad A_{ij} \equiv F_{ij},\ \Phi_{ij},\ \Psi_{ij}; \quad a \equiv f, \varphi, \psi$$
$$a(u_j) \equiv a(u_j^{\cdot\cdot}), \quad a(\varepsilon_{ij}) \equiv a(\varepsilon_{ij}^*)$$
$$f(x) = x_0 + \eta_0x_1 + \zeta_0x_2, \quad \varphi(x) = \eta_0x_0 + j_{20}^2x_1 + j_{11}^2x_2$$
$$\psi(x) = \zeta_0x_0 + j_{11}^2x_1 + j_{02}^2x_2, \quad x_k \equiv (u^{\cdot\cdot}, v^{\cdot\cdot}, w^{\cdot\cdot}, \varepsilon_{ij}^*)_{,k}$$
$$u_j^{\cdot\cdot} \equiv \partial^2u_j / \partial t^2 \quad (i = 1;\ j = 1, 2, 3;\ k = 0, 1, 2)$$
$$b_{11} = B_1 - kA_2(\varepsilon_{11}), \quad b_{12} = B_2 + kA_1(\varepsilon_{11}) - \varkappa A_3(\varepsilon_{11})$$

$$b_{13} = B_3 + \varkappa A_2(\varepsilon_{11}) \quad (B_i = F^{-1}\partial\,[FA_i(\varepsilon_{11})])$$

$$b_{jk} = A_k(\varepsilon_{ij}) + b(\varepsilon_{ij})(\delta_i{}^j + e_{ik,0}) \quad (i = 1;\ j = 2, 3;\ k = 1, 2, 3)$$

$$A_1(\varepsilon_{ij}) = \mathring{\varepsilon}_{ij,0}\,[\eta_0(e_{11,1} - k) + \zeta_0 e_{11,2}] + j_{20}{}^2\mathring{\varepsilon}_{ij,1}(e_{11,1} - k) +$$
$$+ j_{11}{}^2\,[\mathring{\varepsilon}_{ij,1}\,e_{11,2} + \mathring{\varepsilon}_{ij,2}(e_{11,1} - k)] + j_{02}{}^2\mathring{\varepsilon}_{ij,2}\,e_{11,2}$$

$$A_2(\varepsilon_{ij}) = \mathring{\varepsilon}_{ij,0}\,[\eta_0 e_{12,1} + \zeta_0(e_{12,2} - \varkappa)] + j_{20}{}^2\mathring{\varepsilon}_{ij,1}e_{12,1} +$$
$$+ j_{11}{}^2\,[\mathring{\varepsilon}_{ij,1}(e_{12,2} - \varkappa) + \mathring{\varepsilon}_{ij,2}e_{12,1}] + j_{02}{}^2\mathring{\varepsilon}_{ij,2}(e_{12,2} - \varkappa)$$

$$A_3(\varepsilon_{ij}) = \mathring{\varepsilon}_{ij,0}\,[\eta_0(e_{13,1} + \varkappa) + \zeta_0 e_{13,2}] + j_{20}{}^2\mathring{\varepsilon}_{ij,1}(e_{13,1} + \varkappa) +$$
$$+ j_{11}{}^2\,[\mathring{\varepsilon}_{ij,1}e_{13,2} + \mathring{\varepsilon}_{ij,2}(e_{13,1} + \varkappa)] + j_{02}{}^2\mathring{\varepsilon}_{ij,2}e_{13,2}$$

$$b(\varepsilon_{ij}) = \eta_0\mathring{\varepsilon}_{ij,1} + \zeta_0\mathring{\varepsilon}_{ij,2}, \quad \varepsilon^*_{ij,k} = \mathring{\varepsilon}_{is,k}(\delta_j{}^s + \mathring{e}_{sj,0})] +$$
$$+ (1 - \delta_k{}^\circ)\,\mathring{\varepsilon}_{is,0}\,e_{sj,k}$$

$$N_{1k}{}^\circ = N_{k1}{}^\circ = \mathring{\varepsilon}_{1k,0} + \mathring{\varepsilon}_{1k,1}\eta_0 + \mathring{\varepsilon}_{1k,2}\,\zeta_0$$

$$M_{11}{}^\circ = (\mathring{\varepsilon}_{13,0}\eta_0 - \mathring{\varepsilon}_{12,0}\zeta_0) + (\mathring{\varepsilon}_{13,1}j_{20}{}^2 - \mathring{\varepsilon}_{12,1}j_{11}{}^2) + (\mathring{\varepsilon}_{13,2}j_{11}{}^2 -$$
$$- \mathring{\varepsilon}_{12,2}j_{02}{}^2)$$

$$M_{22}{}^0 = \mathring{\varepsilon}_{11,0}\zeta_0 + \mathring{\varepsilon}_{11,1}j_{11}{}^2 + \mathring{\varepsilon}_{11,2}j_{02}{}^2, \quad M_{33}{}^\circ = -\mathring{\varepsilon}_{11,0}\eta_0 - \mathring{\varepsilon}_{11,1}j_{20}{}^2 -$$
$$- \mathring{\varepsilon}_{11,2}j_{11}{}^2$$

Полученные соотношения и уравнения движения существенно упрощаются, если главные оси сечений ориентированы по **n** и **b** ($j_{11} = 0$), а за осевую линию стержня принята линия центров тяжести сечений] ($\eta_0 \equiv \zeta_0 \equiv 0$). Соответствующая линеаризованная система уравнений при $k \equiv \varkappa \equiv 0$ с точностью до обозначений тождественна уравнениям работы [7].

В рассматриваемом варианте составляющие вектора перемещений имеют вполне определенный физический смысл: u_0, v_0, w_0 — линейные перемещения по направлениям **t**, **n**, **b**; u_1, u_2 — угловые перемещения около осей **d** и **n** соответственно; $\varphi = (w_1 - v_2)/2$ — поворот сечения вокруг оси **t**; параметр $\xi = (w_2 + v_1)/2$ характеризует изменение площади поперечного сечения, а коэффициенты $\eta_1 = (w_2 - v_1)/2$ и $\eta_2 = (w_1 + v_2)/2$ — изменение конфигурации сечения. Удерживание в разложениях (2.1) последующих слагаемых позволяет построить вариант теории стержней, в котором учитывается и депланация сечений.

Вариант 2. Здесь рассматриваются две разновидности теории стержней. Первая базируется на гипотезе отсутствия напряжений $\varepsilon_{22}{}^\circ$, $\varepsilon_{33}{}^\circ$ и $\varepsilon_{23}{}^\circ = \varepsilon_{32}{}^\circ$. Вторая — на предположении отсутствия деформаций ε_{22}, ε_{33} и $\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32}$.

Из $\varepsilon_{23}{}^\circ = \varepsilon_{32}{}^\circ = 0$ следует $w_1 = -v_2$. Полагая $\varepsilon_{22}{}^\circ = \varepsilon_{33}{}^\circ = 0$, получим $\varepsilon_{11}{}^\circ = \varepsilon_{11}$, $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\mu\varepsilon_{11}$. Отсюда $w_2 = v_1 = -\mu(\partial u_0 - kv_0)$. Здесь и ниже, ввиду малых поперечных размеров рассматриваемых стержней, в выражениях для $\varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32}$ удерживаются лишь слагаемые, линейные относительно e_{ij}.

Для компонент вектора перемещений имеем

(2.4) $$u = u_0 + u_1\eta + u_2\zeta, \quad v = v_0 - \psi\eta - \varphi\zeta, \quad w = w_0 + \varphi\eta - \psi\zeta$$
$$\varphi = (w_1 - v_2)/2, \quad \psi = \mu(\partial u_0 - kv_0)$$

Изменение формы сечения здесь не учитывается ($\eta_1 = \eta_2 = 0$).

Полагая $\varepsilon_{22} = 0$, $\varepsilon_{33} = 0$, $\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = 0$, получим соответственно $v_1 = 0$, $w_2 = 0$, $w_1 = -v_2$. Тогда

(2.5) $$u = u_0 + u_1\eta + u_2\zeta, \quad v = v_0 - \varphi\zeta, \quad w = w_0 + \varphi\eta$$

Здесь не учитывается изменение как формы, так и площади поперечного сечения ($\eta_1 = \eta_2 = 0$, $\xi = 0$). Основные соотношения упругости и уравнения движения получаются из (2.4) или (2.5) аналогично предыдущему.

Вариант 3. Этот вариант теории базируется на следующих разложениях:

(2.6) $$u = u_0 + u_1\eta + u_2\zeta, \quad v = v_0, \quad w = w_0$$

Уравнения движения и соотношения упругости могут быть получены здесь как из найденных выше (при $v_1 = v_2 = 0$, $w_1 = w_2 = 0$), так и непосредственно, аналогичпо вариантам 2 и 3. В частности, для случая $\eta_0 = \zeta_0 = 0$, $j_{11} = 0$, $F = \text{const}$ имеем

$$
\begin{aligned}
(2.7)\quad & u_0'' = \partial\varepsilon_{11,0}^* - k\varepsilon_{12,0}^*, \quad v_0'' = \partial\varepsilon_{12,0}^* + k\varepsilon_{11,0}^* - \varkappa\varepsilon_{13,0}^* \\
& w_0'' = \partial\varepsilon_{13,0}^* + \varkappa\varepsilon_{12,0}^*, \quad u_1'' = \partial\varepsilon_{11,1}^* - k\varepsilon_{12,1}^* - \lambda_{20}^2\varepsilon_{21,0}^* \\
& u_2'' = \partial\varepsilon_{11,2}^* - k\varepsilon_{12,2}^* - \lambda_{02}^2\varepsilon_{31,0}^* \\
& \varepsilon_{11,k}^* = \varepsilon_{11,k}^\circ(1 + e_{11,0}) + \varepsilon_{12,k}^\circ e_{21,0} + \varepsilon_{13,k}^\circ e_{31,0} + (1 - \delta_k^\circ)\varepsilon_{11,0}^\circ e_{11,k} \\
& (k = 0, 1, 2) \\
& \varepsilon_{i1,0}^* = \varepsilon_{i1,0}^\circ(1 + e_{11,0}), \quad \varepsilon_{i1,0}^\circ = \varepsilon_{1i,0}^\circ = 2k_{1i}\varepsilon_{i1,0} \quad (i = 2,3) \\
& \varepsilon_{1j,k}^* = \varepsilon_{1j,k}^\circ + \varepsilon_{11,k}^\circ e_{1j,0} + (1 - \delta_k^\circ)\varepsilon_{11,0}^\circ e_{1j,k} \quad (j = 2,3;\ k = 0, 1, 2)
\end{aligned}
$$

Здесь опущены слагаемые b_{jk} и принято $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = 0$, $\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = 0$; k_{1i} — корректировочные множители, учитывающие характер распределения касательных напряжений $\varepsilon_{1i,0}^\circ = \varepsilon_{i1,0}^\circ$ по сечению стержня. Поворот сечений вокруг оси $\mathbf{t}$, а также изменение формы и площади сечений здесь не учитывается ($\varphi = 0$, $\eta_1 = \eta_2 = 0$, $\xi = 0$).

Вариант 4. Полагая в (2.6) и (2.7) $u_1 \approx -(\partial v_0 + ku_0 - \varkappa w_0)$, $u_2 \approx -(\partial w_0 + \varkappa v_0)$, $u_1'' \approx 0$, $u_2'' \approx 0$, приходим к «классическому» варианту теории стержней. Физический смысл написанных соотношений состоит в том, что в данном варианте исключены из рассмотрения деформации поперечных сдвигов и инерции вращений. Система дифференциальных уравнений здесь, в отличие от предшествующих гиперболических, является системой смешанного типа. В частности, в линейном приближении уравнения движения примут вид

$$
\begin{aligned}
(2.8)\quad & u_0'' = \partial e_{11,0} - kj_{20}^2\partial(e_{11,1} - ke_{11,0} + \varkappa e_{13,0}) \\
& v_0'' = j_{20}^2\partial^2(e_{11,1} - ke_{11,0} + \varkappa e_{13,0}) + ke_{11,0} - \varkappa j_{02}^2\partial(e_{11,2} - \varkappa e_{12,0}) \\
& (\partial^2 \equiv \partial^2 / \partial s^2) \\
& w_0'' = j_{02}^2\partial^2(e_{11,2} - \varkappa e_{12,0}) + \varkappa j_{20}^2\partial(e_{11,1} - ke_{11,0} + \varkappa e_{13,0}) \\
& e_{11,0} = \partial u_0 - kv_0, \quad e_{12,0} = \partial v_0 + ku_0 - \varkappa w_0 \\
& e_{13,0} = \partial w_0 + \varkappa v_0, \quad e_{11,1} = -\partial e_{12,0}, \quad e_{11,2} = -\partial e_{13,0}
\end{aligned}
$$

Здесь первое уравнение гиперболического типа, второе и третье — параболического.

Замечание. В отдельных задачах оказывается возможным не учитывать продольные перемещения ($u_0 \equiv 0$) или считать осевую линию стержня нерастяжимой ($\partial u_0 - kv_0 \equiv 0$).

3. Разложение вектора перемещенний в неподвижной системе координат. В некоторых задачах динамики может оказаться более удобным рассмотрение движения стержня не в компонентах системы (ξ_i), а в составляющих неподвижной системы прямоугольных координат (x_i, $i = 1, 2, 3$). Для этих составляющих введем обозначение $v_{j,n}$ ($j = 1, 2, 3$; $n = 0, 1, 2, \ldots$).

Если осевая линия стержня задана уравнением $x_i = x_i(s)$, то

$$
\mathbf{t} = (\partial x_i)\mathbf{e}_i, \quad \mathbf{n} = (\partial^2 x_i)\mathbf{e}_i / k, \quad k = (\partial^2 x_i \partial^2 x_i)^{1/2}
$$
$$
\mathbf{b} = \{\partial[(\partial^2 x_i)/k] + k\partial x_i\}\mathbf{e}_i / \varkappa, \quad \varkappa = \Delta / k^2
$$

Здесь $\mathbf{e}_i$ — орты осей прямоугольной системы; столбцы определителя Δ состоят из векторов $\mathrm{col}\,\{\partial x_i, \partial^2 x_i, \partial^3 x_i\}$.

Выражения компонент вектора перемещений $v_{j,n}$ через составляющие $u_{j,n}$ записываются в виде матричного произведения $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$. В частности, для варианта 1 эти матрицы имеют следующие структуры:

$$
\begin{aligned}
& \mathbf{A} = \|a_{ij}\|, \quad \mathbf{B} = \|b_{ij}\|, \quad \mathbf{C} = \|c_{ij}\| \\
& a_{i1} = \partial x_i, \quad a_{i2} = (\partial^2 x_i)/k, \quad a_{i3} = \{\partial[(\partial^2 x_i)/k] + k\partial x_i\}/\varkappa \\
& b_{i1} = u_{i,0}, \quad b_{i2} = u_{j,1} \quad (j = 4 - i,\ i = 1, 2, 3), \quad b_{33} = u_{3,2} \\
& b_{i3} = u_{k,2} \quad (k = 3 - i,\ i = 1, 2), \quad c_{ij} = v_{j-1,i}
\end{aligned}
$$

В заключение отметим, что полученные уравнения содержат в себе как частные случаи уравнения динамики плоскокриволинейных стержней ($\varkappa = 0$) и стержней прямолинейных — закрученных ($k = 0$, $\varkappa \neq 0$) и без предварительной крутки ($k = \varkappa = 0$; см., например, [8]).

Поступила 13 X 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лурье А. И.* О малых деформациях криволинейных стержней. Тр. Ленингр. политехн. ин-та. Сер. физ.-матем. наук, 1941, № 3.
2. *Джанелидзе Г. Ю.* Теория тонких криволинейных стержней, обладающих в поперечном сечении недеформируемым контуром. ПММ, 1944, т. 8, вып. 1.
3. *Голубев О. Б.* Обобщение теории тонких стержней. Тр. Ленингр. политехн. ин-та. Динамика и прочность машин, 1963, № 226.
4. *Washizu K.* Some consideration on a naturally curved and twisted slender beam. J. Math. and Phys., 1964, vol. 43, No. 2.
5. *Аронсон А. Я.* Об одном варианте построения обобщенной теории стержней. В сб.: Динамика и прочность упругих и гидроупругих систем. М., «Наука», 1975.
6. *Погорелов А. В.* Дифференциальная геометрия. М., «Наука», 1974.
7. *Рапопорт И. М.* О колебаниях упругих стержней. Докл. АН СССР, 1963, т. 153, № 4.
8. *Гордиенко Б. А.* Выпучивание стержней при ударном нагружении. Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 1.

УДК 539.3 : 534.1

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ МЕМБРАНЫ

В. Г. Вильке

(Москва)

Методом Ляпунова в функциональном пространстве исследуются вертикальные колебания мембраны при нелинейном законе упругости и конечных деформациях.

1. Постановка задачи. Предположим, что в недеформированном состоянии мембрана занимает область Ω на плоскости Ox_1x_2 и имеет естественное состояние, деформация мембраны состоит из равномерного растяжения по осям Ox_1, Ox_2 и отклонения u по оси Ox_3, а ее граница Γ остается на плоскости Ox_1x_2, т. е.

$$x_1 = (1+e)a_1, \quad x_2 = (1+e)a_2, \quad x_3 = u(a_1, a_2, t) \quad (e > 0) \tag{1.1}$$
$$u(a_1, a_2, t)\,|_\Gamma = 0, \quad \Gamma = \partial\Omega$$

Потенциальную энергию деформаций считаем зависящей только от главных удлинений тензора дилатаций.

Согласно первому предположению, кинетическая энергия мембраны определяется выражением

$$T = \frac{1}{2}\rho\int\limits_\Omega u^{\cdot 2} da \quad \left(u^\cdot = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad da = da_1 da_2\right)$$

Здесь ρ — поверхностная плотность мембраны, которую полагаем постоянной.

Из (1.1) следует, что главные удлинения тензора дилатаций имеют вид

$$\lambda_1 = 1 + e, \quad \lambda_2 = [(1+e)^2 + u_1^2 + u_2^2]^{1/2} \quad (u_1 = \partial u / \partial a_1, \; u_2 = \partial u / \partial a_2)$$

Согласно последнему предположению, потенциальная энергия деформаций представляется в виде функционала

$$\mathrm{E}[u] = \int\limits_\Omega F(\xi)\, da, \quad \xi = \lambda_2 \tag{1.2}$$