Теорема 3. Пусть u, w — решение класса $C^2(\bar{G})$ краевой задачи (1). Тогда всюду в G

$$\min\left\{\inf_{y>0}\frac{W}{U}\,;\ \min\frac{p_z}{p_x}\right\}\leqslant\frac{w}{u}\leqslant\max\left\{\sup_{y>0}\frac{W}{U}\,;\ \max\frac{p_z}{p_x}\right\}$$

Доказательство. Положим $\alpha = \max\{\sup\limits_{y>0} W/U;\ \max p_z/p_x\}+\varepsilon$, где $\varepsilon>0$. Тогда для функции $\varphi=\alpha u-w$ имеем $L(\varphi)=\alpha p_x/\rho-p_z/\rho<0$, т. е. φ удовлетворяет условиям леммы; с другой стороны, всюду, где φ может достигать минимума, $\varphi\geqslant0$. Значит, $\varphi\geqslant0$ во всей области G, и правое неравенство доказано, если ε устремить к нулю. Аналогично с помощью функции

$$\varphi = w-(\min\{\inf_{y>0} W/U;\ \min p_z/p_x\}-\varepsilon)\,u$$

доказывается левое неравенство.

Отметим, что теоремы 1—3 справедливы и в случае, когда $Y=\infty$, если только $u\to U$ и $w\to W$ при $y\to\infty$ равномерно по x, z и t.

Поступила 17 IV 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1974.
2. *Raetz G. S.*, *Der J.* Solution of general three-dimensional laminar boundary-layers problems by an exact numerical method. Inst. Aeronaut. Sci. Paper, 1962.
3. *Wang K. C.* On the determination of the zones of influence and dependence for three-dimensional boundary-layer equations. J. Fluid Mech., 1971, vol. 48, pt. 2, p. 397—404.
4. *Wang K. C.* Aspects of «multitime initial — value problem» originating from boundary layer equations. Phys. Fluids, 1975, vol. 18, No. 8, p. 951—955.
5. *Шевелев Ю. Д.* Трехмерные задачи теории ламинарного пограничного слоя. М., «Наука», 1977.

УДК 539.3

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ С ЗЕРКАЛЬНО-ЦИКЛИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЕЙ

В. Н. Михайлов

(Москва)

Исследуется первая краевая задача теории упругости для областей и нагружений, имеющих не только циклическую [1,2], но и зеркальную симметрию. Интегральное уравнение Шермана—Лауричелла видоизменяется с учетом симметрии.

1. Пусть на плоскости, где введена прямоугольная система координат $x\,y$, задана область D, в общем случае многосвязная. Будем рассматривать области, обладающие зеркальной симметрией относительно лучей $\varphi=\pi r/n$ ($r=0,1,\ldots,2n-1$) полярной системы координат $R\varphi$. Очевидно, эти области будут обладать также симметрией поворота относительно центра координат на углы $\alpha_k=2\pi k/n$ ($k=1,2,\ldots,n-1$).

Область D ограничена несколькими замкнутыми контурами: L_0, $L_1,\ldots,L_m$, причем контур L_0 содержит внутри себя все остальные. Сумму всех границ обозначим через L. На этих контурах приложены известные внешние усилия, имеющие ту же симметрию, что и область D. Считаем, что главные векторы внешних усилий, приложенных к контурам L_k ($k=0,1,\ldots,m$), равны нулю.

Как известно [3,4], эта задача сводится к отысканию двух однозначных в D функций $\varphi(z)$, $\psi(z)$ комплексного переменного z, удовлетворяющих на границах условиям

$$\varphi(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}=f(t)+C_j \text{ на } L_j \tag{1.1}$$

где $f(t)$ — функция, определяющаяся внешними усилиями; C_0, C_1, ..., C_m — неизвестные комплексные постоянные, одну из которых можно зафиксировать, положив $C_0=0$.

Из условий зеркальной симметрии относительно оси x следует

$$\varphi(z)=\overline{\varphi(\bar z)},\quad \psi(z)=\overline{\psi(\bar z)} \tag{1.2}$$

Симметрия поворота на угол $\alpha_k=2\pi k/n$ выполняется, когда [2]

$$\varphi(z)=\exp(i\alpha_k)\,\varphi(z\exp(-i\alpha_k)),\quad \psi(z)=\exp(-i\alpha_k)\,\psi(z\exp(-i\alpha_k)) \tag{1.3}$$

Следуя Д. И. Шерману, будем искать функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$ в следующем виде:

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\omega(t)\,dt}{t-z} \tag{1.4}$$

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\left\{\frac{\overline{\omega(t)}\,dt+\omega(t)\,d\bar t}{t-z}-\frac{\bar t\omega(t)\,dt}{(t-z)^2}\right\}+\sum_{j=1}^{m}\frac{b_j}{z-z_j} \tag{1.5}$$

$$b_j=i\int_{L_j}\{\omega(t)\,d\bar t-\overline{\omega(t)}\,dt\},\quad j=1,\ldots,m \tag{1.6}$$

Здесь $\omega(t)$ — функция точек контуров, подлежащая определению; z_j — точки внутри областей, ограниченных контурами L_j ($j=1,\ldots,m$), выберем их так, чтобы для симметричных контуров эти точки обладали той же симметрией; b_j — действительные постоянные, определяемые по указанным формулам. Интегрирование по контуру L_0 совершается против часовой стрелки, по остальным контурам — по часовой стрелке.

Обычно [1–4] в представлении (1.4) для $\varphi(z)$ берут еще одно слагаемое, идентичное последнему члену в (1.5). Это слагаемое не имеет существенного значения (см. [5]) и решение можно искать в виде (1.4). Однако для задач с симметрией существенно представление $\varphi(z)$ именно в форме (1.4), так как функция $\omega(t)$ обладает в этом случае теми же простыми свойствами симметрии, что и функция $\varphi(z)$: вывод интегрального уравнения для симметричных задач уже не вызывает особых трудностей в отличие от работ [1,2], где использовалось другое представление $\varphi(z)$.

Условия симметрии (1.2) и (1.3) будут соблюдены, если выполняются равенства

$$\omega(t)=\overline{\omega(\bar t)},\quad \omega(t)=\exp(i\alpha_k)\,\omega(t\exp(-i\alpha_k)) \tag{1.7}$$

2. Обозначим через Γ_{p0}, $p=0,1,\ldots,M$ части контуров L_0, L_1, ..., L_m, лежащие внутри угла $0\leqslant\varphi\leqslant\pi/n$, причем Γ_{00} — часть внешнего контура. Пусть Γ_{p0}^* — зеркальное отображение Γ_{p0} относительно оси x; Γ_{pk} или Γ_{pk}^* — контур, получающийся после поворота Γ_{p0} или Γ_{p0}^* на угол α_k. Очевидно, граница области D является суммой контуров $\Gamma_{pk}+\Gamma_{pk}^*$ при изменении k от 0 до $n-1$.

Используя эти обозначения, а также (1.6), запишем уравнение (1.1) после подстановки в него (1.4), (1.5) в виде

$$\begin{gathered}\omega(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{p=0}^{M}\int_{\Gamma_{pk}+\Gamma_{pk}^*}\left\{\omega(t)\,d\ln\frac{t-t_0}{\bar t-\bar t_0}-\overline{\omega(t)}\,d\,\frac{t-t_0}{\bar t-\bar t_0}\right\}+\\+i\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{p=0}^{M}\left\{\int_{\Gamma_{pk}}\frac{\omega(t)\,d\bar t-\overline{\omega(t)}\,dt}{\bar t_0-\bar z_{pk}}+\int_{\Gamma_{pk}^*}\frac{\omega(t)\,d\bar t-\overline{\omega(t)}\,dt}{\bar t_0-\bar z_{pk}}\right\}-\\-C_l=f(t_0),\quad t_0\in\Gamma_{l0}\end{gathered} \tag{2.1}$$

Здесь z_{pk} — точка z_j в (1.5), соответствующая контуру Γ_{pk}; по построению $z_{pk}=z_{p0}\exp(i\alpha_k)$.

В интегралах по контурам Γ_{pk}, Γ_{pk}^* ($k = 1, \ldots, n-1$) совершим замену переменной интегрирования $\tau = t \exp(-i\alpha_k)$. Согласно второму равенству (1.7), для $t \in \Gamma_{pk}$, $t \in \Gamma_{pk}^*$ имеем $\omega(t) = \omega(\tau) \exp(i\alpha_k)$. При этом преобразовании контур Γ_{pk} переходит в Γ_{p0} и Γ_{pk}^* — в Γ_{p0}^*. Теперь совершим замену переменной τ в интегралах по Γ_{p0}^*, $\tau = \bar{t}$, $\omega(\tau) = \overline{\omega(\bar{\tau})} = \overline{\omega(t)}$. В результате L_{p0}^* переходит в L_{p0}, но с противоположным направлением обхода. Учитывая это, получаем

$$\omega(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{M} \int_{\Gamma_{p0}} \{\omega(t) \exp(i\alpha_k)\, d \ln \xi_k(t) -$$
$$- \overline{\omega(t)} \exp(i\alpha_k)\, d \ln \xi_k(\bar{t}) - \overline{\omega(t)} \exp(-i\alpha_k)\, d\xi_k(t) +$$
$$+ \omega(t) \exp(-i\alpha_k)\, d\xi_k(\bar{t})\} + i \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=1}^{M} \int_{\Gamma_{p0}} \left\{ \frac{\omega(t)\, d\bar{t} - \overline{\omega(t)}\, dt}{\bar{t}_0 - \bar{z}_{p0} \exp(-i\alpha_k)} + \right.$$
$$\left. + \frac{\omega(t)\, d\bar{t} - \overline{\omega(t)}\, dt}{\bar{t}_0 - z_{p0} \exp(i\alpha_k)} \right\} - C_l = if(t_0) \tag{2.2}$$

$$\xi_k(t) = \frac{t \exp(i\alpha_k) - t_0}{\bar{t} \exp(-i\alpha_k) - \bar{t}_0} \tag{2.3}$$

Определим C_l. Если Γ_{l0} — замкнутый контур, то по Д. И. Шерману

$$C_l = -\int_{\Gamma_{l_0}} \omega(t)\, ds$$

Рассмотрим случаи, когда Γ_{l0} — незамкнутый контур.

Пусть Γ_{l0} и Γ_{l0}^* образуют замкнутый контур, пересекающий ось x. Тогда, используя условие зеркальной симметрии, выраженное первым равенством (1.7), находим

$$C_l = -\int_{\Gamma_{l_0}} [\omega(t) + \overline{\omega(t)}]\, ds$$

Пусть контур Γ_{l0} примыкает к лучу $\varphi = \pi / n$. Из условия зеркальной симметрии относительно этого луча имеем

$$\omega(t) = \omega(\bar{t} \exp(2i\pi / n)) \exp(2i\pi / n),$$

что позволяет записать C_l в виде

$$C_l = -\int_{\Gamma_{l_0}} \left[\omega(t) + \overline{\omega(t)} \exp\left(2i\frac{\pi}{n}\right)\right] ds$$

Наконец, рассмотрим случай, когда Γ_{l0} — часть замкнутого контура, охватывающего начало координат. Используя симметрию поворота на угол α_k, получаем

$$C_l = -\sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \int_{\Gamma_{l_0}} \omega(t) \exp(i\alpha_k)\, ds + \int_{\Gamma_{l_0}^*} \omega(t) \exp(i\alpha_k)\, ds \right\}$$

Но при $n \geqslant 2$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(ik\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{1 - \exp(2\pi i)}{1 - \exp(2\pi i / n)} = 0$$

Следовательно, если имеется симметрия поворота на угол, меньший 2π, то $C_l = 0$ для рассматриваемого контура.

Обозначим через Γ сумму всех контуров Γ_{p0}. Введем на Γ кусочно-постоянную функцию $p(t)$: $p(t) = p$, если $t \in \Gamma_{p0}$, т. е. $p(t)$ принимает значение номера контура, которому принадлежит точка t. Уравнение (2.2) можно записать теперь в следующем виде:

$$\omega(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \sum_{k=0}^{n-1}\Big\{\exp(i\alpha_k)[\omega(t)\,d\ln\xi_k(t)-\overline{\omega(t)}\,d\ln\xi_k(\bar t)]- \tag{2.4}$$
$$-\exp(-i\alpha_k)[\overline{\omega(t)}\,d\xi_k(t)-\omega(t)\,d\xi_k(\bar t)]-$$
$$-2\pi[\omega(t)\,d\bar t-\overline{\omega(t)}\,dt]\left[\frac{1}{\bar t_0-\bar z_p\exp(-i\alpha_k)}+\frac{1}{\bar t_0-z_p\exp(i\alpha_k)}\right]\Big\}-$$
$$-C_l=f(t_0),\quad t_0\in\Gamma_{l_0},\quad l=p(t_0),\quad p=p(t),\quad z_p=z_{p0}$$

где $\xi_k(t)$ определяется формулой (2.3).

Таким образом, функция $\omega(t)$ должна удовлетворять уравнению (2.4), заданному на части Γ границы L области D. Разрешимость уравнения (2.4) следует из разрешимости уравнения Шермана — Лауричелла. Правда, для единственности решения последнего уравнения Д. И. Шерманом введен в него еще один член [4] с неизвестным мнимым множителем b_{m+1}. Однако при существовании зеркальной симметрии этот член обращается в нуль, благодаря первому равенству (1.7).

Следует заметить, что для областей, обладающих только циклической симметрией, дополнительный член должен быть введен в уравнение (2.4), как это и делалось в [1, 2]. Но и при этом функция будет удовлетворять второму равенству (1.7).

Поступила 21 XII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Буйвол В. М.* Бігармонічна задача для багатозв'язних систем з циклічною симетрією. Прикл. механіка, 1959, т. 5, вип. 3.
2. *Вигдергауз С. Б.* О плоской задаче теории упругости для многосвязных областей с циклической симметрией. ПММ, 1974, т. 38, вып. 5.
3. *Шерман Д. И.* К решению плоской статической задачи теории упругости при заданных внешних силах. Докл. АН СССР, 1940, т. 28, № 1.
4. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
5. *Партон В. З.*, *Перлин П. И.* Интегральные уравнения теории упругости. М., «Наука», 1977.

УДК 624.071.3 : 534.1

ТЕОРИЯ ПРОСТРАНСТВЕННО-КРИВОЛИНЕЙНЫХ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ

Б. А. Гордиенко

(Куйбышев)

Развита геометрически нелинейная теория пространственно-криволинейных стержней с учетом инерции вращения, деформации поперечного сдвига, изменения формы и размеров сечений и дополнительных усилий, связанных с поворотом сечений стержня при его деформировании. Получены варианты гиперболических уравнений. Построены параболические приближения.

Основные соотношения и уравнения движения линейной теории кривых стержней рассматривались, например, в работах [1-5]. Уточнение результатов линейной теории велось в основном в направлении учета изменяемости контура и депланации сечений [3-5].

1. Постановка задачи. Рассматривается естественно закрученный стержень переменного сечения $F(s)$, выполненный из упругого изотропного материала с постоянными