Из принципа Шаудера вытекает, что при выполнении условий (4) уравнение $u = T(u)$, эквивалентное исходной гидродинамической задаче, имеет хотя бы одно решение $u(\xi) \in H$.

Привлекая методы [1,3], можно распространить доказанную теорему существования на случай канала с криволинейным неограниченно понижающимся дном.

Поступила 20 IV 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gerber R.* Sur les solutions exactes des équations du mouvement avec surface libre d'un liquide pesant. J. Math. Pures Appl., 1955, vol. 34, No. 3. (Рус. перев.: М., Изд-во иностр. лит., 1959.)
2. *Красовский Ю. П.* О существовании апериодических течений со свободной границей. Докл. АН СССР, 1960, т. 133, № 4.
3. *Киселев О. М.* О течении тяжелой жидкости в канале с криволинейным дном. ПММ, 1976, т. 40, вып. 4.
4. *Carter D. S.* Existence of a class of steady plane gravity flows. Pasif. J. Math., 1961, vol. 11, No. 3.
5. *Гуревич И. Л.* Истечение тяжелой жидкости из сосуда с криволинейными стенками. Тр. семинара по краевым задачам, вып. 14. Изд-во Казанск. ун-та, 1977.
6. *Keady G., Norbury J.* The jet from a horizontal slot under gravity. Proc. Roy. Soc. London A, 1975, vol. 344, No. 1639.

УДК 532.526

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ УРАВНЕНИЙ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

О. В. Титов

(Москва)

Рассматривается система уравнений пространственного пограничного слоя (см. например, [1]) с условиями прилипания или отсоса на поверхности тела. Показано, что при отрицательных продольной и поперечной компонентах градиента давления и соответствующих граничных условиях продольная и поперечная составляющие вектора скорости положительны не только вблизи тела, но и по всей толщине пограничного слоя. Это дает возможность оценить сверху указанные составляющие скорости в зависимости от граничных условий и установить, как ведут себя проекции линий тока на поверхность тела. Последнее представляет интерес в связи с областями влияния и областями зависимости в трехмерном пограничном слое [2–5].

Пусть $G \subset R^4(x, y, z, t)$ — область, определяемая условиями $0 < x < X$, $0 < y < Y$, $0 < z < Z$, $0 < t < T$. Рассмотрим в G систему уравнений с граничными условиями

$$
\begin{aligned}
(1) \qquad & \nu u_{yy} - uu_x - vu_y - wu_z - u_t = p_x/\rho \\
& \nu w_{yy} - uw_x - vw_y - ww_z - w_t = p_z/\rho \\
& u_x + v_y + w_z = 0 \\
& u = w = 0, \quad v = V(x, z, t) \leqslant 0, \quad y = 0 \\
& u = U, \; w = W \text{ на } \partial G \cap [\{x = 0\} \cup \{z = 0\} \cup \{t = 0\} \cup \{y = Y\}]
\end{aligned}
$$

причем $U > 0$, $W > 0$ при $y > 0$ и $\partial U / \partial y > 0$, $\partial W / \partial y > 0$ при $y = 0$. Функции p_x / ρ и p_z / ρ считаются заданными и отрицательными.

Теорема 1. Пусть краевая задача (1) имеет решение $u, v, w \in C^2(\overline{G})$. Тогда $u \geqslant 0$, $w \geqslant 0$ всюду в $\overline{G}$, причем равенства $u = 0$ и $w = 0$ достигаются лишь при $y = 0$.

Доказательство. Положим $S(a) = \overline{G} \cap \{x = a\}$, $0 \leqslant a \leqslant X$. Из граничных условий и непрерывности функций u, w и их первых производных следует существование такого числа $\varepsilon > 0$, что при $y > 0$ будем иметь $u > 0$ и $w > 0$ при всех $x \in [0; \varepsilon)$, $z \in [0; \varepsilon)$, $t \in [0; \varepsilon)$, $y \in (Y - \varepsilon; Y]$. Пусть $A = \sup a_1$ чисел a_1, таких, что $u > 0$

при $y > 0$ на всех $S(a)$, $a \in [0; a_1)$. Ясно, что $0 < A \leqslant X$. Если $A < X$, то существует последовательность $a_n \to A$, $a_n > A$, такая, что найдется хотя бы одна точка $P_n \in S(a_n) \cap \{y > 0\}$, для которой $u(P_n) = 0$. Выбирая в случае надобности подпоследовательность n_k, можно без ограничения общности считать, что $P_n \to P \in \overline{S(A)}$; тогда в силу непрерывности и $u(P) = 0$. Если $P^{(x)} = A$, $P^{(y)}$, $P^{(z)}$, $P^{(t)}$ — координаты точки P, то с учетом сказанного выше возможны лишь следующие случаи:

1) $0 < P^{(y)} \leqslant Y - \varepsilon$, $\varepsilon \leqslant P^{(z)} < Z$, $\varepsilon \leqslant P^{(t)} \leqslant T$. Тогда, так как $u \geqslant 0$ в $\overline{S(A)}$, $u_{yy}(P) \geqslant 0$, $u_y(P) = u_z(P) = 0$, $u_t(P) \leqslant 0$ и первое уравнение системы (1) в точке P выполняться не может.

2) $P^{(y)} = 0$, $\varepsilon \leqslant P^{(z)} \leqslant Z$, $\varepsilon \leqslant P^{(t)} \leqslant T$. В этом случае $w(P) = 0$, $u_y(P) \geqslant 0$, $u_t(P) \leqslant 0$ и первое уравнение системы (1) дает $\nu u_{yy}(P) = p_x / \rho + [u_t(P) + V(P)u_y(P) < 0$. Теперь если $u_y(P) = 0$, то $u < 0$ на интервале $x = A$, $0 < y < y_0$, $z = P^{(z)}$, $t = P^{(t)}$, где y_0 достаточно мало, что противоречит неотрицательности u на $S(A)$. Если $u_y(P) > 0$, то в силу непрерывности $u_y > 0$ и на множестве $\{A - \delta < x < A + \delta,\ y = 0,\ P^{(z)} - \delta < z < P^{(z)} + \delta,\ P^{(t)} - \delta < t < P^{(t)} + \delta\} \cap \overline{G}$ при некотором $\delta > 0$, откуда $u > 0$ на множестве $N = \{A - \delta < x < A + \delta, 0 < y < y_1, P^{(z)} - \delta < z < P^{(z)} + \delta, P^{(t)} - \delta < t < P^{(t)} + \delta\} \cap \overline{G}$ при некотором $y_1 > 0$. Но при достаточно больших n все точки P_n попадают в множество N, что снова ведет к противоречию.

3) $0 < P^{(y)} < Y - \varepsilon$, $P^{(z)} = Z$, $\varepsilon \leqslant P^{(t)} \leqslant T$. Тогда $u_{yy}(P) \geqslant 0$, $u_y(P) = 0$, $u_z(P) \leqslant 0$, $u_t(P) \leqslant 0$ и, чтобы избежать противоречия с первым уравнением системы (1), нужно допустить, что $u_z(P) < 0$ и $w(P) < 0$. Пусть $B = \sup b_1$ чисел b_1, таких, что $w > 0$ при $y > 0$ на всех $S(b)$, $b \in [0; b_1)$, и $Q_n \to Q \in \overline{S(B)}$ — последовательность точек, определяемая для w аналогично тому, как это было сделано для функции u. Если $Q^{(y)} = 0$, можно получить противоречие, как и в случае 2. Если же $0 < Q^{(y)} \leqslant Y - \varepsilon$, $\varepsilon \leqslant Q^{(z)} \leqslant Z$, $\varepsilon \leqslant Q^{(t)} \leqslant T$, то $w(Q) = 0$, $w_{yy}(Q) \geqslant 0$, $w_y(Q) = 0$, $w_x(Q) \leqslant 0$, $w_t(Q) \leqslant 0$, и, поскольку $B < A$, имеем $u(Q) > 0$, что ведет к противоречию с выполнением второго уравнения системы (1) в точке Q.

Итак, $A = X$ и аналогично доказывается, что $B = X$. Поэтому $u \geqslant 0$, $w \geqslant 0$ всюду в $\overline{G}$ и равенство $u = 0$ при $y > 0$ может иметь место лишь в некоторой точке M, такой, что $M^{(x)} = X$. Но тогда $u_x(M) \leqslant 0$, $u_y(M) = 0$, $u_z(M) \leqslant 0$, $u_t(M) \leqslant 0$, $u_{yy}(M) \geqslant 0$, и снова приходим к противоречию с системой (1). Аналогично убеждаемся, что и $w > 0$ при $y > 0$. Теорема доказана.

Лемма. Если u, v, w — решение класса $C^2(\overline{G})$ краевой задачи (1), то любая функция $\varphi \in C^2(\overline{G})$, для которой

$$L(\varphi) = \nu\varphi_{yy} - u\varphi_x - v\varphi_y - w\varphi_z - \varphi_t < 0$$

не может достигать минимума ни внутри G, ни на части границы

$$\partial G \cap [\{x = X\} \cup \{z = Z\} \cup \{t = T\}] \cap \{0 < y < Y\}$$

Действительно, если минимум φ достигается в некоторой точке M внутри области G или на указанной части границы, то $\varphi_{yy}(M) \geqslant 0$, $\varphi_x(M) \leqslant 0$, $\varphi_y(M) = 0$, $\varphi_z(M) \leqslant 0$, $\varphi_t(M) \leqslant 0$, и приходим к противоречию с неравенством $L(\varphi) < 0$, что и доказывает лемму.

Теорема 2. Пусть u, w — решение класса $C^2(\overline{G})$ краевой задачи (1). Тогда

$$0 \leqslant u \leqslant \max U + t \max (-p_x / \rho) \tag{2}$$

$$0 \leqslant w \leqslant \max W + t \max (-p_z / \rho) \tag{3}$$

Доказательство. Для произвольного $\varepsilon > 0$ рассмотрим функцию $\varphi = \max U + [\max(-p_x / \rho) + \varepsilon]t - u$. С одной стороны, $L(\varphi) = -\max(-p_x / \rho) - \varepsilon - p_x / \rho < 0$, т. е. φ удовлетворяет условиям леммы; с другой стороны, на той части границы, где функция φ должна достигать минимума, $\varphi \geqslant 0$. Поэтому $\varphi \geqslant 0$ всюду в $\overline{G}$, что и доказывает (2), если затем устремить ε к нулю. Неравенство (3) доказывается аналогично.

Теорема 3. Пусть u, w — решение класса $C^2(\bar{G})$ краевой задачи (1). Тогда всюду в G

$$\min\left\{\inf_{y>0}\frac{W}{U};\ \min\frac{p_z}{p_x}\right\}\leqslant\frac{w}{u}\leqslant\max\left\{\sup_{y>0}\frac{W}{U};\ \max\frac{p_z}{p_x}\right\}$$

Доказательство. Положим $\alpha = \max\{\sup_{y>0} W/U;\ \max p_z/p_x\} + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Тогда для функции $\varphi = \alpha u - w$ имеем $L(\varphi) = \alpha p_x/\rho - p_z/\rho < 0$, т. е. φ удовлетворяет условиям леммы; с другой стороны, всюду, где φ может достигать минимума, $\varphi \geqslant 0$. Значит, $\varphi \geqslant 0$ во всей области G, и правое неравенство доказано, если ε устремить к нулю. Аналогично с помощью функции

$$\varphi = w - (\min\{\inf_{y>0} W/U;\ \min p_z/p_x\} - \varepsilon)\,u$$

доказывается левое неравенство.

Отметим, что теоремы 1—3 справедливы и в случае, когда $Y = \infty$, если только $u \to U$ и $w \to W$ при $y \to \infty$ равномерно по x, z и t.

Поступила 17 IV 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1974.
2. *Raetz G. S.*, *Der J.* Solution of general three-dimensional laminar boundary-layers problems by an exact numerical method. Inst. Aeronaut. Sci. Paper, 1962.
3. *Wang K. C.* On the determination of the zones of influence and dependence for three-dimensional boundary-layer equations. J. Fluid Mech., 1971, vol. 48, pt. 2, p. 397—404.
4. *Wang K. C.* Aspects of «multitime initial — value problem» originating from boundary layer equations. Phys. Fluids, 1975, vol. 18, No. 8, p. 951—955.
5. *Шевелев Ю. Д.* Трехмерные задачи теории ламинарного пограничного слоя. М., «Наука», 1977.

УДК 539.3

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ С ЗЕРКАЛЬНО-ЦИКЛИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЕЙ

В. Н. Михайлов

(Москва)

Исследуется первая краевая задача теории упругости для областей и нагружений, имеющих не только циклическую [1,2], но и зеркальную симметрию. Интегральное уравнение Шермана—Лауричелла видоизменяется с учетом симметрии.

1. Пусть на плоскости, где введена прямоугольная система координат $x\,y$, задана область D, в общем случае многосвязная. Будем рассматривать области, обладающие зеркальной симметрией относительно лучей $\varphi = \pi r / n$ $(r = 0, 1, \ldots, 2n - 1)$ полярной системы координат $R\varphi$. Очевидно, эти области будут обладать также симметрией поворота относительно центра координат на углы $\alpha_k = 2\pi k / n$ $(k = 1, 2, \ldots, n - 1)$.

Область D ограничена несколькими замкнутыми контурами: L_0, $L_1, \ldots, L_m$, причем контур L_0 содержит внутри себя все остальные. Сумму всех границ обозначим через L. На этих контурах приложены известные внешние усилия, имеющие ту же симметрию, что и область D. Считаем, что главные векторы внешних усилий, приложенных к контурам L_k $(k = 0, 1, \ldots, m)$, равны нулю.