Рассмотрим возмущенное движение с аналитической пертурбационной функцией $H_1 = H_1(I_1, I_2, \omega_1, \omega_2)$ с периодом 2π по ω_i. Если гессиан H_0 не равен тождественно нулю, то, согласно теореме Колмогорова, торы $I_1 = \text{const}$, $I_2 = \text{const}$ мало деформируются, если величина $|H_1|$ достаточно мала и возмущенное условно-периодическое движение будет мало отличаться от невозмущенного. В рассматриваемом случае имеем

$$\left|\frac{\partial^2 H_0}{\partial I_i \partial I_j}\right| = \left|\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial I_i \partial I_j}\right| = \left|\frac{\partial(\nu_1, \nu_2)}{\partial(I_1, I_2)}\right| \neq 0$$

где $\nu_1 = \partial\alpha_1 / \partial I_1$, $\nu_2 = \partial\alpha_1 / \partial I_2$ — известные функции переменных I_1, I_2. Очевидно, в общем случае они рационально несоизмеримы.

В силу того, что

$$\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial I_1^2} = -\frac{\partial^2 I_1 / \partial\alpha_1^2}{(\partial I_1 / \partial\alpha_1)^3}$$

где $\partial^2 I_2 / \partial\alpha_1^2 \neq 0$ и $\partial I_1 / \partial\alpha_1 \neq 0$, откуда $\partial\nu_1 / \partial I_1 \neq 0$, условие $H_0(I_1, I_2) \not\equiv 0$ выполнено в рассматриваемой области. Тогда при достаточно малой по модулю возмущающей функции εH_1 в согласии с теоремой Колмогорова о сохранении условно-периодических движений в гамильтоновых системах, при малом изменении гамильтониана [1] можно утверждать, что возмущенное движение спутника осесимметричной планеты будет условно-периодическим.

Вопрос о приложимости полученных теоретических выводов зависит от величины малого параметра.

Очевидно, что в случае осесимметричной планеты можно указать достаточное условие, когда условно-периодические движения спутника сохраняются. Этому случаю (см. (2)) соответствует потенциал двух неподвижных центров и потенциал задачи Баррара [3]. В иных случаях необходимы дополнительные оценки.

Поступила 15 III 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Колмогоров А. Н.* О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона. Докл. АН СССР, 1954, т. 98, № 4.
2. *Хасанова М. Х.* Качественные исследования свойств движения спутника сфероидальной планеты. ПММ, 1977, т. 41, вып. 3.
3. *Демин В. Г.* Движение искусственного спутника в нецентральном поле тяготения. М., «Наука», 1968.

УДК 532.5

О СУЩЕСТВОВАНИИ ТЕЧЕНИЯ ТЯЖЕЛОЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ В КАНАЛЕ С НАКЛОННЫМ ДНОМ

И. Л. Гуревич

(Казань)

Доказывается разрешимость задачи о течении тяжелой идеальной жидкости со свободной границей в канале с неограниченно понижающимся дном при условии, что число Фруда больше единицы.

Течения в канале, дно которого имеет две горизонтальные асимптоты, исследовались ранее [1–3] при аналогичных условиях. Задачи об истечении тяжелой жидкости из сосуда, в которых скорость потока также неограниченно возрастает, рассматривались при произвольных [4,5] и при достаточно больших [6] значениях числа Фруда;

однако в этих задачах, в отличие от течения в канале, свободная граница проходит лишь через одну бесконечно удаленную точку.

В плоскости $z = x + iy$ рассмотрим установившееся потенциальное течение идеальной несжимаемой тяжелой жидкости со свободной границей в канале, дно которого состоит из двух лучей, исходящих из точки $z = 0$ и составляющих с положительным направлением оси x соответственно углы π и $-\alpha\pi$. Вектор скорости при $x \to -\infty$ и вектор ускорения силы тяжести имеют соответственно проекции $(v_0, 0)$ и $(0, -\gamma)$. Введем следующие обозначения: v и θ — модуль вектора скорости и угол между этим вектором и осью x, φ и ψ — потенциал скорости и функция тока, $w = \varphi + i\psi$, ψ_0 — расход жидкости, $\omega = \tau - i\theta = \ln (v_0^{-1}dw / dz)$, $\lambda = \gamma\psi_0 / v_0{}^3$.

Отображая полосу $0 \leqslant \psi \leqslant \psi_0$ в плоскости переменного w на полосу $0 \leqslant \eta \leqslant \pi / 2$ в плоскости переменного $\zeta = \xi + i\eta$ функцией $w = 2\psi_0\zeta / \pi$, обычным образом получим из уравнения Бернулли

$$\exp\left[3\tau\left(\xi + i\frac{\pi}{2}\right)\right] = 1 - \frac{6\lambda}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\xi} \sin\theta\left(\xi + i\frac{\pi}{2}\right)d\xi \tag{1}$$

Функция $\omega(\zeta)$ удовлетворяет граничному условию (1), а также условиям

$$\omega(-\infty + i\eta) = 0 \quad (0 \leqslant \eta \leqslant \pi / 2), \quad \theta(\xi) = 0 \quad (\xi < 0), \quad \theta(\xi) = -\alpha\pi \quad (\xi > 0)$$

С помощью формул Вилла получим

$$u(\xi) = D[g(\xi)] = D_1[g(\xi)] + D_2[g(\xi)] \tag{2}$$

$$D_k[g(\xi)] = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{m_k}^{n_k} g(t)\ln\left|\operatorname{th}\frac{t-\xi}{2}\right|dt$$

$$k = 1,2, \quad m_1 = -\infty, \quad m_2 = n_1 = \xi_0, \quad n_2 = \infty.$$

$$(u(\xi) = -\theta(\xi + i\pi/2) - u_0(\xi), \quad u_0(\xi) = \alpha(\pi - 2\operatorname{arctg} e^{-\xi}),$$

$$g(\xi) = d\tau(\xi + i\pi / 2) / d\xi$$

где ξ_0 — произвольное число. Операторы D_k положительны.

Из (1), (2) найдем

$$u(\xi) = D[G(\xi)] \tag{3}$$

$$G(\xi) = \frac{2\lambda}{\pi}\sin[u_0(\xi) + u(\xi)]\left[1 + \frac{6\lambda}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\xi}\sin[u_0(\xi) + u(\xi)]\,d\xi\right]^{-1}$$

Уравнения (3) эквивалентны операторному уравнению вида $u = T(u)$. Ниже его разрешимость доказывается с помощью принципа Шаудера.

Пусть $\xi_0 = \ln\sqrt{3}$, а параметры α, λ удовлетворяют условиям

$$0 < \alpha < 1, \quad 0 \leqslant \lambda < \min[1, (1-\alpha)\pi - \delta] \tag{4}$$

где $\delta > 0$ как угодно мало (условие на λ совпадает с неравенствами (2.28), (4.31) в [1]). Пусть E — пространство непрерывных на $[-\infty, \infty]$ функций с нормой $\| u \| = \sup | u(\xi) |$, а $H = H(C_1, C_2, \beta)$ — замкнутое подмножество E, элементы $u(\xi)$ которого удовлетворяют условиям

$$0 \leqslant u(\xi) \leqslant (1-\alpha)\pi - \delta \quad (|\xi| < \infty) \tag{5}$$

$$u(\xi) \leqslant C_1 e^{-\beta|\xi|} \quad (\xi \leqslant \xi_0), \quad u(\xi) \leqslant C_2 / \xi \quad (\xi \geqslant \xi_0) \tag{6}$$

$$0 < \beta < 1, \quad C_1 > 0, \quad C_2 > 0$$

Будем оценивать $F(\xi) = D[G(\xi)] = T(u)$ при $u \in H$.

Заметим, что

$$0 \leqslant u_0(\xi) \leqslant \alpha\pi \quad (|\xi| < \infty) \tag{7}$$

$$u_0(\xi) \leqslant 4\alpha e^{-|\xi|} \quad (\xi \leqslant \xi_0), \quad u_0(\xi) \geqslant \alpha\pi / 3 \quad (\xi \geqslant \xi_0) \tag{8}$$

Из (5), (7) следует, что $0 \leqslant u_0(\xi) + u(\xi) \leqslant \pi - \delta$ при $\xi \in (-\infty, \infty)$ и

(9) $$u_0 + u \geqslant \sin(u_0 + u) \geqslant \pi^{-1} \sin \delta u_0 \geqslant 0$$

С помощью (6), (8), (9) получим из (3)

(10) $$0 \leqslant G(\xi) \leqslant 2\lambda / \pi \quad (|\xi| < \infty)$$

(11) $$G(\xi) \leqslant \pi (\alpha \sin \delta\xi)^{-1} \quad (\xi \geqslant \xi_0)$$
$$G(\xi) \leqslant 8\alpha\pi^{-1}e^{-|\xi|} + 2\lambda\pi^{-1}C_1 e^{-\beta|\xi|} \quad (\xi \leqslant \xi_0)$$

Применение к (10) оператора D с учетом равенства $D(1) = \pi / 2$ дает $0 \leqslant F(\xi) \leqslant \leqslant \lambda$; отсюда и из (4) имеем

(12) $$0 \leqslant F(\xi) \leqslant (1 - \alpha)\pi - \delta \quad (|\xi| < \infty)$$

Ниже используются оценки

(13) $$D_1(e^{-\nu|\xi|}) \leqslant \frac{\pi}{2} f(\nu) e^{-\nu|\xi|} \quad (|\xi| < \infty)$$

(14) $$D_2(1 / \xi) \leqslant N \Phi(\xi) \quad (|\xi| < \infty)$$
$$\Phi(\xi) = e^{-|\xi|} \quad (\xi \leqslant \xi_0), \quad \Phi(\xi) = 1 / \xi \quad (\xi > \xi_0)$$

где $N > 0$, а $f(\nu)$ — непрерывная возрастающая функция, $f(0) = 1$, $f(1) = \infty$. Неравенство (13) было доказано (см. [1]). Для доказательства (14) рассмотрим непрерывную при $0 \leqslant \eta \leqslant \pi / 2$, $|\xi| < \infty$ функцию $r(\zeta) = \ln\ln(e^{\zeta} + 2) - \ln\ln 2$. Обозначим

$$p_1(\xi) = \operatorname{Im} r\left(\xi + i\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{arctg}\frac{a}{b}$$
$$p_2(\xi) = \frac{d}{d\xi}\operatorname{Re} r\left(\xi + i\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2(2a + be^{\xi})e^{\xi}}{(a^2 + b^2)(e^{2\xi} + 4)}$$
$$(a = 2\operatorname{arctg}(e^{\xi} / 2), \quad b = \ln(e^{2\xi} + 4))$$

Справедливы неравенства

(15) $$p_1(\xi) \leqslant M\Phi(\xi) \quad (|\xi| < \infty), \quad p_2(\xi) \geqslant m / \xi > 0 \quad (\xi \geqslant \xi_0)$$

Учитывая, что $r(-\infty + i\eta) = 0$, $\operatorname{Im} r(\xi) = 0$ $(|\xi| < \infty)$, имеем $p_1(\xi) = D[p_2(\xi)] \geqslant D_2[p_2(\xi)]$. Отсюда и из (15) вытекает

(16) $$M\Phi(\xi) \geqslant mD_2(1 / \xi) \quad (|\xi| < \infty)$$

Из (16) следует оценка (14) с $N = M / m$.

Мажорируя в (11) $e^{-|\xi|}$ функцией $e^{-\beta|\xi|}$ и применяя оценки (13), (14), получим из (11)

(17) $$F(\xi) \leqslant \pi N (\alpha \sin \delta)^{-1}\Phi(\xi) + \lambda f(\beta) e^{-\beta|\xi|}(C_1 + 4\alpha)$$
$$(|\xi| < \infty)$$

Используя (17), свойства $f(\nu)$ и неравенства $\lambda < 1$, $0 < \beta < 1$, можно показать возможность такого выбора достаточно малого β и достаточно большого C_1, а затем и достаточно большого C_2, что будут выполняться неравенства

(18) $$F(\xi) \leqslant C_1 e^{-\beta|\xi|} \quad (\xi \leqslant \xi_0), \quad F(\xi) \leqslant \frac{C_2}{\xi} \quad (\xi \geqslant \xi_0)$$

Сравнивая (5), (6) с (12), (18), заключаем, что при выбранных значениях C_1, C_2, β оператор T переводит $H(C_1, C_2, \beta)$ в себя. Используя полученные оценки, можно доказать также полную непрерывность сужения оператора T на H по норме пространства E (доказательство опирается на тот известный факт, что семейство функций $F_n(\xi) = D[G_n(\xi)]$ равностепенно непрерывно на любом конечном интервале, если семейство $G_n(\xi)$ равномерно ограничено при $|\xi| < \infty$).

Из принципа Шаудера вытекает, что при выполнении условий (4) уравнение $u = T(u)$, эквивалентное исходной гидродинамической задаче, имеет хотя бы одно решение $u(\xi) \in H$.

Привлекая методы [1,3], можно распространить доказанную теорему существования на случай канала с криволинейным неограниченно понижающимся дном.

Поступила 20 IV 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gerber R.* Sur les solutions exactes des équations du mouvement avec surface libre d'un liquide pesant. J. Math. Pures Appl., 1955, vol. 34, No. 3. (Рус. перев.: М., Изд-во иностр. лит., 1959.)
2. *Красовский Ю. П.* О существовании апериодических течений со свободной границей. Докл. АН СССР, 1960, т. 133, № 4.
3. *Киселев О. М.* О течении тяжелой жидкости в канале с криволинейным дном. ПММ, 1976, т. 40, вып. 4.
4. *Carter D. S.* Existence of a class of steady plane gravity flows. Pasif. J. Math., 1961, vol. 11, No. 3.
5. *Гуревич И. Л.* Истечение тяжелой жидкости из сосуда с криволинейными стенками. Тр. семинара по краевым задачам, вып. 14. Изд-во Казанск. ун-та, 1977.
6. *Keady G., Norbury J.* The jet from a horizontal slot under gravity. Proc. Roy. Soc. London A, 1975, vol. 344, No. 1639.

УДК 532.526

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ УРАВНЕНИЙ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

О. В. Титов

(Москва)

Рассматривается система уравнений пространственного пограничного слоя (см. например, [1]) с условиями прилипания или отсоса на поверхности тела. Показано, что при отрицательных продольной и поперечной компонентах градиента давления и соответствующих граничных условиях продольная и поперечная составляющие вектора скорости положительны не только вблизи тела, но и по всей толщине пограничного слоя. Это дает возможность оценить сверху указанные составляющие скорости в зависимости от граничных условий и установить, как ведут себя проекции линий тока на поверхность тела. Последнее представляет интерес в связи с областями влияния и областями зависимости в трехмерном пограничном слое [2–5].

Пусть $G \subset R^4(x, y, z, t)$ — область, определяемая условиями $0 < x < X$, $0 < y < Y$, $0 < z < Z$, $0 < t < T$. Рассмотрим в G систему уравнений с граничными условиями

$$
\begin{gathered}
\nu u_{yy} - uu_x - vu_y - wu_z - u_t = p_x/\rho \\
\nu w_{yy} - uw_x - vw_y - ww_z - w_t = p_z/\rho \\
u_x + v_y + w_z = 0 \\
u = w = 0, \quad v = V(x, z, t) \leqslant 0, \quad y = 0 \\
u = U, \ w = W \ \text{на}\ \partial G \cap [\{x = 0\} \cup \{z = 0\} \cup \{t = 0\} \cup \{y = Y\}]
\end{gathered} \tag{1}
$$

причем $U > 0$, $W > 0$ при $y > 0$ и $\partial U / \partial y > 0$, $\partial W / \partial y > 0$ при $y = 0$. Функции p_x / ρ и p_z / ρ считаются заданными и отрицательными.

Теорема 1. Пусть краевая задача (1) имеет решение $u, v, w \in C^2(\overline{G})$. Тогда $u \geqslant 0$, $w \geqslant 0$ всюду в $\overline{G}$, причем равенства $u = 0$ и $w = 0$ достигаются лишь при $y = 0$.

Доказательство. Положим $S(a) = \overline{G} \cap \{x = a\}$, $0 \leqslant a \leqslant X$. Из граничных условий и непрерывности функций u, w и их первых производных следует существование такого числа $\varepsilon > 0$, что при $y > 0$ будем иметь $u > 0$ и $w > 0$ при всех $x \in [0; \varepsilon)$, $z \in [0; \varepsilon)$, $t \in [0; \varepsilon)$, $y \in (Y - \varepsilon; Y]$. Пусть $A = \sup a_1$ чисел a_1, таких, что $u > 0$