УДК 531.35

# УРАВНЕНИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ЭКВАТОРИАЛЬНОГО СПУТНИКА В ПЕРЕМЕННЫХ «ДЕЙСТВИЕ — УГОЛ»

М. Х. Хасанова

(Душанбе)

Рассматривается задача о вычислении канонических переменных действие — угол для экваториального спутника осесимметричной планеты, и путем использования теоремы А. Н. Колмогорова [1] исследуется проблема сохранения условно-периодических движений спутника при помощи новых по форме уравнений возмущенного движения.

Введем прямоугольную планетоцентрическую систему координат, плоскость $xy$ которой совпадает с экваториальной плоскостью планеты. Если планета обладает осевой симметрией относительно полярной оси, то силовая функция определяется формулой [2]

$$U=\frac{fM}{r}\left[1-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{J_kR^k}{r^k}P_k(\sin\varphi)\right] \tag{1}$$

$$\sin\varphi=z/r,\quad r^2=x^2+y^2+z^2$$

где $M$ — масса Земли, $R$ — радиус Земли.

Если в плоскости экватора ввести полярные координаты $r$, $\theta$, то силовую функцию для возмущенной задачи можно записать в форме

$$V=V(r)+\varepsilon F(r,\ \theta,\ \varepsilon) \tag{2}$$

где $\varepsilon$ — малый параметр. При $\varepsilon=0$ получим невозмущенное движение.

Сохраняя в (2) только вторую зональную гармонику, имеем

$$V=\frac{fM}{r}-\frac{fMJ_2R^2}{2r^3}$$

Рассмотрим уравнение Гамильтона — Якоби в случае движения искусственного спутника в экваториальной плоскости осесимметричной планеты. Так как $\theta$ — циклическая координата, то для сопряженного импульса имеем $\partial W/\partial\theta=\alpha_2=\text{const}$, и полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби

$$W=\int A(r)\,dr+\alpha_2\theta$$

$$A(r)=\left(\frac{fMJ_2R^2}{r^3}-\frac{\alpha_2^2}{r^2}-\frac{2fM}{r}+2\alpha_1\right)^{1/2}$$

где ограничимся случаем $\alpha_1<0$ ($\alpha_1$ — постоянная интеграла энергии).

Теперь от канонических элементов $\alpha_1$, $\alpha_2$ перейдем к другим каноническим импульсам, интегрируя по периоду изменения $r$ и $\theta$. Получим

$$I_1=\oint A(r)\,dr,\qquad I_2=\oint\alpha_2 d\theta$$

Величины $I_1$ и $I_2$ — переменные действия. Координата $\theta$ во время движения (при $\alpha_2\neq 0$) будет изменяться в пределах $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$.

Величину $I_1$ можно переписать в виде

$$I_1=\int_{m_1}^{m_2}[P(u)]^{1/2}du \tag{3}$$

$$P(u)=bu^3-\alpha_2u^2-cu+2\alpha_1=0 \tag{4}$$

$$(u=1/r,\ c=2fM,\ b=fMJ_2R^2)$$

где пределы интегрирования — положительные корни уравнения (4).

Исследуем движение спутника в случае, когда начальные данные удовлетворяют условиям

$$| u_0 | < \sqrt{c / b}, \quad \dot{\theta} \neq 0, \quad \alpha_2 \neq 0 \quad (u_0 = 1 / r_0)$$

Придадим в многочлене $P(u)$ аргументу $u$ значения $-\sqrt{c / b}$, $u_0$, $+\sqrt{c / b}$, $+\infty$. Видно, что

$$P\left(-\sqrt{\frac{c}{b}}\right) = -\frac{c\alpha_2^2}{b} + 2\alpha_1 < 0, \quad P(u_0) = u_0'^2 \geqslant 0$$

$$P\left(+\sqrt{\frac{c}{b}}\right) = -\frac{c\alpha_2^2}{b} + 2\alpha_1 < 0, \quad P(+\infty) > 0$$

Отсюда заключаем, что все три корня многочлена $P(u)$ — действительные; один из корней $u_3$ всегда положителен и больше $\sqrt{c / b}$; два других $u_1$ и $u_2$ лежат в промежутке $(-\sqrt{c / b}, +\sqrt{c / b})$, причем $-\sqrt{c / b} < u_1 \leqslant u_0 \leqslant u_2 < \sqrt{c / b} < u_3$.

В случае $\alpha_1 < 0$ уравнение (4) имеет либо один, либо три действительных корня. Реальным начальным скоростям, сообщаемым спутнику планеты, соответствует случай трех действительных корней $0 < u_1 < u_2 < u_3$, причем в действительном движении $P(u) \geqslant 0$. Координаты $u$ принимают значение либо в интервале $u_1 \leqslant u \leqslant u_2$, либо в интервале $u_3 \leqslant u < \infty$. Практический интерес представляет первый случай.

Интеграл (3) можно выразить через полные эллиптические интегралы первого, второго и третьего рода.

Обозначая через $u_0$ меньший корень многочлена $P(u)$ и $Q = 4abm$, $B = abu_0 - \alpha_2$, $G = 4a\alpha_1$, $N = 4ac$, из (3) находим

$$I_1 = \frac{4\eta_2}{\sqrt{ab}} \left[ \frac{Q\mathrm{K}(k) - Q\mathrm{E}(k)}{k^2} + B\mathrm{K}(k) + \left(\frac{G}{u_0^2} - \frac{N}{u_0}\right) \Pi(k, -n) \right] \tag{5}$$

где $\mathrm{K}(k)$, $\mathrm{E}(k)$ и $\Pi(k, -n)$ — полные эллиптические интегралы соответственно первого, второго и третьего рода. Их модуль и параметр определяются формулами $k = \xi_1 / \xi_2$, $n = m / u_0$, где $\xi_1$ и $\xi_2$ — корни соответствующего уравнения четвертой степени.

Теперь уравнение (5) можно разрешить относительно первоначального элемента орбиты $\alpha_1$ в виде степенного ряда относительно $k^2$. Приближенно имеем (при $k = 0$)

$$\alpha_1 = (I_1 - LI_2 - S)\Phi^{-1}$$

$$L = \frac{\eta_2^2}{2\sqrt{ab}}, \quad \Phi = \frac{2\eta_2\pi}{\sqrt{ab}}(1 - \eta_2^2 u_0)$$

$$S = \frac{4\eta_2}{\sqrt{ab}} \left(\frac{\pi p}{4} + \frac{1}{2} ab\pi u_0 - \frac{N\pi}{2u_0}\right)$$

Рассмотрим преобразование $(\alpha_1, \alpha_2) \to (I_1, I_2)$, которое задается соотношением (5) и формулой $I_2 = 2\pi\alpha_2$. Оно будет взаимно-однозначным, так как

$$\frac{\partial(I_1, I_2)}{\partial(\alpha_1, \alpha_2)} = 2\pi \frac{\partial I_1}{\partial \alpha_1} \neq 0$$

при $\alpha_1 \neq 0$ и $u_0 \neq u_1$. Итак, можно считать известными функциями $\alpha_1 = \alpha_1(I_1, I_2)$, $\alpha_2 = I_2 / 2\pi$.

Введем теперь производящую функцию канонического преобразования

$$W = \int_{r^0}^{r} \left[ \alpha_1(I_1, I_2) - \frac{2fM}{\tau} - \frac{I_2^2}{2\pi^2\tau^2} + \frac{fMJ_2R^2}{\tau^3} \right]^{1/2} d\tau + \frac{I_2}{2\pi}\theta =$$

$$= \overline{W}(r, \theta, I_1, I_2)$$

Оно определит канонические переменные действие — угол

$$p_1 = \frac{\partial\overline{W}}{\partial r}, \quad p_2 = \frac{\partial\overline{W}}{\partial\theta} = \frac{I_2}{2\pi}, \quad \omega = \frac{\partial\overline{W}}{\partial I_1}, \quad \omega_2 = \frac{\partial\overline{W}}{\partial I_2}$$

Рассмотрим возмущенное движение с аналитической пертурбационной функцией $H_1 = H_1(I_1, I_2, \omega_1, \omega_2)$ с периодом $2\pi$ по $\omega_i$. Если гессиан $H_0$ не равен тождественно нулю, то, согласно теореме Колмогорова, торы $I_1 = \text{const}$, $I_2 = \text{const}$ мало деформируются, если величина $|H_1|$ достаточно мала и возмущенное условно-периодическое движение будет мало отличаться от невозмущенного. В рассматриваемом случае имеем

$$\left|\frac{\partial^2 H_0}{\partial I_i \partial I_j}\right| = \left|\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial I_i \partial I_j}\right| = \left|\frac{\partial(\nu_1, \nu_2)}{\partial(I_1, I_2)}\right| \neq 0$$

где $\nu_1 = \partial\alpha_1 / \partial I_1$, $\nu_2 = \partial\alpha_1 / \partial I_2$ — известные функции переменных $I_1$, $I_2$. Очевидно, в общем случае они рационально несоизмеримы.

В силу того, что

$$\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial I_1^2} = -\frac{\partial^2 I_1 / \partial \alpha_1^2}{(\partial I_1 / \partial \alpha_1)^3}$$

где $\partial^2 I_2 / \partial \alpha_1^2 \neq 0$ и $\partial I_1 / \partial \alpha_1 \neq 0$, откуда $\partial \nu_1 / \partial I_1 \neq 0$, условие $H_0(I_1, I_2) \not\equiv 0$ выполнено в рассматриваемой области. Тогда при достаточно малой по модулю возмущающей функции $\varepsilon H_1$ в согласии с теоремой Колмогорова о сохранении условно-периодических движений в гамильтоновых системах, при малом изменении гамильтониана [1] можно утверждать, что возмущенное движение спутника осесимметричной планеты будет условно-периодическим.

Вопрос о приложимости полученных теоретических выводов зависит от величины малого параметра.

Очевидно, что в случае осесимметричной планеты можно указать достаточное условие, когда условно-периодические движения спутника сохраняются. Этому случаю (см. (2)) соответствует потенциал двух неподвижных центров и потенциал задачи Баррара [3]. В иных случаях необходимы дополнительные оценки.

Поступила 15 III 1978

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Колмогоров А. Н.* О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона. Докл. АН СССР, 1954, т. 98, № 4.
2. *Хасанова М. Х.* Качественные исследования свойств движения спутника сфероидальной планеты. ПММ, 1977, т. 41, вып. 3.
3. *Демин В. Г.* Движение искусственного спутника в нецентральном поле тяготения. М., «Наука», 1968.

---

УДК 532.5

# О СУЩЕСТВОВАНИИ ТЕЧЕНИЯ ТЯЖЕЛОЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ В КАНАЛЕ С НАКЛОННЫМ ДНОМ

**И. Л. Гуревич**

(Казань)

Доказывается разрешимость задачи о течении тяжелой идеальной жидкости со свободной границей в канале с неограниченно понижающимся дном при условии, что число Фруда больше единицы.

Течения в канале, дно которого имеет две горизонтальные асимптоты, исследовались ранее [1–3] при аналогичных условиях. Задачи об истечении тяжелой жидкости из сосуда, в которых скорость потока также неограниченно возрастает, рассматривались при произвольных [4,5] и при достаточно больших [6] значениях числа Фруда;