УДК 531.36:534

# УСТОЙЧИВЫЕ КОЛЕБАНИЯ С ГАРМОНИЧЕСКОЙ ПО ПРОСТРАНСТВУ И ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПО ВРЕМЕНИ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИЕЙ

**В. И. Арнольд**

(Москва)

В данной заметке показано, что ответ на поставленный А. Ю. Ишлинским вопрос о том, может ли положение равновесия $x = 0$ системы $x^{\cdot\cdot} = -\partial U(x, t)/\partial x$ быть устойчивым, если функция $U$ — гармоническая по $x$, положительный. Строится периодически зависящая от времени симметрическая матрица $A(t)$ со следом нуль, такая, что нулевое решение системы $x^{\cdot\cdot} = A(t)x$ устойчиво. (Напомним, что квадратичная форма $(Ax, x) / 2$ гармонична тогда и только тогда, когда след $A$ равен нулю.) При этом размерность конфигурационного пространства, т. е. число координат вектора $x$, предполагается большим единицы.

Хотя предлагаемый пример носит несколько искусственный характер, метод его построения может представлять некоторый интерес при исследовании полугрупп Ли и в изучении границы достижимого множества в управляемых системах. Этот метод изложен в п. 3, где объясняется происхождение примера, формальное описание которого дано в п. 1; устойчивость равновесия полученной системы с гармоническим потенциалом доказывается в п. 2.

**1. Описание примера.** Пусть $N$ и $\varepsilon$ — положительные числа (в дальнейшем $N$ будет выбираться достаточно большим, а $\varepsilon$ — достаточно малым). Зафиксируем симметрическую матрицу $S$ порядка $n$ со следом нуль, такую, что собственные числа матрицы $S^2$ положительны и различны. Такая матрица существует, если $n > 2$. (Можно взять, например, диагональную матрицу с указанными свойствами.) Будем пока предполагать, что $n > 2$.

Разобъем отрезок $[0, (4 / N) + \varepsilon)$ оси $t$ на шесть последовательных отрезков, длины которых $\Delta$ указаны в первой строке следующей таблицы, и зададим матрицу $A(t)$ в каждом из этих отрезков равной постоянной матрице, указанной во второй строке таблицы (при этом причисляем к каждому отрезку его левый, но не правый конец).

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Delta$ | $1/N$ | $\varepsilon/3$ | $1/N$ | $1/N$ | $2\varepsilon/3$ | $1/N$ |
| $A(t)$ | $3NS/2$ | $0$ | $-3NS/2$ | $3NS/4$ | $0$ | $-3NS/4$ |

Построив таким образом $A(t)$ на отрезке $[0, T)$, $T = (4 / N) + \varepsilon$, продолжим эту функцию на всю ось $t$ периодически с периодом $T$. Заметим, что след $A(t)$ при всех $t$ равен нулю, так что отвечающий $A(t)$ потенциал гармоничен.

*Теорема 1.* Если взять достаточно малое $\varepsilon$ и затем достаточно большое $N$, то положение равновесия $x = 0$ уравнения с периодическими коэффициентами $x^{\cdot\cdot} = A(t)x$ будет устойчиво.

Заметим, что в указанном в теореме 1 примере функция $A(t)$ разрывно зависит от времени. От этого недостатка легко избавиться, сгладив эту функцию. Зафиксируем функцию $A$ (т. е. $\varepsilon$ и $N$ в теореме 1). Пополним график функции $A$ отрезками, соединяющими предельные значения слева и справа в точках разрыва. Рассмотрим гладкую периодическую функцию $A_*$, график которой лежит целиком в $\delta$-окрестности пополненного графика функции $A$, такую, что след $A_*(t)$ при любом $t$ равен нулю. Такие функции $A_*$ нетрудно построить явно.

*Теорема 2.* Если $\delta$ достаточно мало, то положение равновесия $x = 0$ уравнения с гладкими периодическими коэффициентами $x^{\cdot\cdot} = A_*(t)x$ устойчиво. Здесь $A_*(t) = -\partial U(x, t) / \partial x$ и потенциал $U$ гармонический.

**2. Доказательства.** Рассмотрим оператор монодромии уравнения $x^{\cdot\cdot} = A(t)x$. Это уравнение эквивалентно системе $x^{\cdot} = y$, $y^{\cdot} = Ax$ с матрицей

$$Q = \begin{Vmatrix} 0 & E \\ A & 0 \end{Vmatrix}$$

Поэтому отрезку времени длины $\Delta$, на котором $A$ имеет постоянное значение, отвечает преобразование фазового пространства с матрицей $\exp \Delta Q$. Оператор монодромии рассматриваемого уравнения представляет собой произведение шести таких экспонент соответственно шести отрезкам постоянства $A$ на периоде.

Рассмотрим сначала отрезки длины $1 / N$. На каждом из них $A$ имеет вид $NB$, где $B = 3S / 2$, $-3S / 2$, $3S / 4$ и $-3S / 4$ соответственно. Поэтому при $N \to \infty$ соответствующий оператор преобразования фазового пространства за время $1 / N$ имеет конечный предел

$$\lim_{N\to\infty} \exp\frac{1}{N}\begin{Vmatrix}0 & E\\ NB & 0\end{Vmatrix} = \exp\begin{Vmatrix}0 & 0\\ B & 0\end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix}E & 0\\ B & E\end{Vmatrix}$$

Следовательно, произведение трех экспонент, отвечающих первым трем отрезкам, имеет при $N \to \infty$ конечный предел, равный

$$\exp\left[\begin{Vmatrix}E & 0\\ -B & E\end{Vmatrix}\Delta\begin{Vmatrix}0 & E\\ 0 & 0\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}E & 0\\ B & E\end{Vmatrix}\right], \quad B = \frac{3S}{2}, \quad \Delta = \frac{\varepsilon}{3}$$

Перемножая матрицы, получаем

$$\exp\Delta\begin{Vmatrix}B & E\\ -B^2 & -B\end{Vmatrix}$$

Такой же вид имеет произведение преобразований для последних трех отрезков, только в этом случае $\Delta = 2\varepsilon / 3$, $B = 3S / 4$.

Окончательно матрица оператора монодромии имеет при $N \to \infty$ предел

$$M(\varepsilon) = \exp\frac{2\varepsilon}{3} M_2 \exp\frac{\varepsilon}{3} M_1, \quad M_n = \begin{Vmatrix}3S/2^n & E\\ -9S^2/4^n & -3S/2^n\end{Vmatrix}, \quad n = 1, 2$$

При $\varepsilon \to 0$ имеем

$$M(\varepsilon) = E + \varepsilon M_0 + \ldots, \quad M_0 = \begin{Vmatrix}S & E\\ -9S^2/8 & -S\end{Vmatrix}$$

Докажем, что при достаточно малых $\varepsilon$ все собственные числа $M(\varepsilon)$ различны и по модулю равны единице.

Из формулы для $M(\varepsilon)$ следует, что при любом фиксированном $\tau$

(2.1) $\quad \lim_{k\to\infty} M(\tau / k)^k = \exp \tau M_0$

Преобразование в правой части имеет собственные числа, по модулю все равные единице и попарно различные (при не слишком больших $\tau$). Действительно, это — преобразование за время $\tau$ фазового потока системы

$$x^{\cdot} = Sx + y, \quad y^{\cdot} = -{}^{9}/_{8}S^2x - Sy$$

Исключая $y$, получаем $x^{\cdot\cdot} = -{}^{1}/_{8}S^2x$, т. е. уравнение малых колебаний с положительной потенциальной энергией (собственные числа $S^2$ положительны) и попарно различными собственными частотами $\omega_j$ (собственные числа $\omega_j^2$ матрицы $S^2$ попарно различны). Собственные числа матрицы $\exp \tau M_0$ равны, следовательно, $\exp(\pm i\tau\omega_j)$. Эти числа попарно различны при малых $\tau$.

Заметим, что все рассматриваемые здесь дифференциальные уравнения гамильтоновы. Следовательно, операторы преобразования фазового пространства симплектические. Симплектические операторы, собственные числа которых все по модулю равны единице, отличны от $\pm 1$ и попарно различны, обладают свойством сильной устойчивости: они устойчивы вместе со всеми близкими к ним симплектическими операторами (см. [1]).

Итак, симплектический оператор $\exp \tau M_0$ сильно устойчив. Из формулы (2.1) следует теперь, что при достаточно большом $k$ оператор $M(\tau / k)$ сильно устойчив. Значит, при достаточно малом $\varepsilon$ оператор $M(\varepsilon)$ сильно устойчив. Но тогда при достаточно большом $N$ устойчив и близкий к $M(\varepsilon)$ оператор монодромии $M(N, \varepsilon)$ рассматриваемой системы при конечном $N$.

Этим доказана теорема 1. Теорема 2 вытекает из того, что оператор $M$ $(N, \varepsilon)$ сильно устойчив, а оператор монодромии для $A_*$ близок к нему.

*Замечания*. 1°. Приведенные рассуждения доставляют также пример одномерной системы с периодическими коэффициентами $x^{\cdot\cdot} = A\ (t)x$, которая остается устойчивой при изменении знака правой части. Более того, функцию с такими свойствами можно выбрать нечетной (или четной) по $t$. Действительно, формулы п. 1, в которых $S = 1$, доставляют такой пример с разрывной функцией $A$; сглаживанием легко добиться тех же свойств для гладкой функции $A$.

2°. Теперь можно построить пример устойчивого уравнения с гармоническим по пространству и периодическим по времени потенциалом для случая $n = 2$. С этой целью нужно рассмотреть систему, распадающуюся в прямое произведение $x_1^{\cdot\cdot} = A\ (t)x_1,\ x_2^{\cdot\cdot} = -A\ (t)x_2$, где функция $A$ построена в замечании 1°.

**3. Полугруппы Ли и граница достижимости.** 1°. Обсуждаемая задача может рассматриваться как частный случай задачи о полугруппах Ли, порожденных выпуклыми конусами в алгебрах Ли. Полугруппа Ли, порожденная конусом, представляет собой замыкание произведений экспонент элементов алгебры Ли, лежащих в конусе.

В рассматриваемой задаче группа Ли — это группа симплектических матриц порядка $2n$, а направляющая конуса состоит из матриц вида

$$\begin{Vmatrix} 0 & E \\ S & 0 \end{Vmatrix}$$

где $S$ — симметрическая матрица со следом нуль.

Выше доказано, что при $n \geqslant 3$ полугруппа, порожденная таким конусом, содержит сильно устойчивые симплектические матрицы. Представляло бы некоторый интерес попытаться расклассифицировать полугруппы, порожденные выпуклыми конусами, для классических групп Ли. Излагаемые ниже соображения позволяют сделать первые шаги в этом направлении; на них, в частности, основано построение примера п. 1.

2°. Задача о полугруппах Ли является, в свою очередь, частным случаем задачи о строении достижимого множества в управляемых системах. Эта последняя задача в общем виде формулируется следующим образом: в касательном пространстве к многообразию в каждой точке дано подмножество (называемое индикатрисой возможных скоростей). Требуется найти множество точек, достижимых из данной точки при движении, скорость которого в каждый момент времени принадлежит индикатрисе, или найти хотя бы замыкание этого множества.

Один из способов решения этой задачи состоит в последовательном расширении индикатрисы, проводимом следующим образом. Во-первых, вместо индикатрисы можно рассмотреть натянутый на нее конус, так как существенно лишь направление достигающей кривой, а не величина скорости движения по ней. Во-вторых, полученный конус можно замкнуть в надежде, что достижимые при новом конусе точки будут лежать внутри или на границе множества точек, достижимых до замыкания. В-третьих, полученный замкнутый конус можно расширить до его выпуклой оболочки, имея в виду возможность смешанных стратегий (т. е. движения с быстро сменяющимися участками, на которых скорость выбирается по-разному).

Предположим, что в результате этих операций получены такие конусы в касательных пространствах, что каждый конус содержит некоторое подпространство в касательном пространстве. В таком случае возникает еще четвертая возможность расширения конуса-индикатрисы. Именно, рассмотрим какое-либо векторное поле, вектор которого в каждой точке лежит в отмеченном подпространстве касательного пространства.

Рассмотрим какую-либо точку на фазовой кривой, проходящей через выбранную исходную точку. Преобразование, обратное к преобразованию фазового потока, переводящего начальную точку в конечную, отображает индикатрису конечной точки в касательное пространство в исходной точке. Эту передвинутую индикатрису можно присоединить к индикатрисе исходной точки.

Действительно, можно двигаться некоторое время $N$ до конечной точки по векторному полю, затем малое время $\varepsilon$, придерживаясь индикатрисы конечной точки, а затем в течение времени $N$ — обратно по фазовой кривой векторного поля. В результате сместимся из исходной точки на расстояние порядка $\varepsilon$, придерживаясь сдвинутой индикатрисы (с точностью до малых выше первого порядка по $\varepsilon$).

Объединение всех сдвинутых таким образом индикатрис можно снова подвергать овыпуклению, замыканию и т. д., пока эти операции не перестанут менять индикатрисы.

3°. Пример п. 1 построен следующим образом. Исходная индикатриса в единице симплектической группы состоит из матриц вида

$$\begin{Vmatrix} 0 & E \\ A & 0 \end{Vmatrix}$$

где $A$ — любая симметрическая матрица со следом нуль. В остальных точках группы индикатриса получается из этой посредством правого сдвига.

Индикатриса в каждой точке является, таким образом, аффинной плоскостью. Соответствующий конус — открытая полуплоскость на единицу большего числа измерений. Его замыкание представляет собой замкнутую полуплоскость; граница (в точке единица) состоит из матриц вида

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{Vmatrix}$$

где $A$ — симметрическая со следом нуль.

Таким образом, получено правоинвариантное поле плоскостей, лежащих в расширенных индикатрисах. Умножение элементов группы (справа) на

$$\exp t \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{Vmatrix}$$

задает фазовый поток, векторы скоростей которого принадлежат построенным плоскостям. Применяя расширение индикатрисы посредством сдвигов вдоль этого поля, присоединим к индикатрисе в единице все матрицы вида ($A$ и $B$ — симметрические со следом нуль):

$$\begin{Vmatrix} E & 0 \\ A & E \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 & E \\ B & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} E & 0 \\ -A & E \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} A & E \\ B - A^2 & -A \end{Vmatrix}$$

Первая матрица в левой части этого равенства — матрица одного из преобразований фазового потока, а последняя — обратная ей матрица.

Овыпуклим объединение всех сдвинутых таким образом индикатрис. Получится множество всех матриц вида

$$\begin{Vmatrix} S & E \\ C & -S \end{Vmatrix}$$

где $S$ и $C$ — симметрические матрицы, причем след $S$ равен нулю и $\operatorname{tr} C \leqslant -\operatorname{tr} S^2$. Среди таких матриц имеются, в частности, матрицы вида

$$\begin{Vmatrix} S & E \\ -\lambda S^2 & -S \end{Vmatrix}, \quad \lambda > 1$$

Но этой матрице соответствует система $x^{\cdot} = Sx + y$, $y^{\cdot} = -\lambda S^2 x - Sy$ или уравнение $x^{\cdot\cdot} = -(\lambda - 1)S^2 x$, описывающее устойчивые колебания. Теперь нетрудно построить путь, ведущий из единицы в сильно устойчивую симплектическую матрицу, как это и сделано в п. 1.

Поступила 7 III 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М., «Наука», 1974.