

О НАЧАЛЬНОМ РАЗВИТИИ ЛИНИЙ СКОЛЬЖЕНИЯ ОТ СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЫ ТЕЛА

В. Д. Кулиев, Г. П. Черепанов

(Москва)

Методом Винера — Хопфа дается точное замкнутое решение упругопластической задачи о двух линиях скольжения, исходящих под произвольным углом из некоторой точки свободной границы полуплоскости, подвергнутой растяжению или сжатию. Вблизи конца линий скольжения допускается концентрация напряжений, описываемая некоторым коэффициентом интенсивности напряжений. Начало движения линии скольжения описывается при помощи теории, аналогичной теории запаздывания текучести Коттрела — Работнова.

Одним из наиболее интересных и принципиальных вопросов теории идеальной пластичности является вопрос о структуре пластических деформаций, [которые могут концентрироваться в узких слоях скольжения Людерса — Чернова (расположенных целиком в упругой области) или же могут быть распределены непрерывно в некоторой зоне (объем которой существенно отличен от нуля)]. На основании экспериментальных данных (см., например, [1]) для существования линий скольжения необходим резкий переход от упругого режима к пластическому на диаграмме $\sigma - \epsilon$, а также наличие хорошо выраженной площадки текучести на той же диаграмме. Такими свойствами обладают не только малоуглеродистые стали, но и некоторые другие сплавы при соответствующей термообработке [1]. Существенно, что наличие четко выраженной площадки текучести, вообще говоря, недостаточно для образования линий скольжения. (В работе [2] описан, в частности, титановый сплав, обладающий этим свойством).

С другой стороны, при наличии малых отверстий и выточек в идеальном упругопластическом теле распределенные пластические зоны при увеличении внешней нагрузки превращаются в длинные «языки», вытянутые в глубь тела. Это фундаментальное свойство пластических деформаций можно считать установленным не только экспериментально, но и на основании ряда точных решений упругопластических задач (например, для сложного сдвига — решение Треффца [3], для плоской деформации — решение Саусвелла и Аллена [4], для плоского напряженного состояния — решение Г. П. Черепанова [5]). Естественно, что при достаточно большой длине языка его можно считать некоторой линией скольжения в упругой области, т. е. пренебрегать толщиной языка по сравнению с его длиной; при этом на линии скольжения возникает скачок (разрыв) напряжений и смещений, удовлетворяющий обычным законам сохранения.

При теоретическом изучении линий скольжения Рейсс [6] впервые понял необходимость введения напряжений в упругой области, превышающих предел текучести.

1. Модель пластического деформирования. Следуя Рейссу [6], считаем, что напряжения в упругой области превышают предел текучести. При определенных условиях отсюда следует возникновение концентрации напряжений в конце линии скольжения. Действительно, пусть расположен

ная вдоль прямой Ox плоскости xOy трещиновидная («тонкая») полость плотно заполнена материалом, предел текучести которого меньше, чем у основного материала. (Полость считается тонкой, если выполнены условия $h \ll L$, $dh/ds \ll 1$, где $h(s)$ и L — поперечный и характерный продольный размеры полости.) Материал «заполнителя» считается идеально пластическим. Очевидно, что с увеличением внешних нагрузок вначале произойдет пластический сдвиг в тонкой полости. При этом компонента смещения в касательной плоскости к поверхности трещиновидной полости терпит разрыв, а нормальное смещение на этой же плоскости непрерывно. Непрерывными будут также нормальное и касательное напряжения (условия равновесия). Кроме того, можно предполагать, что касательное напряжение в плоскости скольжения в предельном состоянии не зависит от нормального напряжения в этой плоскости. Следовательно, в качестве условия предельного состояния пластического материала в тонкой полости можно принять $\tau = \tau_s$, где τ_s — предел текучести на сдвиг, причем считается, что напряжение τ действует на берегах разрыва.

Отсюда видно, что как только достигнуто предельное состояние пластического материала в тонкой полости, может возникнуть концентрация напряжений вблизи ее края, характеризуемая упругой асимптотикой для трещин поперечного сдвига (с пластическим заполнителем). С дальнейшим увеличением внешних нагрузок эта концентрация (если она имеет место) будет расти. При этом предполагается, что увеличение внешних нагрузок должно быть таким, чтобы напряжения в основном материале были меньше, чем его предел текучести $2\tau_s$. Иными словами, напряжения σ в упругой области принимают значения $2\tau_s \leq \sigma < 2\tau_{sb}$. Тем самым, в силу «тонкости» рассматриваемой полости допускается существование упругого равновесия напряжений, при котором в некоторой части упругой области напряжения σ «проскакивают» нижний предел текучести $2\tau_s$, не вызывая пластической деформации.

Таким образом, развитие пластической деформации вдоль тонкой полосы скольжения, окруженной упругой областью, может быть объяснено, так же как по Рейссу, заранее присущей материалу неоднородностью по отношению к пластическим деформациям.

Условие возникновения концентрации напряжений в малой области в конце линии скольжения в рамках этой модели зависит от величины вязкости скольжения η , тем самым, от структуры и прочности материала этой области.

Действительно концентрация напряжений в конце линии скольжения в упругой области, как показано выше, характеризуется упругой асимптотикой для трещин поперечного сдвига. Эта асимптотика (локальная или сверхтонкая) вполне определена одним коэффициентом интенсивности напряжений K_{II} . Пусть K_{IIc} — вязкость скольжения для трещин поперечного сдвига без заполнителя, а K_{IIcb} — вязкость скольжения для трещин с пластическим заполнителем. Из физических соображений $K_{IIc} < K_{IIcb}$. Очевидно, что с монотонным возрастанием внешней нагрузки коэффициент K_{II} будет также монотонно возрастать и проскакивать нижний предел вязкости скольжения K_{IIc} , не вызывая при этом в течение некоторого времени, т. е. когда выполняется условие $0 \leq K_{IIc} < K_{II} < K_{IIcb}$, пластической деформации в конце линии сколь-

жения в упругой области. Когда $K_{II} = K_{IIcb}$, внезапно появляется пластическая деформация в конце линии скольжения в упругой области и начинается движение линии скольжения; при движении $K_{II} = K_{IIc}$.

Вязкость скольжения K_{IIcb} определяет сопротивление материала развитию в нем поверхностей скольжения и является постоянной материала. Когда такое сопротивление пренебрежимо мало, можно считать, что $K_{IIcb} = 0$, и только в этом частном случае напряжения будут ограничены в конце линии скольжения.

Приведенная модель пластического деформирования характерна для сред с запаздыванием текучести, и поэтому лишь такие среды будут рассматриваться в статье.

Реализация на практике того или другого из возможных решений (например разрывного и непрерывного, как в данных задачах) может быть объяснена с позиций общего принципа выбора, сформулированного Г. П. Черепановым [7] и являющегося интегральным обобщением принципа максимума Мизеса [8].

Отметим некоторые из имеющихся в литературе решений с пластическими линиями скольжения: решение Дагдейла [9] (линия скольжения на продолжении трещины в пластине), решения М. Я. Леонова с сотрудниками [10] (для различных случаев кручения стержней и растяжения тонких пластин с концентраторами напряжений), решение Г. П. Черепанова [11] (одна линия скольжения, выходящая на свободную границу полуплоскости) и др.

Ниже в рамках приведенной модели строится точное решение задачи о двух линиях скольжения, выходящих под произвольным углом из некоторой точки свободной границы полуплоскости, подвергнутой растяжению или сжатию. В «голове» линии скольжения в упругой области допускается локальная концентрация напряжений, описываемая некоторым коэффициентом интенсивности напряжений. Начало движения линии скольжения (т. е. начало возникновения пластических деформаций в голове линии скольжения в упругой области) описывается в рамках теории¹, аналогичной теории запаздывания текучести Коттрела — Работнова [12, 13], однако формулируемой в терминах коэффициента интенсивности напряжений (вместо напряжения). Найдено, что линии скольжения должны составлять угол 45° со свободной границей тела. Такая конфигурация линий скольжения наблюдается в условиях плоской деформации, если место их возникновения заранее зафиксировать при помощи мелкой выточки или надреза (см., например, [1]).

2. Краевая задача. Пусть однородное и изотропное упругое тело в плоскости Oxy , где xy — прямолинейные декартовы координаты, занимает полуплоскость $x > 0$. На границу полуплоскости, свободную от внешних нагрузок, выходят симметрично относительно оси x прямолинейные линии скольжения длины l под углом 2α (фиг. 1). Без ограничения общности длину l можно считать равной единице (характерный масштаб длины). В дальнейшем будем пользоваться полярными координатами $r\theta$ с центром в

¹ Отметим, что в статье [12] рассмотрен, по существу, лишь чисто качественный физический аспект теории; полная трехмерная математическая теория развита в [13].

начале декартовых координат. Пусть на бесконечности действует постоянное напряжение $\sigma_y = \sigma$.

Граничные условия несколько другой задачи запишем в следующем виде:

$$(2.1) \quad \theta = 0, \tau_{r\theta} = 0, u_\theta = 0$$

$$\theta = \pi/2, \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0$$

$$\theta = \alpha, [\sigma_\theta] = [\tau_{r\theta}] = 0, [u_\theta] = 0$$

$$(2.2) \quad \theta = \alpha, \tau_{r\theta} = \tau_s - 1/2 \sigma \sin 2\alpha \quad (0 < r < 1), \quad [\sigma_r] = 0 \quad (r > 1)$$

Здесь $\sigma_\theta, \sigma_r, \tau_{r\theta}$ — напряжения, u_θ, u_r — перемещения. Квадратные скобки означают скачок величины, заключенной в скобки. Предполагается, что $\sigma \geq 2\tau_s$.

Пусть на бесконечности выполняется условие

$$(2.3) \quad r \rightarrow \infty, \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$$

Напряжения в исходной задаче, изображенной на фиг. 1, очевидно, равны напряжениям и деформациям, полученным из решения краевой задачи (2.1)–(2.3), плюс напряжения $\sigma_x = \tau_{xy} = 0, \sigma_y = \sigma$.

В силу симметрии относительно оси x достаточно построить решение задачи при $\pi/2 > \theta > 0$.

3. Вывод уравнения Винера — Хопфа. Применяя интегральное преобразование (p — комплексный параметр)

$$(3.1) \quad \varphi^*(p) = \int_0^\infty \varphi(r) r^p dr$$

к уравнениям равновесия и условию совместности деформаций, получим

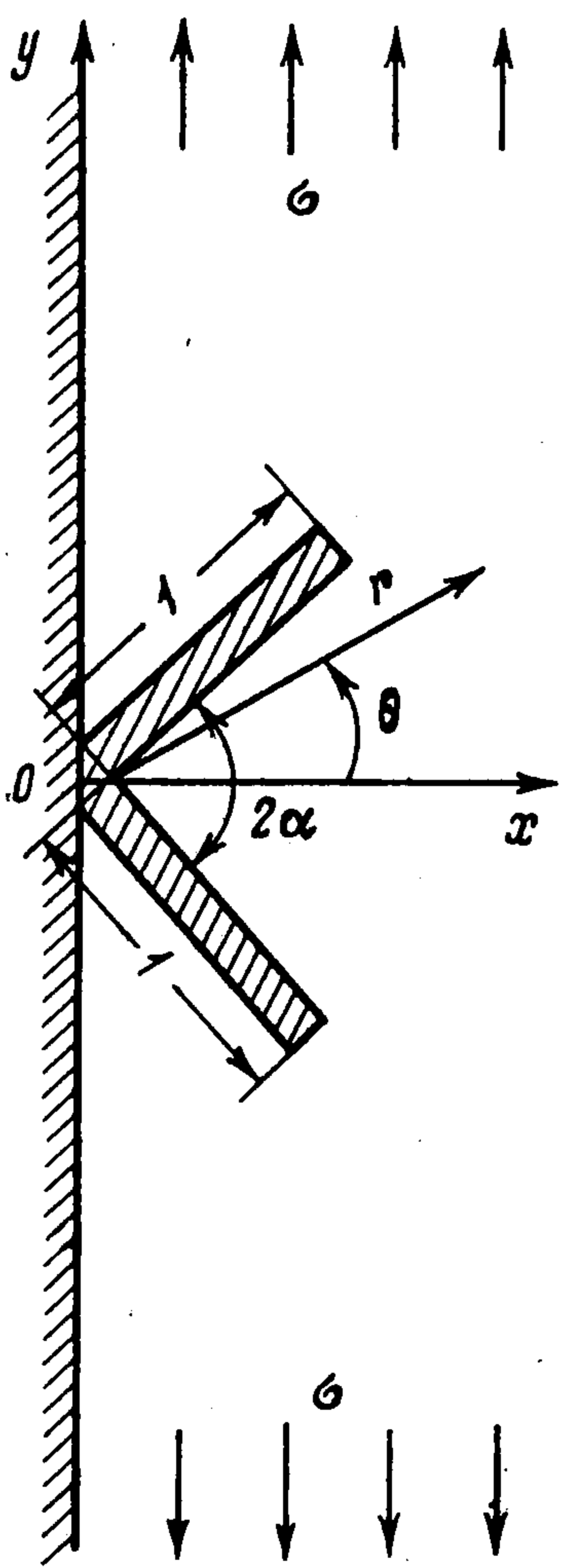
$$(3.2) \quad \tau_{r\theta}^* = \frac{1}{p-1} \frac{d\sigma_\theta^*}{d\theta}, \quad p\sigma_r^* = \frac{1}{p-1} \frac{d^2\sigma_\theta^*}{d\theta^2} - \sigma_\theta^*$$

$$(3.3) \quad \sigma_\theta^* = \begin{cases} \sigma_\theta^{*+}, & 0 \leq \theta < \alpha \\ \sigma_\theta^{*-}, & \alpha < \theta \leq \pi/2 \end{cases}$$

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \sigma_\theta^{*+} &= A_1 \cos(p+1)\theta + A_2 \cos(p-1)\theta + A_3 \sin(p+1)\theta + \\ &+ A_4 \sin(p-1)\theta \\ \sigma_\theta^{*-} &= B_1 \cos(p+1)(\pi/2 - \theta) + B_4 \cos(p-1)(\pi/2 - \\ &- \theta) + B_2 \sin(p+1)(\pi/2 - \theta) + B_3 \sin(p-1)(\pi/2 - \theta) \end{aligned}$$

Здесь A_i, B_i ($i = 1, 2, 3, 4$) — неизвестные функции комплексного параметра p , подлежащие определению из преобразованных граничных условий.

Любые семь из них выражаются через одну неизвестную функцию при помощи семи «сквозных» условий (2.1), преобразованных по r .



Фиг. 1

Из преобразованных граничных условий (2.1), (2.2) при помощи (3.2) — (3.4) и закона Гука приходим к следующей системе уравнений:

$$(3.5) \quad \begin{aligned} (p+1)A_3 + (p-1)A_4 &= 0 \\ A_3[(p+1) - 4(1-\nu)] + (p-1)A_4 &= 0 \\ B_1 + B_4 = 0, \quad B_2(p+1) + B_3(p-1) &= 0 \\ A_1(p-1)\cos(p+1)\alpha + A_2(p-1)\cos(p-1)\alpha &= \\ = 2B_2[p\cos p(\pi/2 - \alpha)\cos\alpha - \sin p(\pi/2 - \alpha)\sin\alpha] - & \\ - 2B_1(p-1)\sin p(\pi/2 - \alpha)\cos\alpha & \\ A_1(p+1)\sin(p+1)\alpha + A_2(p-1)\sin(p-1)\alpha &= \\ = -2B_2(p+1)\sin p(\pi/2 - \alpha)\cos\alpha - 2B_1 \times & \\ \times [p\cos p(\pi/2 - \alpha)\cos\alpha + \sin p(\pi/2 - \alpha)\sin\alpha] & \\ A_1\sin(p+1)\alpha = B_2\cos(p+1)(\pi/2 - \alpha) - & \\ - B_1\sin(p+1)(\pi/2 - \alpha) & \end{aligned}$$

Решение системы уравнений (3.5) запишем в виде

$$(3.6) \quad \begin{aligned} A_1 &= C[p\cos\alpha\sin p\alpha + \sin p(\pi/2 - \alpha)\cos(p\pi/2 - \alpha)] \\ A_2 &= \frac{C}{p-1} \left[p^2\cos\alpha\sin p\alpha + \sin^2 p \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \cos \left(p \frac{\pi}{2} + \alpha \right) - \right. \\ &\quad \left. - p\sin p \frac{\pi}{2} \cos \left(p \frac{\pi}{2} - p\alpha + \alpha \right) \right], \quad A_3 = A_4 = 0 \\ B_1 = -B_4 &= -C(p\cos\alpha\sin p\alpha + \sin\alpha\cos p\alpha)\sin p\pi/2 \\ B_2 &= C\Delta, \quad B_3 = -C(p+1)(p-1)^{-1}\Delta \\ \Delta &= (p-1)\cos\alpha\sin p\alpha\cos p\pi/2 \end{aligned}$$

Введем следующие функции:

$$\Psi^-(p) = \int_0^1 [\sigma_r]_{\theta=\alpha} r^p dr, \quad \Psi^+(p) = \int_1^\infty \tau_{r\theta}(r, \alpha) r^p dr$$

Функция $\Psi^-(p)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} p > -1$, а функция $\Psi^+(p)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} p < 1$.

При помощи введенных функций условия (2.2) запишутся в виде

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \theta = \alpha, \quad [\sigma_r^*] &= \Psi^-(p), \quad \tau_{r\theta}^*(p, \alpha) = \Psi^+(p) + F(p) \\ F(p) &= \int_0^1 \left[\tau_s - \frac{1}{2}\sigma\sin 2\alpha \right] r^p dr \end{aligned}$$

При помощи формул (3.2), (3.4), (3.6) получим

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \Psi^+(p) + F(p) &= -\frac{C}{p-1}\gamma(p) \\ \Psi^-(p) &= \frac{2C}{p-1}\sin p\pi \\ \gamma(p) &= 2p^2\cos^2\alpha\sin^2 p\alpha + \sin p(\pi/2 + \alpha) \times \\ &\quad \times \sin p(\pi/2 - \alpha) - \sin^2 p(\pi/2 - \alpha)\cos 2\alpha + p\sin 2\alpha \times \\ &\quad \times \sin p\pi/2\cos p(\pi/2 - 2\alpha) \end{aligned}$$

Исключая функцию $C(p)$ из двух соотношений (3.8), приходим к функциональному уравнению Винера — Хопфа

$$(3.9) \quad \Psi^+(p) + F(p) = 1/4 \operatorname{ctg} p\pi G(p) \Psi^-(p)$$

$$G(p) = 1 - \frac{1}{\cos p\pi} \left[4p^2 \cos^2 \alpha \sin^2 p\alpha + \cos 2p\alpha + \right. \\ \left. + 2p \sin 2\alpha \sin p \frac{\pi}{2} \cos p \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha \right) - 2 \cos 2\alpha \sin^2 p \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right]$$

4. Решение уравнения Винера — Хопфа. Функциональное уравнение (3.9) имеет место в полосе $|\operatorname{Re} p| < 1$. Функция $G(p)$ обладает следующими свойствами:

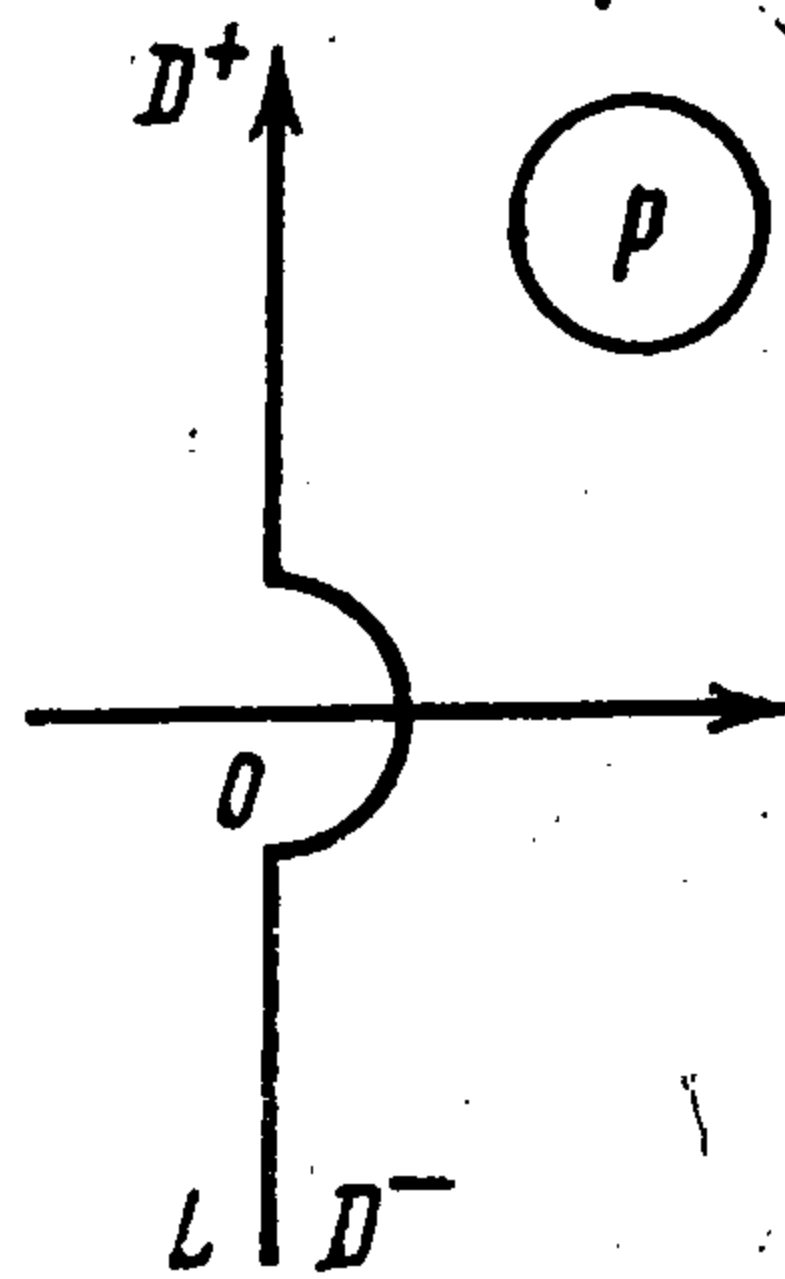
а) функция $G(p)$ мероморфна, причем все полюсы, расположенные в точках $p = \pm 1/2 \pm n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), являются простыми;

б) всюду на мнимой оси функция $G(p)$ не имеет ни полюсов, ни нулей, за исключением точки $p = 0$, где она имеет нуль второго порядка, причем

$$G(p) = p^2 [2(\alpha^2 - \pi^2/4) - \pi \sin 2\alpha + \\ + 2(\pi/2 - \alpha)^2 \cos 2\alpha] + O(p^3) \quad (p \rightarrow 0)$$

в) при $p \rightarrow \infty$ вдоль мнимой оси $G(p) \rightarrow 1$ в силу неравенства $\alpha < \pi/2$.

Рассмотрим в плоскости p контур L , состоящий из мнимой оси (за исключением малого симметричного отрезка около начала координат) и правой полуокружности малого радиуса с центром в начале координат



Фиг. 2

(фиг. 2). Направление обхода контура совпадает с направлением мнимой оси. Области слева и справа от контура L обозначим соответственно через D^+ и D^- .

Функцию $G(p)$ можно представить в виде

$$(4.1) \quad G(p) = G^+(p) / G^-(p) \quad (p \in L)$$

$$(4.2) \quad \exp \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln G(t)}{t-p} dt = \begin{cases} G^+(p) & (p \in D^+) \\ G^-(p) & (p \in D^-) \end{cases}$$

Функции $G^+(p)$ и $G^-(p)$ аналитичны и не имеют нулей соответственно в областях D^+ и D^- ; на бесконечности они стремятся к единице.

Используем следующее известное представление (см., например, [14, 15]):

$$(4.3) \quad p \operatorname{ctg} p\pi = K^+(p) K^-(p)$$

$$K^\pm(p) = \Gamma(1 \mp p) / \Gamma(1/2 \mp p)$$

Согласно свойствам гамма-функций, функция $K^+(p)$ аналитична и не имеет нулей при $\operatorname{Re} p < 1/2$, а функция $K^-(p)$ аналитична и не имеет нулей при $\operatorname{Re} p > -1/2$. Кроме того, согласно формуле Стирлинга, имеем

$$(4.4) \quad K^\pm(p) = \sqrt{\mp p} + O(1) \quad (p \rightarrow \infty)$$

С учетом факторизации (4.1), (4.3) уравнение (3.9) можно записать так:

$$(4.5) \quad \frac{\Psi^+(p)}{K^+(p)G^+(p)} + \frac{F(p)}{K^+(p)G^+(p)} = \frac{K^-(p)}{4pG^-(p)} \Psi^-(p) \quad (p \in L)$$

Используем теперь следующее представление:

$$(4.6) \quad \frac{F(p)}{K^+(p)G^+(p)} = F^+(p) - F^-(p) \quad (p \in L)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{F(t)}{K^+(t)G^+(t)} \frac{dt}{t-p} = \begin{cases} F^+(p) & (p \in D^+) \\ F^-(p) & (p \in D^-) \end{cases}$$

Подставляя (4.6) в (4.5), получим

$$(4.7) \quad \frac{\Psi^+(p)}{K^+(p)G^+(p)} + F^+(p) = \frac{K^-(p)\Psi^-(p)}{4pG^-(p)} + F^-(p)$$

Левая часть этого равенства аналитична в D^+ , а правая — в D^- . На основании принципа непрерывного продолжения они равны одной и той же функции, аналитической во всей плоскости p . Чтобы найти эту единую аналитическую функцию, нужно изучить поведение искомых функций $\Psi^+(p)$ и $\Psi^-(p)$ в бесконечности при $p \rightarrow \infty$. Это поведение определяется из известной асимптотики вблизи конца линии скольжения при $\theta = \alpha$, $r \rightarrow 1$ (см. [16], стр. 75)

$$(4.8) \quad \Psi^-(p) = -\frac{2\sqrt{2}K_{II}}{\sqrt{p}}, \quad \Psi^+(p) = \frac{K_{II}}{\sqrt{-2p}}, \quad p \rightarrow \infty$$

На основании (4.2), (4.4) и (4.8) единая аналитическая функция в (4.7) стремится к нулю при $p \rightarrow \infty$. Следовательно, по теореме Лиувилля она тождественно равна нулю во всей плоскости p . Таким образом, решение уравнения Винера — Хопфа имеет вид

$$(4.9) \quad \Psi^+(p) = -F^+(p)K^+(p)G^+(p)$$

$$(4.10) \quad \Psi^-(p) = -\frac{4pF^-(p)G^-(p)}{K^-(p)}$$

Определяя отсюда при помощи (3.8) функцию $C(p)$, находим преобразование Меллина искомых напряжений, а после обращения преобразования — и сами напряжения.

5. Анализ решения. Найдем коэффициент интенсивности напряжений K_{II} в вершине линии скольжения при $\theta = \alpha$. Используя формулы (4.8), (4.9), (4.2), (4.4) при $p \rightarrow \infty$, находим

$$(5.1) \quad K_{II} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{F(t)}{K^+(t)G^+(t)} dt$$

Функция $F(p)$, согласно (3.7), очевидно, будет иметь вид

$$(5.2) \quad F(p) = \frac{1}{p+1} \left(\tau_s - \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha \right)$$

Подставляя это выражение в формулу (5.1) и вычисляя интеграл при помощи теории вычетов, находим (формула записана в размерных переменных)

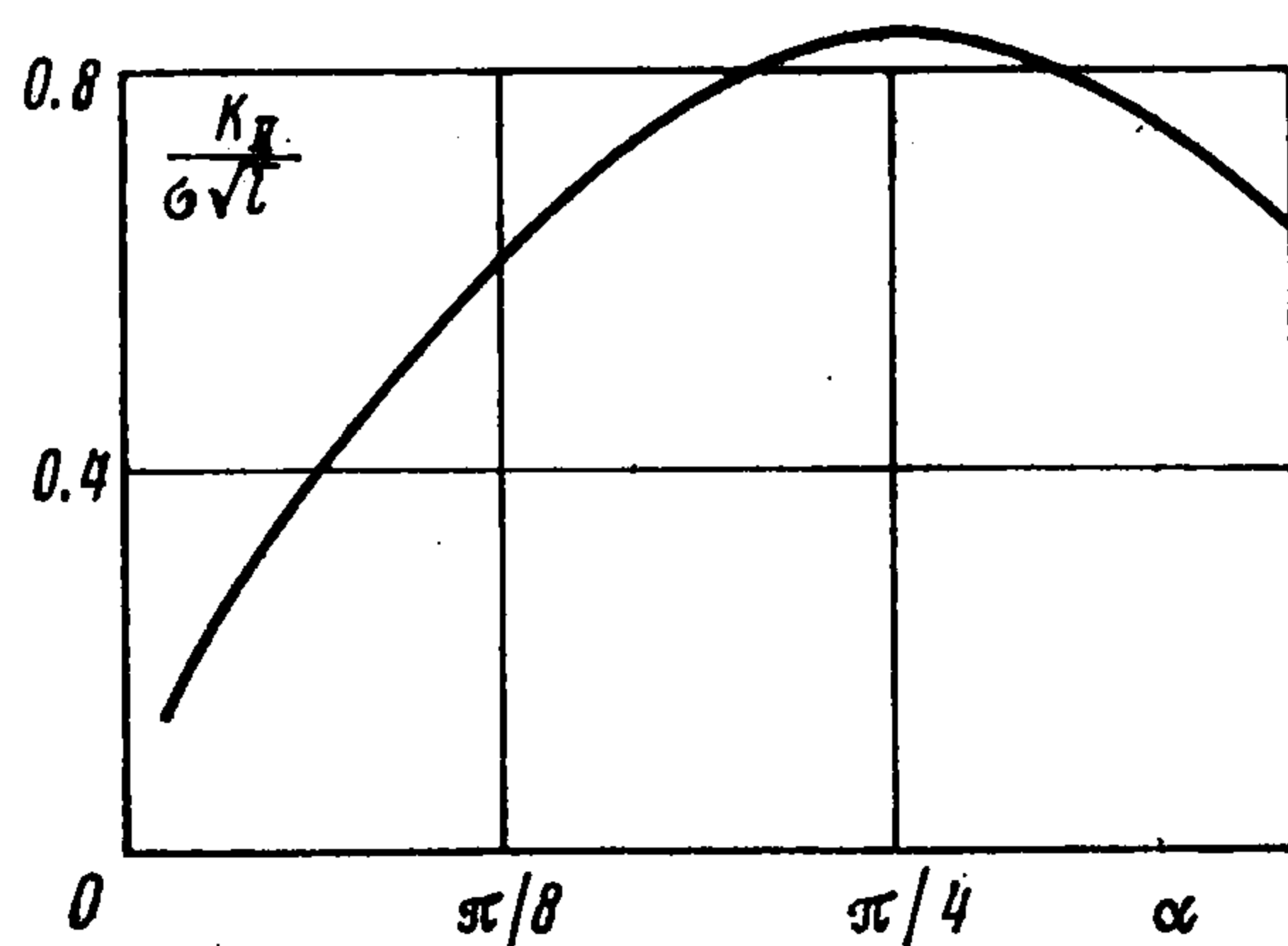
$$(5.3) \quad K_{II} = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\tau_s - 1/2 \sigma \sin 2\alpha}{G^+(-1)} \sqrt{l}$$

Преобразуя формулу (4.2), находим

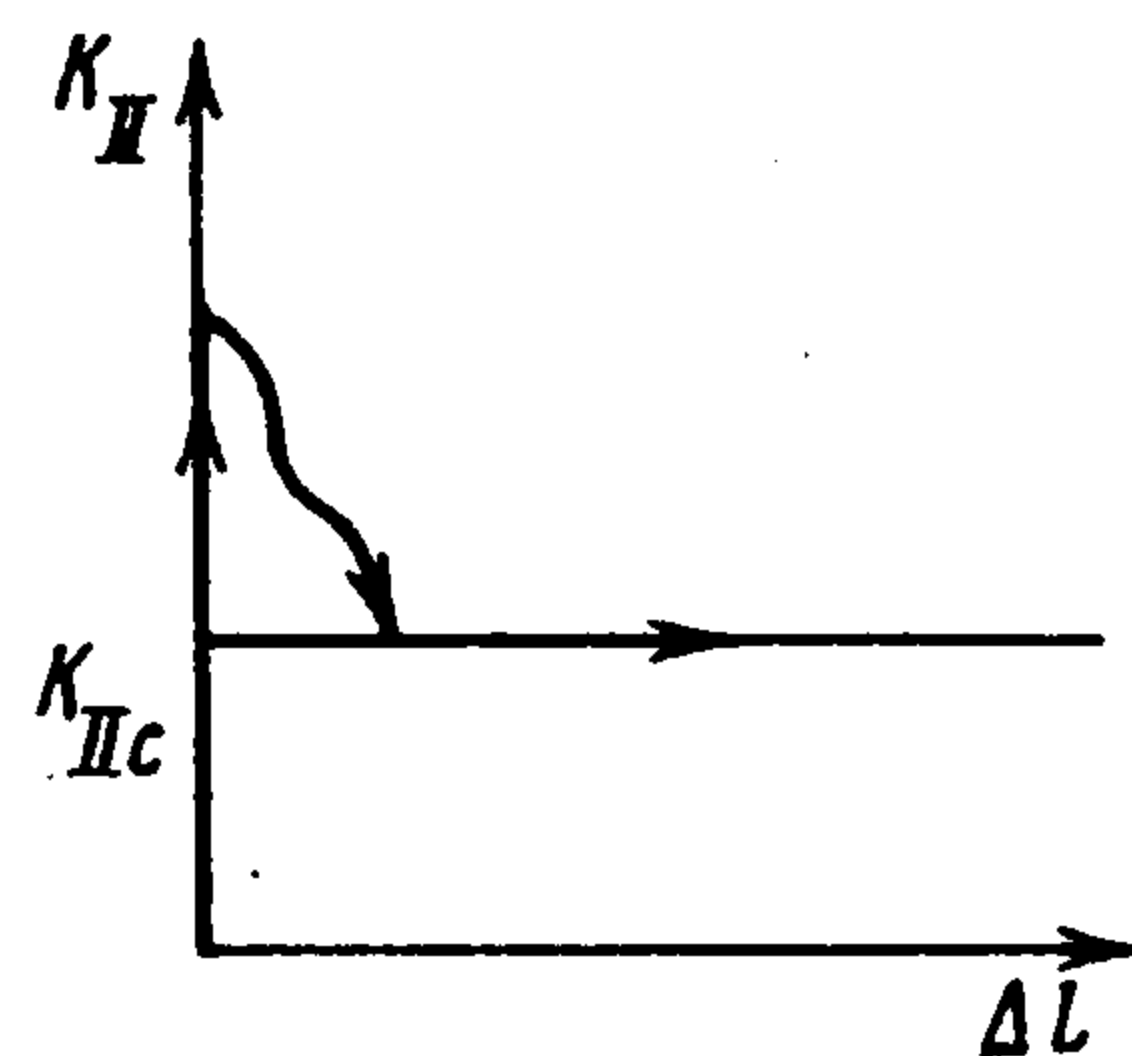
$$G^+(-1) = \exp \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\ln m(t)}{1+t^2} dt$$

$$m(t) = 1 - \frac{1}{\operatorname{ch} t\pi} \left[4t^2 \cos^2 \alpha \operatorname{sh}^2 t\alpha + \operatorname{ch} 2t\alpha - \right. \\ \left. - 2t \sin 2\alpha \operatorname{sh} t \frac{\pi}{2} \operatorname{ch} t \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha \right) + 2 \cos 2\alpha \operatorname{sh}^2 t \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right]$$

График зависимости $K_{II} / (\sigma\sqrt{l})$ от угла α построен на ЭВМ при $\tau_s = 0$ и приведен на фиг. 3. Видно, что величина $K_{II} / (\sigma\sqrt{l})$ при $\alpha = 45^\circ$ достигает максимального значения, равного 0.86.



Фиг. 3



Фиг. 4

Найдем напряжения при $r \rightarrow 0$ и $0 < \theta < \alpha$ в исходной задаче, изображенной на фиг. 1. После некоторых вычислений получаем

$$\sigma_\theta = \frac{2\tau_s}{\sin 2\alpha} \cos^2 \theta, \quad \sigma_r = \frac{2\tau_s}{\sin 2\alpha} \sin^2 \theta, \quad \tau_{r\theta} = \frac{\tau_s}{\sin 2\alpha} \sin 2\theta$$

Коэффициент K_{II} в исходной задаче, очевидно, будет определяться той же формулой (5.3).

6. Движение линий скольжения. Естественно предположить, что линия скольжения будет развиваться по тому направлению α , где достигается максимальная величина коэффициента K_{II} , т. е., согласно фиг. 3, при $\alpha = 45^\circ$. Этот результат хорошо согласуется с экспериментальными данными.

Изучим теперь движение линии скольжения при монотонном увеличении коэффициента интенсивности K_{II} . Будем считать:

а) если коэффициент интенсивности напряжений K_{II} меньше некоторой постоянной материала K_{IIc} , то движения линии скольжения при монотонном увеличении K_{II} не происходит;

б) если коэффициент интенсивности напряжений K_{II} больше некоторой постоянной материала K_{IIc} , то по истечении времени τ от начала нагружения (при $K_{II} = 0$) начинается движение линии скольжения, причем время τ определяется следующим условием запаздывания:

$$(6.1) \quad \frac{1}{t_0} \int_0^{\tau} f\left(\frac{K_{II}}{K_{IIc}}\right) dt = 1$$

где t_0 — некоторое постоянное время, $f(x)$ — некоторая монотонно возрастающая функция, определяемая из опыта;

в) при движении линии скольжения коэффициент интенсивности напряжений K_{II} равен постоянной материала K_{IIc} .

Приведенная модель изображена в виде диаграммы $K_{II} - \Delta l$ на фиг. 4, где Δl — приращение длины линии скольжения.

Эта модель аналогична модели запаздывания текучести Кларка — Коттрелла — Работнова для обычных образцов с диаграммой $\sigma - \varepsilon$, если учесть аналогию $K_{II} \leftrightarrow \sigma$, $\Delta l \leftrightarrow \varepsilon$ (см. [16]).

Функцию $f(x)$ возьмем в следующем виде [13]:

$$(6.2) \quad f(x) = x^n$$

где n — некоторая постоянная, определяемая из опыта.

Согласно (5.3), (6.1) и (6.2), получаем

$$(6.3) \quad \frac{1}{t_*} \int_0^{\tau} \left(\frac{\sigma - 2\tau_s}{K_{IIc}}\right)^n dt = 1, \quad t_* = t_0 \left(\frac{V\pi l}{2V_2}\right)^{-n} [G^+(-1)]^n$$

Формула (6.3) с точностью до обозначений совпадает с соответствующей формулой в теории Ю. Н. Работнова [13], определяющей время возникновения пластических деформаций в стержне, растягиваемом напряжением σ .

Таким образом, данная структурная модель дает дополнительное обоснование феноменологической теории Работнова.

Определим время τ начала движения для следующих двух режимов увеличения нагрузки σ :

а) нагрузка мгновенно поднимается до величины σ , а затем остается неизменной с течением времени. В этом случае на основании (6.3) имеем

$$\tau = t_* \left(\frac{K_{IIc}}{\sigma - 2\tau_s}\right)^n \quad (\sigma \geq 2\tau_s)$$

б) нагрузка увеличивается с постоянной скоростью a , т. е. $\sigma = 2\tau_s + at$. В этом случае на основании (6.3) имеем

$$\tau = \left[\frac{t_* (n+1)}{a^n} K_{IIc}^n \right]^{1/(n+1)}$$

Таким образом, с увеличением нагрузки σ или скорости a время τ уменьшается, стремясь к нулю, а при $\sigma \rightarrow 2\tau_s$ или при $a \rightarrow 0$ время τ стремится к бесконечности.

Эти результаты достоверны, по крайней мере, качественно.

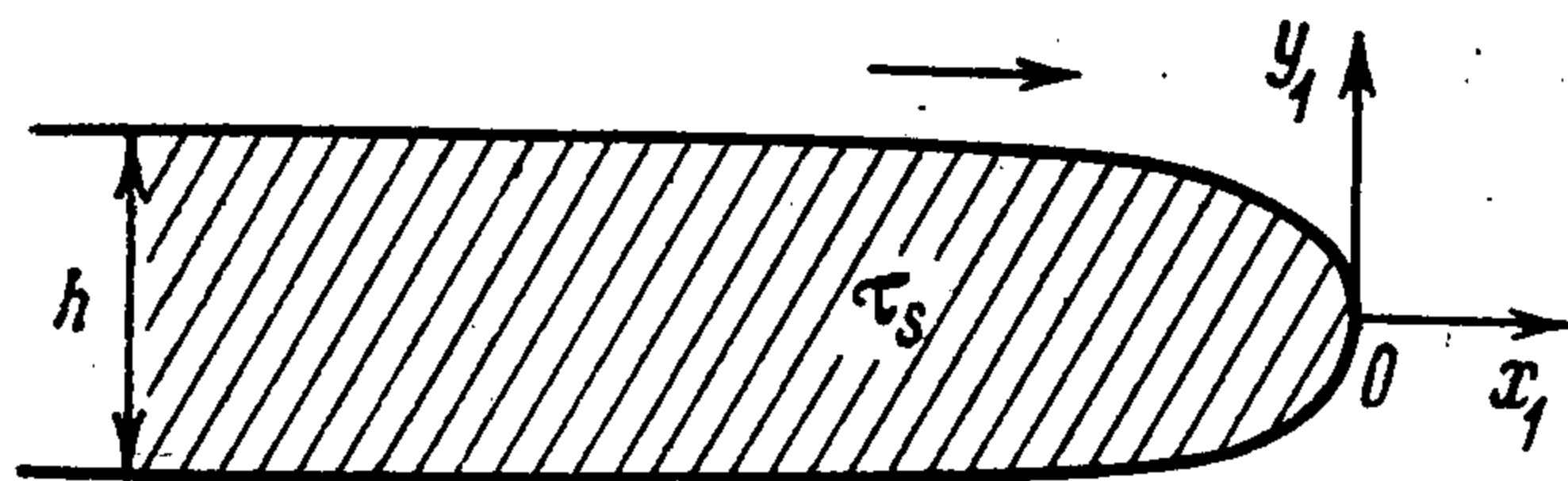
Длина линии скольжения в процессе ее движения определяется из условия $K_{II} = K_{IIc}$. Отсюда при помощи (5.3) находим

$$(6.4) \quad \sigma = 2\tau_s + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi l}} G^+ (-1) K_{IIc} \quad (\sigma \geq 2\tau_s)$$

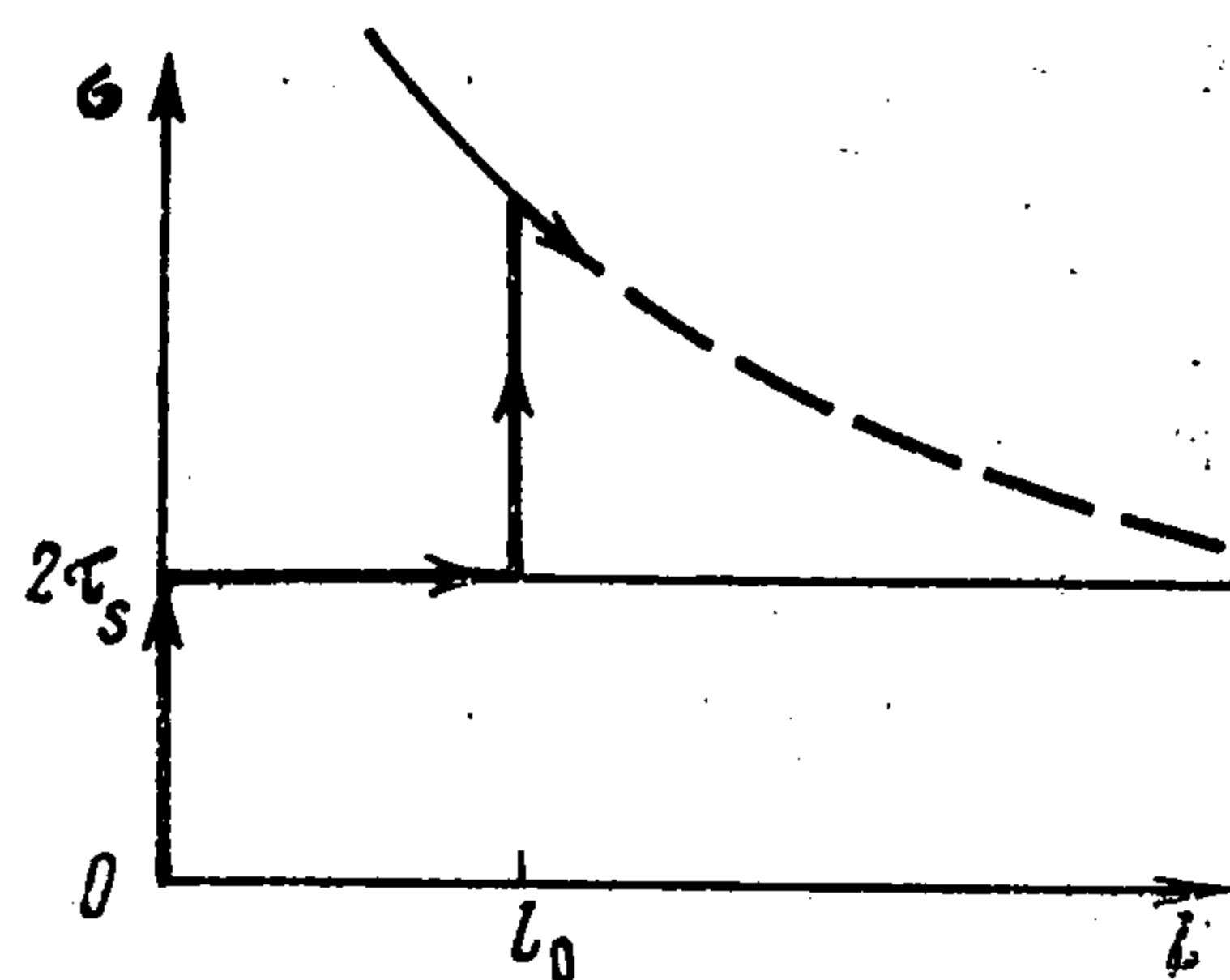
На фиг. 5 схематично изображена штриховой линией кривая (6.4) зависимости σ от l . Очевидно, она показывает, что развитие линии скольжения при $\sigma > 2\tau_s$ неустойчиво.

Этот результат также согласуется качественно с экспериментальными данными.

Оценим величину постоянной K_{IIc} , исходя из того, что она описывает стационарное развитие конца «пластического языка» вдоль его оси x_1 при бесконечно медленном



Фиг. 5



Фиг. 6

увеличению внешней нагрузки (см. фиг. 6, где изображена концевая зона языка, развившегося, например, из мелкой выточки). Ширину языка считаем постоянной и равной h ; величина h имеет порядок характерного линейного размера выточки. Из соображений анализа размерностей находим $K_{IIc} = \lambda\tau_s\sqrt{h}$ (h — некоторый безразмерный множитель).

Например, если $\tau_s = 10$ кг/мм² и $h = 10^{-4}$ см, то $K_{IIc} \approx 0.3$ кг/мм^{3/2}. Эта величина очень мала: соответствующая ей величина необратимой работы, расходуемой на продвижение конца языка на единицу длины вдоль оси x_1 , примерно в двадцать раз меньше поверхностной энергии стекла.

Аналогичная теория может быть развита для трещин нормального разрыва в углеродистых сталях.

Авторы благодарят В. Д. Ключникова за обсуждение работы.

Поступила 23 I 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Nadai A.* Theory of flow and fracture of solids. New York — Toronto — London, McGraw-Hill, 1950.
2. *Работнов Ю. Н., Станкевич О. Ф.* Экспериментальное выявление пластических зон на моделях из титанового сплава. Изв. АН СССР. Механика, 1965, № 2.
3. *Treffitz E.* Über die Spannungsverteilung in tordierten Stäben bei teilweiser Überschreitung der Fließgrenze. ZAMM, 1925, Bd 5, H 1, S. 64—73.
4. *Allen D. N. de G., Southwell R. V.* Relaxation methods applied to engineering problems. Philos. Trans. Roy. Soc. London A, 1950, vol. 242, p. 379—414.
5. *Черепанов Г. П.* Об одном методе решения упругопластической задачи. ПММ, 1963, т. 27, вып. 3.
6. *Reuss E.* Über Lüders — Hartmannische Linien. ZAMM, 1938, Bd 18, H 6, S. 347—357.
7. *Черепанов Г. П.* О проблеме неединственности в теории пластичности. Докл. АН СССР, 1974, т. 218, № 4.

8. *Mises R.* Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen. ZAMM, 1928, Bd 8, H 3, S. 161—185.
 9. *Dugdale D. S.* Yielding of steel sheets containing slits. J. Mech. and Phys. Solids, 1960, vol. 8, No. 2, p. 100—104.
 10. *Леонов М. Я.* Основы механики упругого тела, вып. 1. Фрунзе. Изд-во АН КиргССР, 1963.
 11. *Черепанов Г. П.* Равновесие откоса с тектонической трещиной. ПММ, 1976, т. 40, вып. 1.
 12. *Cottrel A. H.* Effect of solute atoms on the behaviour of dislocations. Rept Conf. strength of solids, Bristol, 1947. London, The Phys. Soc., 1948, p. 30—38.
 13. *Работнов Ю. Н.* Модель упругопластической среды с запаздыванием текучести. ПМТФ, 1968, № 3.
 14. *Кулиев В. Д., Работнов Ю. Н., Черепанов Г. П.* О торможении трещины на границе раздела различных упругих сред. Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 4.
 15. *Черепанов Г. П., Кулиев В. Д.* Теория устойчивости скальных откосов с тектоническими трещинами. В сб.: Теоретична и приложна механика, кн. 1. София, Изд-во на Българска Академия на Науките, 1977.
 16. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. М., «Наука», 1974.
-