

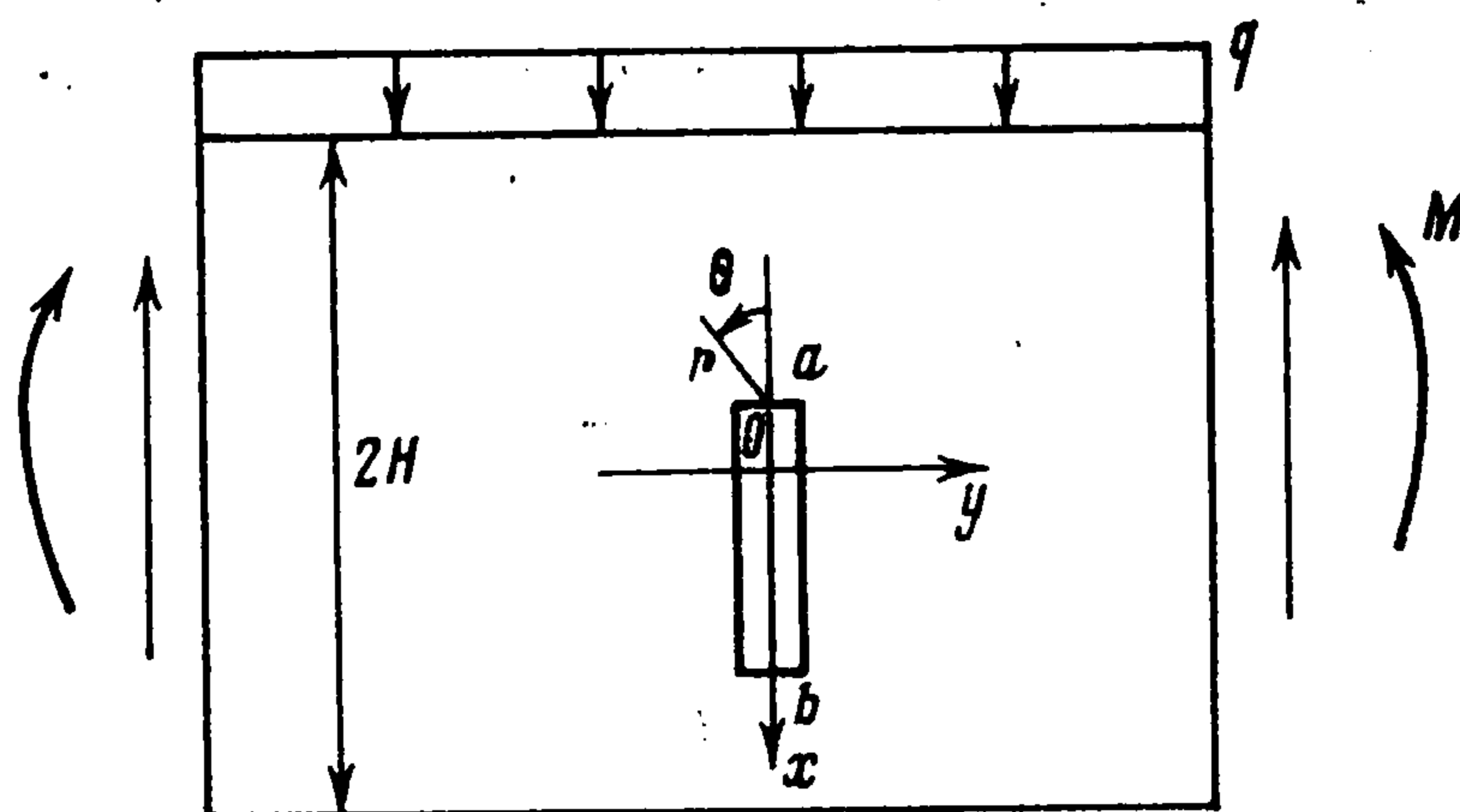
НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПОЛОСЫ (БАЛКИ) С ПРЯМОЛИНЕЙНЫМ ТОНКОСТЕННЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

М. С. Драган, В. К. Опанасович

(Львов)

Изучается влияние прямолинейного тонкостенного изотропного включения конечной длины на напряженное состояние полосы (балки). Получена система двух сингулярных интегро-дифференциальных уравнений типа Прандтля, решение которой пригодно для включения любой жесткости: от абсолютно жесткого или гибкого, но нерастяжимого, до абсолютно податливого (разреза). Таким образом, установлена связь между теорией трещин и теорией тонкостенных упругих включений. Приводятся формулы распределения напряжений в окрестности конца тонкостенного включения.

1. Рассмотрим изотропную упругую полосу (балку), ослабленную тонкостенным упругим включением, направленным перпендикулярно боковым граням полосы (фиг. 1). Обозначим через $2H$ и $2t$ соответственно ширину и толщину полосы, а через $2l$ и $2h$ — длину и ширину включения. Введем прямоугольную систему декартовых координат и примем, что в плоскости xoy включение расположено вдоль оси ox при $a \leq x \leq b$ и $-h \leq y \leq h$. Пусть на такую полосу действуют внешние нагрузки, рас-



Фиг. 1

положенные в срединной плоскости полосы, грани полосы, параллельные плоскости xoy , приняты свободными от внешних напряжений.

Величины, которые характеризуют тонкостенное включение, будем обозначать нулевым индексом. Индексами плюс и минус будем обозначать граничные значения функций соответственно при $y \rightarrow +0$ и $y \rightarrow -0$. Сегмент действительной оси $[a, b]$ обозначим через L .

На берегах включения имеют место следующие граничные условия:

$$(1.1) \quad (\sigma_y - i\tau_{xy})_0^\pm = (\sigma_y - i\tau_{xy})^\pm, \quad (u + iv)_0^\pm = (u + iv)^\pm$$

Следуя [1], будем рассматривать полосу как неограниченную пластинку, тогда компоненты σ_x , σ_y , τ_{xy} тензора напряжений и компоненты u и v вектора смещений в условиях плоской задачи теории упругости выражаются через две аналитические функции $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$ по следующим формулам:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 2 [\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}] \\ \sigma_y - i\tau_{xy} &= \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z}) \overline{\Phi'(z)} \\ 2\mu(u' + iv') &= \kappa\Phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z}) \overline{\Phi'(z)}. \end{aligned}$$

Для сформулированной задачи рассмотрим вначале две вспомогательные функции следующего вида:

$$(1.3) \quad \Phi_0(z) = A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \dots + A_n, \quad \Omega_0(z) = B_0 z^n + B_1 z^{n-1} + \dots + B_n$$

которые, в зависимости от значений коэффициентов A_j и B_j ($j = 0, 1, \dots, \dots, n$), определяют напряженное состояние в полосе без включения.

Для тонкостенного включения, пренебрегая величинами высших порядков малости по сравнению с hR , на основании (1.2) имеем

$$(1.4) \quad \begin{aligned} (\sigma_y - i\tau_{xy})_0^+ + (\sigma_y - i\tau_{xy})_0^- &= \\ &= \frac{2}{(1 + \kappa_0)} [(1 - \kappa_0)K(x) + 2M(x) + 2\overline{K(x)} + 2\overline{M(x)}], \quad x \in L \\ (\sigma_y - i\tau_{xy})_0^+ - (\sigma_y - i\tau_{xy})_0^- &= 2ihK'(x), \quad x \in L \\ (u' + iv')_0^+ - (u' + iv')_0^- &= \frac{ih}{\mu_0} M'(x), \quad x \in L \\ (u' + iv')_0^+ + (u' + iv')_0^- &= \\ &= \frac{1}{\mu_0(1 + \kappa_0)} [2\kappa_0 K(x) + (\kappa_0 - 1)M(x) - 2\overline{K(x)} - 2\overline{M(x)}], \quad x \in L \end{aligned}$$

где $K(x)$ и $M(x)$ — неизвестные функции, подлежащие определению.

Исходя из (1.2), граничные условия на берегах включения запишем в виде

$$(1.5) \quad \begin{aligned} (\sigma_y - i\tau_{xy})^+ + (\sigma_y - i\tau_{xy})^- &= [\Phi(x) + \Omega(x)]^+ + \\ &+ [\Phi(x) + \Omega(x)]^-, \quad x \in L \\ (\sigma_y - i\tau_{xy})^+ - (\sigma_y - i\tau_{xy})^- &= [\Phi(x) - \Omega(x)]^+ - [\Phi(x) - \\ &- \Omega(x)]^- + 2K_1(x), \quad x \in L \\ (u' + iv')^+ + (u' + iv')^- &= \frac{1}{2\mu} \{ \kappa[\Phi^+(x) + \Phi^-(x)] - [\Omega^+(x) + \Omega^-(x)] \} \\ &x \in L \\ (u' + iv')^+ - (u' + iv')^- &= \\ &= \frac{1}{2\mu} \{ \kappa[\Phi^+(x) - \Phi^-(x)] + [\Omega^+(x) - \Omega^-(x)] + 2M_1(x) \}, \quad x \in L \end{aligned}$$

$$(1.6) \quad \begin{aligned} K_1(x) &= ih [\Phi_0'(x) - \Omega_0'(x) + 2\overline{\Phi_0'(x)}] \frac{\min(\mu_0, \mu)}{\mu} \\ M_1(x) &= ih [\kappa\Phi_0'(x) + \Omega_0'(x) - 2\overline{\Phi_0'(x)}] \frac{\min(\mu_0, \mu)}{\mu_0} \end{aligned}$$

Используя зависимости (1.1), из соотношений (1.4) и (1.5) получим следующие краевые задачи для определения кусочно-голоморфных функций $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$ с линией скачков L :

$$(1.7) \quad [\Phi(x) - \Omega(x)]^+ - [\Phi(x) - \Omega(x)]^- = 2ihK'(x) - 2K_1(x), \quad x \in L$$

$$(1.8) \quad \begin{aligned} & [\kappa\Phi(x) + \Omega(x)]^+ - [\kappa\Phi(x) + \Omega(x)]^- = \frac{2\mu}{\mu_0}ihM'(x) - 2M_1(x), \quad x \in L \\ & [\Phi(x) + \Omega(x)]^+ + [\Phi(x) + \Omega(x)]^- = \\ & = \frac{2}{(1+\kappa_0)} [(1-\kappa_0)K(x) + 2M(x) + 2\overline{K(x)} + 2\overline{M(x)}], \quad x \in L \\ & \kappa[\Phi^+(x) + \Phi^-(x)] - [\Omega^+(x) + \Omega^-(x)] = \\ & = \frac{2\mu}{\mu_0(1+\kappa_0)} [2\kappa_0K(x) + (\kappa_0 - 1)M(x) - 2\overline{K(x)} - 2\overline{M(x)}], \quad x \in L \end{aligned}$$

Решая задачи линейного сопряжения (1.7), находим

$$(1.9) \quad \begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{h}{\pi(1+\kappa)} \left[I_k(z) + \frac{\mu}{\mu_0} I_m(z) \right] + \Phi_0(z) \\ \Omega(z) &= \frac{h}{\pi(1+\kappa)} \left[-\kappa I_k(z) + \frac{\mu}{\mu_0} I_m(z) \right] + \Omega_0(z) \\ I_k(z) &= \int_a^b \frac{[K'(t) - K_2(t)] dt}{t-z}, \quad I_m(z) = \int_a^b \frac{[M'(t) - M_2(t)] dt}{t-z} \\ K_2(x) &= \frac{1}{ih} K_1(x), \quad M_2(x) = \frac{\mu_0}{ih\mu} M_1(x) \end{aligned}$$

Используя выражения (1.9) и (1.8), получим следующую систему сингулярных интегро-дифференциальных уравнений типа Прандтля для определения неизвестных функций $K(x)$ и $M(x)$:

$$(1.10) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{(1+\kappa_0)} [(1-\kappa_0)K(x) + 2M(x) + 2\overline{K(x)} + 2\overline{M(x)}] - \\ & - \frac{h(1-\kappa)}{\pi(1+\kappa)} I_k(x) - \frac{2h\mu}{\pi\mu_0(1+\kappa)} I_m(x) = \Phi_0(x) + \Omega_0(x), \quad x \in L \\ & \frac{\mu}{\mu_0(1+\kappa_0)} [2\kappa_0K(x) + (\kappa_0 - 1)M(x) - 2\overline{K(x)} - 2\overline{M(x)}] - \\ & - \frac{2h\kappa}{\pi(1+\kappa)} I_k(x) - \frac{h\mu(\kappa - 1)}{\pi\mu_0(1+\kappa)} I_m(x) = \kappa\Phi_0(x) - \Omega_0(x), \quad x \in L \end{aligned}$$

2. Решение системы (1.10), следуя работе [2], будем искать в виде

$$(2.1) \quad \begin{aligned} K(x_1) &= K_0 + K_3(x_1) - \sqrt{1-x^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} X_m U_{m-1}(x) \\ M(x_1) &= M_0 + M_3(x_1) - \sqrt{1-x^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} Y_m U_{m-1}(x), \quad |x| \leq 1 \end{aligned}$$

$$(2.2) \quad \begin{aligned} x_1 &= \frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2} \\ K_3(x) &= [\Phi_0(x) - \Omega_0(x) + 2\overline{\Phi_0(x)} - A_n + B_n - 2\overline{A_n}] \frac{\min(\mu_0, \mu)}{\mu} \\ M_3(x) &= [\kappa\Phi_0(x) + \Omega_0(x) - 2\overline{\Phi_0(x)} - \kappa A_n - B_n + 2\overline{A_n}] \frac{\min(\mu_0, \mu)}{\mu} \end{aligned}$$

Здесь K_0, M_0, X_m, Y_m — неизвестные коэффициенты, $T_m(x)$ и $U_m(x)$ — полиномы Чебышева соответственно первого и второго рода.

Подставляя (2.1) в (1.9), найдем выражения для функций $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$

$$(2.3) \quad \Phi(z) = - \frac{2h}{(b-a)(1+\kappa)} \sum_{m=1}^{\infty} \left(X_m + \frac{\mu}{\mu_0} Y_m \right) \left[\left(\frac{b-a}{2} \right) \frac{T_m(z_1)}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} - U_{m-1}(z_1) \right] + \Phi_0(z)$$

$$\Omega(z) = \frac{2h}{(b-a)(1+\kappa)} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\kappa X_m - \frac{\mu}{\mu_0} Y_m \right) \left[\left(\frac{b-a}{2} \right) \frac{T_m(z_1)}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} - U_{m-1}(z_1) \right] + \Omega_0(z)$$

$$z = \frac{b-a}{2} z_1 + \frac{a+b}{2}$$

Исходя из соотношений (1.10), (2.1) и следуя работе [2], приходим к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов разложения X_m и Y_m

$$(2.4) \quad \frac{1}{(1+\kappa_0)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} H(m, n) [(1-\kappa_0) X_m + 2Y_m + 2\bar{X}_m + 2\bar{Y}_m] + C_1 X_n + C_2 Y_n = D_n$$

$$\frac{\mu}{\mu_0(1+\kappa_0)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} H(m, n) [2\kappa_0 X_m + (\kappa_0 - 1) Y_m - 2\bar{X}_m - 2\bar{Y}_m] + C_3 X_n + C_4 Y_n = P_n$$

$$(2.5) \quad H(m, n) = \begin{cases} 0, & \text{если } m+n \text{ — нечетное число} \\ \frac{1}{(m+n+1)(m+n-1)} - \frac{1}{(m-n-1)(m-n+1)} & \text{если } m+n \text{ — четное число} \end{cases}$$

$$C_1 = \frac{\pi h (1-\kappa)}{(b-a)(1+\kappa)}, \quad C_2 = \frac{2\pi h \mu}{(b-a)(1+\kappa)\mu_0}$$

$$C_3 = \frac{2\pi h \kappa}{(b-a)(1+\kappa)}, \quad C_4 = \frac{\pi h \mu (\kappa - 1)}{(b-a)\mu_0(1+\kappa)}$$

$$D_0 = \frac{1}{(1+\kappa_0)} [(1-\kappa_0) K_0 + 2M_0 + 2\bar{K}_0 + 2\bar{M}_0]$$

$$P_0 = \frac{\mu}{\mu_0(1+\kappa_0)} [2\kappa_0 K_0 + (\kappa_0 - 1) M_0 - 2\bar{K}_0 - 2\bar{M}_0]$$

$$D_n = \int_{-1}^1 \left\{ -\Phi_0(x_1) - \Omega_0(x_1) + \frac{1}{(1+\kappa_0)} [(1-\kappa_0) K_3(x_1) + 2M_3(x_1) + 2\bar{K}_3(x_1) + 2\bar{M}_3(x_1)] + D_0 \right\} \sqrt{1-x^2} U_{n-1}(x) dx$$

$$P_n = \int_{-1}^1 \left\{ \Omega_0(x_1) - \kappa \Phi_0(x_1) + \frac{\mu}{\mu_0(1+\kappa_0)} [2\kappa_0 K_3(x_1) + (\kappa_0 - 1) M_3(x_1) - 2\bar{K}_3(x_1) - 2\bar{M}_3(x_1)] + P_0 \right\} \sqrt{1-x^2} U_{n-1}(x) dx$$

Для постоянных D_0 и $\operatorname{Re} P_0$ примем следующие значения:

$$(2.6) \quad D_0 = (A_n + B_n) \frac{\min(\mu_0, \mu)}{\mu}, \quad \operatorname{Re} P_0 = \operatorname{Re} (\kappa A_n - B_n) \frac{\min(\mu_0, \mu)}{\mu_0}$$

а постоянную $\operatorname{Im} P_0$ найдем из условия (Λ — область включения) [3]

$$(2.7) \quad \operatorname{Re} \int_{\Lambda} z [\bar{\Omega}(z) + \Phi(z)] dz = 0$$

Учитывая формулы (2.3), после преобразований из соотношения (2.7) получим

$$(2.8) \quad \operatorname{Im} X_1 = 0$$

Используя результаты работ [2,4], можно показать, что система линейных алгебраических уравнений (2.4) будет квазирегулярной.

Поступая таким же образом, как это сделано в [5], напряженное состояние в окрестности конца включения в полярной системе координат r, θ (фиг. 1) можно представить в виде

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \begin{vmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \tau_{r\theta} \end{vmatrix} &= \frac{K_1}{4\sqrt{2r}} \begin{vmatrix} 5\cos^{1/2}\theta - \cos^{3/2}\theta \\ 3\cos^{1/2}\theta + \cos^{3/2}\theta \\ \sin^{1/2}\theta + \sin^{3/2}\theta \end{vmatrix} + \\ &+ \frac{K_2}{4\sqrt{2r}} \begin{vmatrix} -5\sin^{1/2}\theta + 3\sin^{3/2}\theta \\ -3\sin^{1/2}\theta - 3\sin^{3/2}\theta \\ \cos^{1/2}\theta + 3\cos^{3/2}\theta \end{vmatrix} + \\ &+ \frac{K_3}{4\sqrt{2r}} \begin{vmatrix} 5\cos^{1/2}\theta + (1+2\kappa)\cos^{3/2}\theta \\ 3\cos^{1/2}\theta - (1+2\kappa)\cos^{3/2}\theta \\ \sin^{1/2}\theta - (1+2\kappa)\sin^{3/2}\theta \end{vmatrix} + \\ &+ \frac{K_4}{4\sqrt{2r}} \begin{vmatrix} -5\sin^{1/2}\theta + (1-2\kappa)\sin^{3/2}\theta \\ -3\sin^{1/2}\theta - (1-2\kappa)\sin^{3/2}\theta \\ \cos^{1/2}\theta + (1-2\kappa)\cos^{3/2}\theta \end{vmatrix} + O(r^0) \end{aligned}$$

Здесь K_i ($i = 1, 2, 3, 4$) — коэффициенты интенсивности напряжений, которые определяются формулами

$$(2.10) \quad \begin{aligned} K_1^j - iK_2^j &= -\frac{2h\mu}{\mu_0(1+\kappa)} \left(\frac{b-a}{2}\right)^{-1/2} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{(m+1)(2-j)} Y_m \\ K_3^j - iK_4^j &= -\frac{2h}{(1+\kappa)} \left(\frac{b-a}{2}\right)^{-1/2} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{(m+1)(2-j)} X_m \end{aligned}$$

($j = 1$ для конца a и $j = 2$ для конца b).

Сделав в формулах (1.10) или (2.4) предельный переход соответственно при $\mu_0 \rightarrow \infty$, $\mu_0 \rightarrow 0$, $\mu_0 \rightarrow \mu$ и учитывая (1.9), (2.3), (2.6) и (2.8), получим решения следующих задач: для абсолютно жесткого включения, податливого включения (разреза) и однородной полосы (балки).

3. Был проведен численный анализ задачи для следующих случаев: 1) чистый изгиб балки моментами M , 2) деформация балки под действием равномерно распределенного по ее длине давления интенсивности q .

Согласно [1], коэффициенты A_i, B_i имеют следующий вид:

$$A_2 = M / (4I), \quad B_2 = 3M / (4I), \quad A_i = B_i = 0 \quad (i = 0, 1, 3, 4, \dots, n)$$

в первом случае и

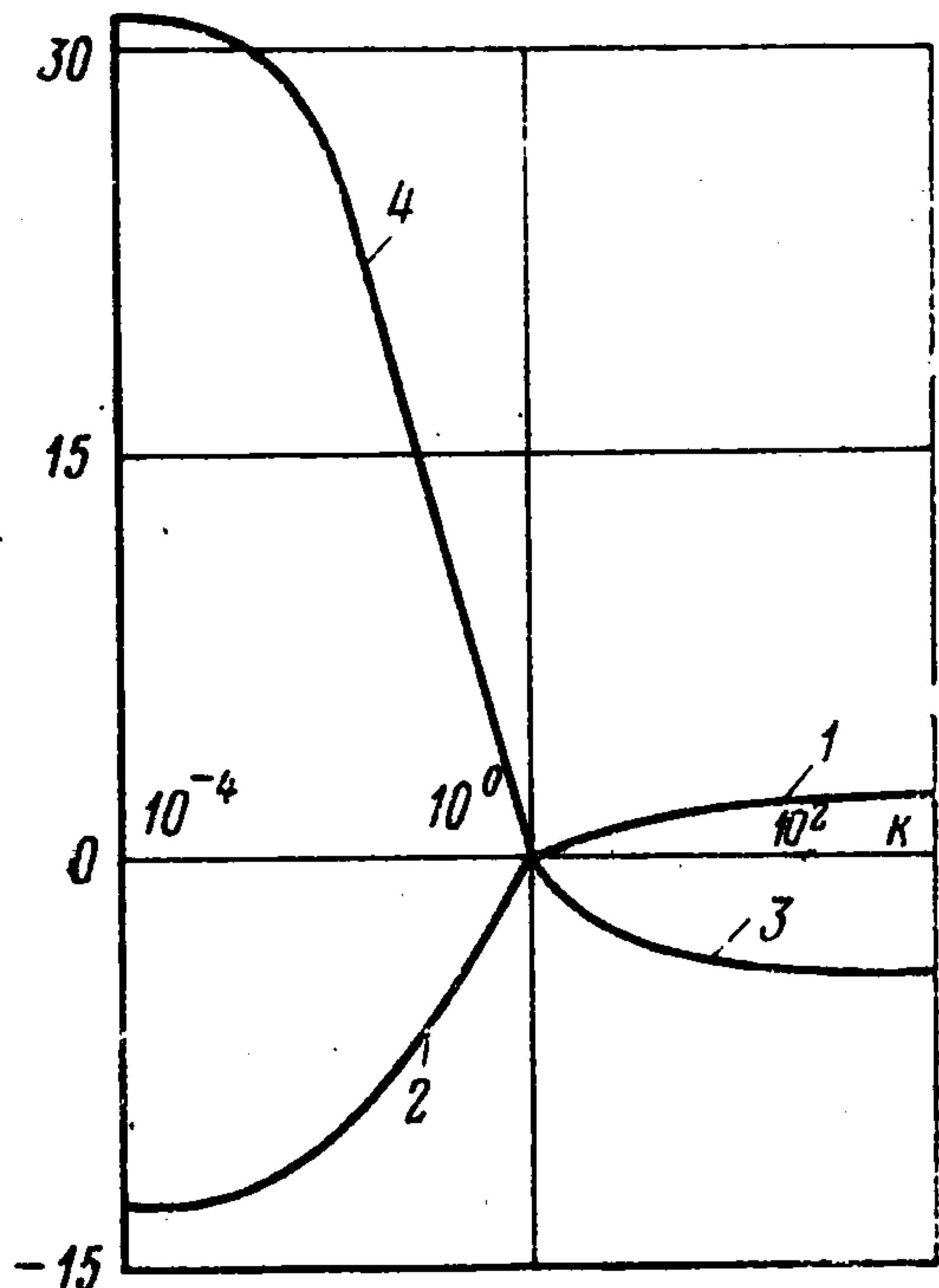
$$A_0 = q / (24I), \quad A_2 = q(w^2 - 3H^2 / 5) / (8I), \quad A_3 = -qH^3 / (12I)$$

$$B_0 = 7q / (24I), \quad B_2 = q(3w^2 - 11H^2 / 5) / (8I), \quad B_3 = qH^3 / (12I)$$

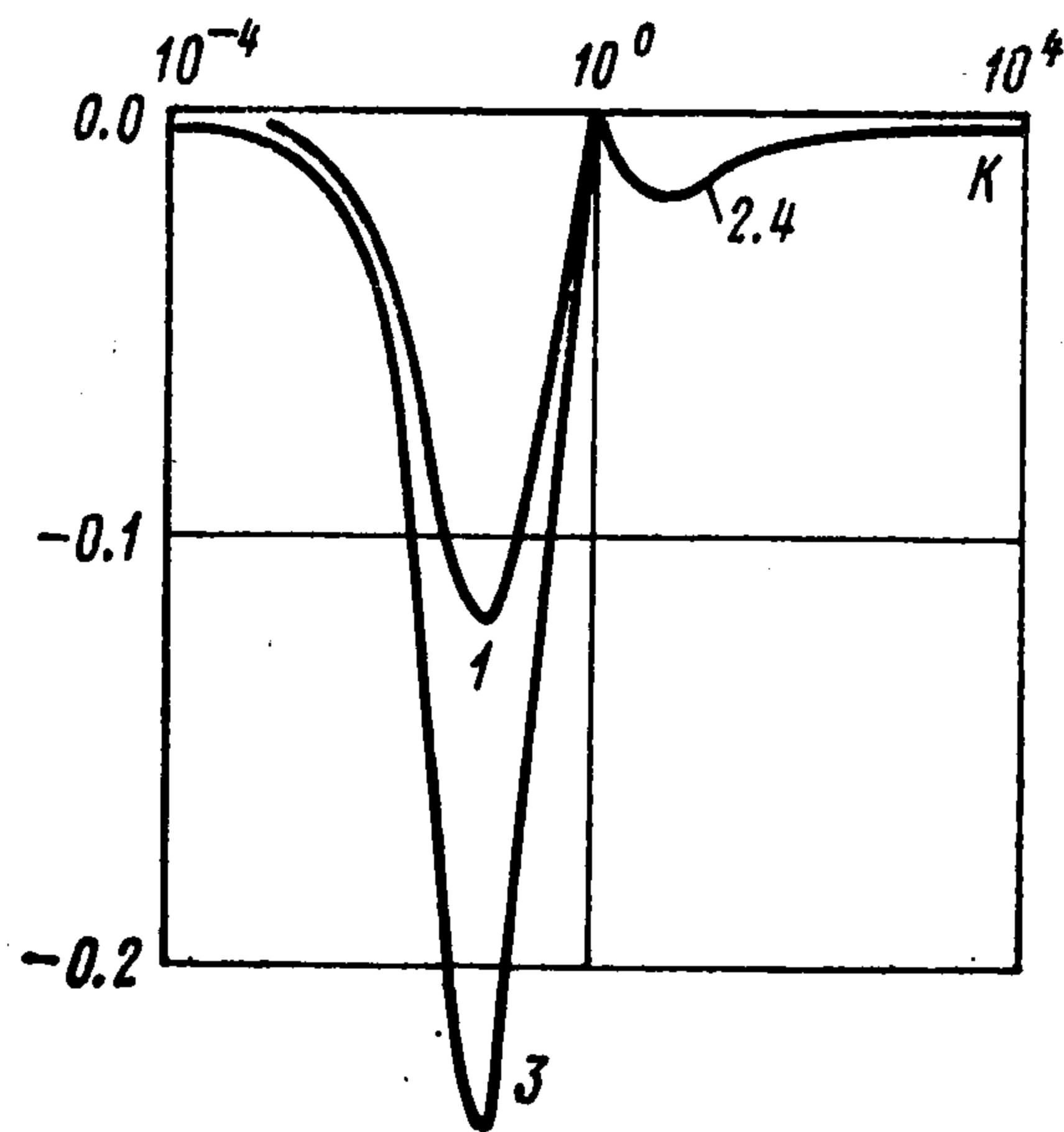
$$A_i = B_i = 0 \quad (i = 1, 4, 5, \dots, n), \dots,$$

во втором случае, где $I = 4\tau H^3 / 3$, $2w$ — длина балки.

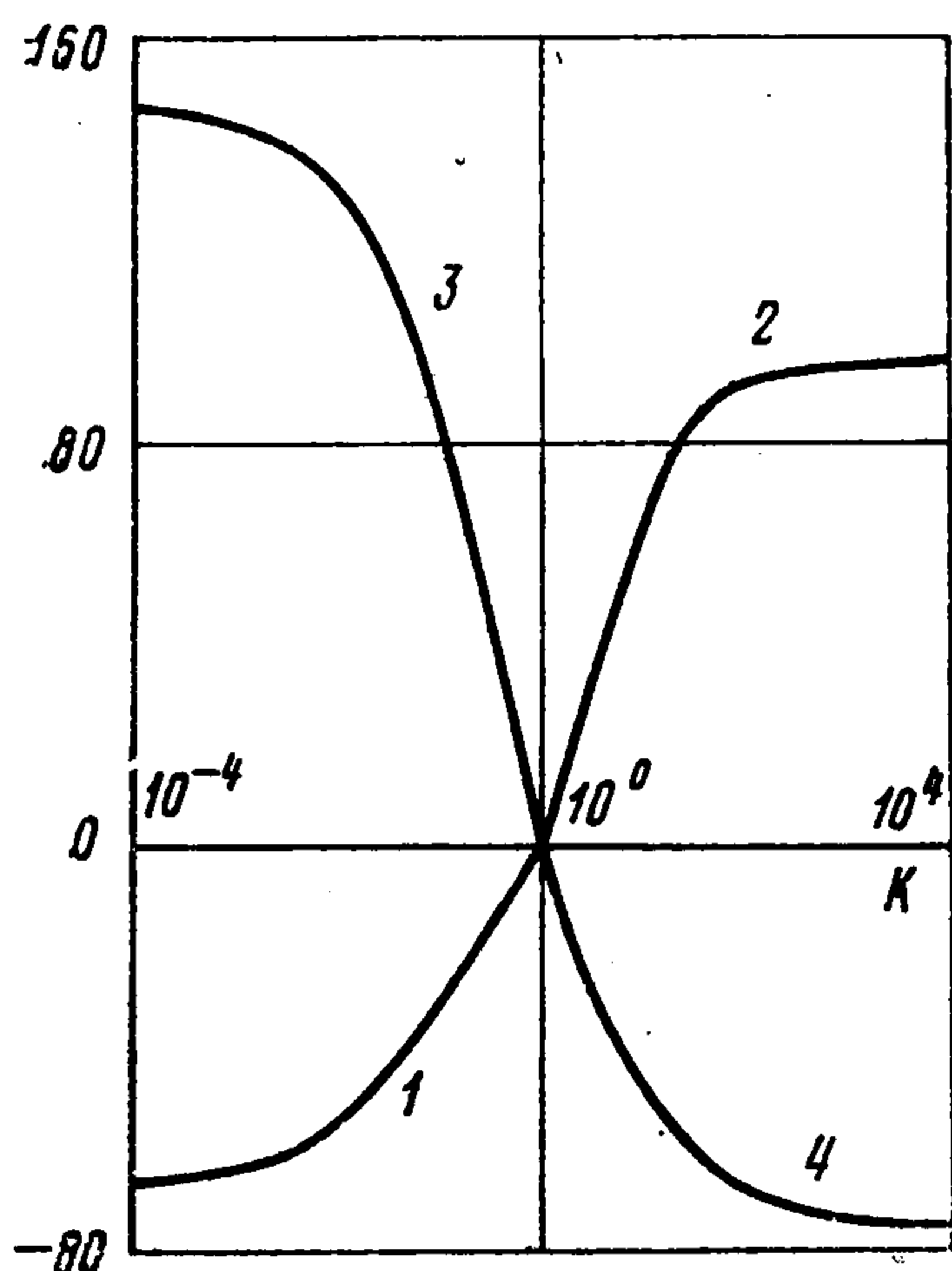
На фиг. 2, 3 представлена зависимость коэффициентов интенсивности напряжений $K_i' = \sqrt{2}IK_i / (3Ma^{3/2})$ ($i = 1, 2, 3, 4$) от относительной жесткости включения и по-



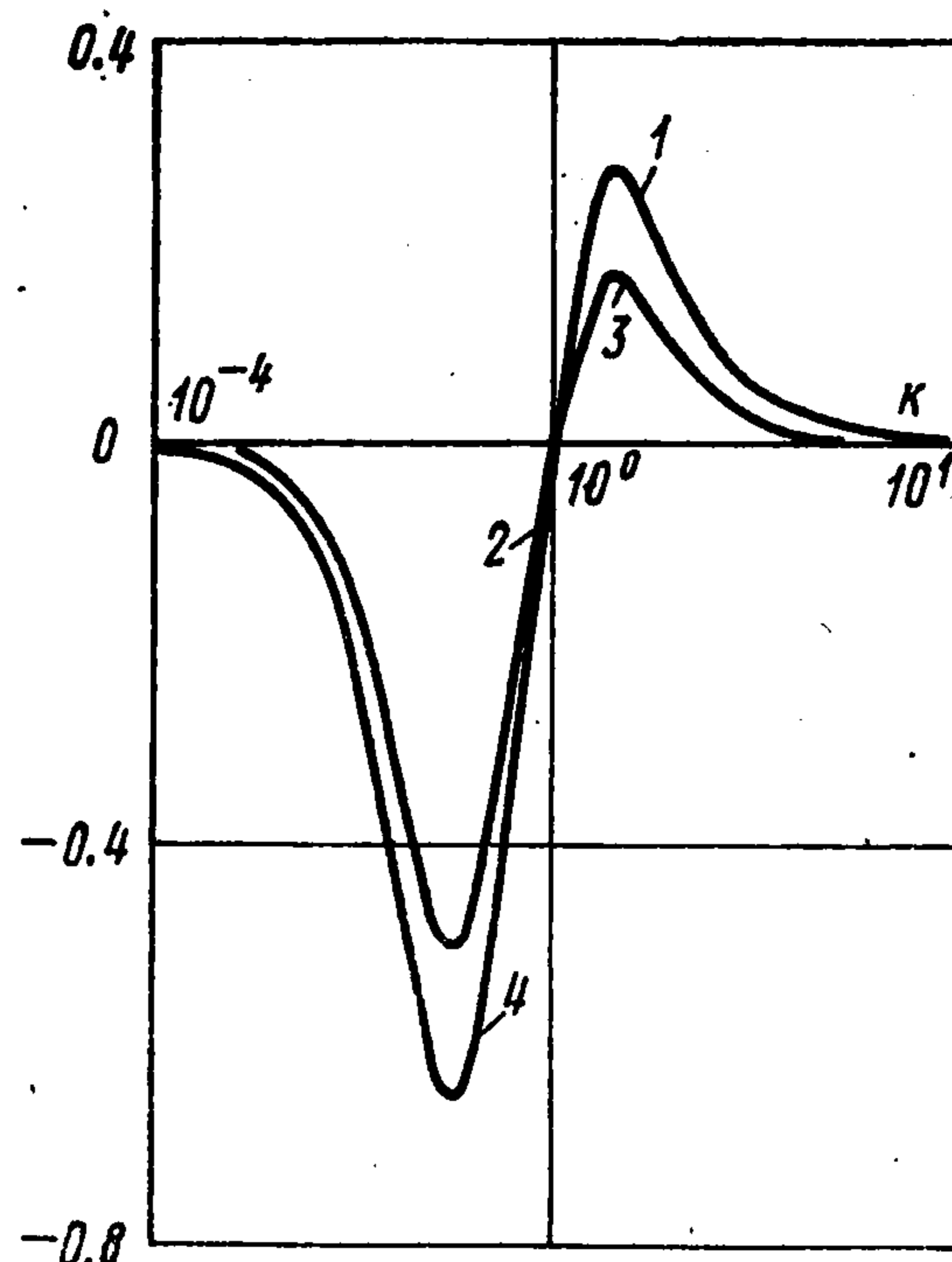
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

лосы $k = \mu_0 / \mu$. Та же зависимость, но только величин $K_i' = IK_i / (\sqrt{2}qa^{3/2})$, дана на фиг. 4, 5. Кривые 1, 2 характеризуют соответственно коэффициенты интенсивности напряжений ($-K_1'$) и ($-K_3'$) в точке a , а кривые 3, 4 — K_1' и K_3' в точке b . Отметим, что кривые на фиг. 3, 5 являются продолжением соответствующих кривых фиг. 2, 4. Для рассматриваемых примеров $K_2' = K_4' = 0$. В первом случае вычисления про-

дились при следующем значении параметров задачи: $h/a = 0.45$, $b/a = 10$, во втором — при $h/a = 0.2$, $b/a = 5$, $H/a = 10$, $w/a = 10$. Для обоих случаев считалось, что коэффициенты Пуассона равны $\nu = \nu_0 = 1/3$.

Поступила 8 VI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Панасюк В. В.* Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. Киев. «Наукова думка», 1963.
2. *Морарь Г. А., Попов Г. Я.* К контактной задаче для полуплоскости с упругим конечным креплением. ПММ, 1970, т. 34, вып. 3.
3. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
4. *Сулим Г. Т.* Регулярність деяких систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Вісн. Львівськ. ун-ту. Сер. механ., матем., 1975, вип. 10.
5. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацкишин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев, «Наукова думка», 1976.