Прикладная математика и механика. Том 43, 1979

УДК 624.07:534.1

ВЫСОКОЧАСТОТНЫЕ ДЛИННОВОЛНОВЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ

С. С. Квашнина

(Москва)

В теории стержней, так же как и в теориях пластин и оболочек, переход от трехмерных уравнений теории упругости к приближенным одномерным возможен, если в продольном направлении перемещения меняются гораздо медленнее, чем в поперечном, т. е. в случае длинноволновых в продольном направлении колебаний. В динамике в случае низких частот это условие приводит к гипотезе плоских сечений. Для высоких частот гипотеза плоских сечений, вообще говоря, неверна — перемещения могут быть быстро осциллирующими функциями поперечных координат. Классические уравнения теории стержней, основанные на гипотезе плоских сечений, описывают низкочастотные колебания. Ниже с помощью вариационно-асимптотического метода найдены распределения перемещений по сечению кругового цилиндра и выведены одномерные уравнения в случае свободных высокочастотных длинноволновых колебаний стержней. Эти же распределения были получены в работе [1] путем асимптотического интегрирования трехмерных уравнений, однако одномерные уравнения высокочастотных колебаний в [1] не строились.

Ранее вариационно-асимптотическим методом были выведены уравнения первого приближения в геометрически нелинейной теории анизотропных неоднородных стержней [2], уточненные уравнения изгибных колебаний стержней [3] и уравнения свободных высокочастотных колебаний пластин [4].

1. Рассмотрим свободные колебания прямолинейного упругого стержня длины $2l$ постоянного поперечного сечения Ω. Выберем оси декартовой системы координат x, x^α (греческие индексы пробегают значения 1, 2) так, чтобы ось стержня в недеформированном состоянии совпадала с осью x, а оси x^α лежали в плоскости поперечного сечения. Центр тяжести совместим с началом координат. Обозначим через w, w_α проекции вектора перемещений на оси x, x^α, через $2h$ — диаметр поперечного сечения стержня ($h \ll l$). Будем считать, что концы стержня жестко заделаны

$$w = w_\alpha = 0, \qquad x = \pm l. \tag{1.1}$$

Уравнения свободных колебаний стержня суть экстремали функционала Лагранжа [5]

$$I = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \Lambda\, dV, \quad \Lambda = U - \frac{1}{2}\rho\,(w_{,t}^2 + w_{\alpha,t} w^\alpha_{,t}) \tag{1.2}$$

$$2U = \lambda\,(w_{,\alpha}^\alpha)^2 + 2\lambda w_{,\alpha}^\alpha\, w_{,x} + (\lambda + 2\mu)\, w_{,x}^2 + 2\mu w_{(\alpha,\beta)}\, w^{(\alpha,\beta)} + \mu\,(w_{,\alpha} + w_{\alpha,x})(w^{,\alpha} + w_{,x}^\alpha)$$

Здесь V — объем, занятый стержнем, ρ — плотность, U — упругая энергия, λ, μ — параметры Ламе. Запятой в индексах обозначается дифференцирование, круглыми скобками — операция симметрирования.

2. Уравнения для высокочастотных колебаний получим вариационно-асимптотическим методом [2].

Оставим в функционале (1.2) асимптотически главные по h члены

$$I = \Omega \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-l}^{l} \bar{\Lambda}\, dx \tag{2.1}$$

$$2\bar{\Lambda} = \langle \lambda (w_{,\alpha}{}^{\alpha})^2 + 2\mu w_{(\alpha,\beta)} w^{(\alpha,\beta)} + \mu w_{,\alpha} w^{,\alpha} - \rho\,(w_{,t}{}^2 + w_{\alpha,t} w_{,t}{}^{\alpha})\rangle$$

$$\langle A\rangle = \frac{1}{\Omega}\int_{\Omega} A\, d\Omega$$

Экстремали функционала (2.1) совпадут с экстремалями функционала

$$\int_{t_1}^{t_2} \bar{\Lambda} dt$$

Варьируя последний, получим уравнения

$$\lambda \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} w_{,\gamma}^{\ \gamma} + 2\mu \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} w_{(\alpha,\,\beta)} - \rho w_{\alpha,\,tt} = 0 \tag{2.2}$$

$$\lambda w_{,\gamma}{}^{\gamma} \nu_{\alpha} + 2\mu w_{(\alpha,\beta)} \nu^{\beta} = 0 \quad \text{на } \Gamma$$

$$\mu \Delta w - \rho w_{,tt} = 0, \quad \partial w / \partial \nu = 0 \quad \text{на } \Gamma$$

Здесь Γ — контур поперечного сечения, ν^{α} — компоненты внешней нормали ν к контуру Γ, Δ — оператор Лапласа по переменным x^{α}.

Уравнения (2.2) определяют две серии колебаний, $F_{\perp}$ и $F_{\parallel}$ (знак $\perp$ ставится, если поперечное перемещение w_{α} гораздо больше продольного w, знак $\parallel$ — в противоположном случае).

Предположим, что w, w_{α} зависят от времени по гармоническому закону

$$w = w^{\circ} e^{i\omega t}, \quad w_{\alpha} = w_{\alpha}{}^{\circ} e^{i\omega t}$$

В дальнейшем верхний индекс у w° и $w_{\alpha}{}^{\circ}$ будем опускать. Решения уравнений (2.2) имеют вид

$$F_{\perp}:\ w = 0, \quad w_{\alpha} = u f_{\alpha}(x^{\gamma}, \omega_{\perp}) \tag{2.3}$$

$$F_{\parallel}:\ w = \psi G(x^{\gamma}, \omega_{\parallel}), \quad w_{\alpha} = 0$$

Для круглого стержня радиуса h выражения для f_{α} и G удобно записать в полярных координатах r, θ в плоскости поперечного сечения стержня

$$f_{\alpha} = h\left(f_r(r, \theta)\frac{x_{\alpha}}{r} + f_{\theta}(r, \theta)\frac{E_{\alpha\beta}x^{\beta}}{r}\right) \tag{2.4}$$

$$f_r(r, \theta) = \left[A J_n'(\alpha r) + \frac{n}{r} J_n(\beta r)\right]\cos n\theta$$

$$f_{\theta}(r, \theta) = -\left[A \frac{n}{r} J_n(\alpha r) + J_n'(\beta r)\right]\sin n\theta$$

$$A = \frac{2n\,(hJ_n'(\beta h) - J_n(\beta h))}{2hJ_n'(\alpha h) + (h^2\beta^2 - 2n^2)\, J_n(\alpha h)} \tag{2.5}$$

$$G = J_n(\beta r)\cos n\theta, \quad \alpha = \frac{\omega}{c_1}, \quad \beta = \frac{\omega}{c_2}, \quad c_1 = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

Здесь n — целое число, J_n — функции Бесселя первого рода порядка n (штрих означает производную по r), $E_{\alpha\beta}$ — тензор Леви-Чивита.

Таким образом, $f_\alpha \sim 1$, $G \sim 1$.

Величины u, ψ — функции x, гармонические по времени с частотой ω, которая в каждой серии определяется из соответствующего дисперсионного уравнения

$$
\begin{aligned}
(2.6)\qquad & F_\perp: \quad [2hJ_n'(\alpha h) + (\beta^2h^2 - 2n^2)\, J_n(\alpha h)][2hJ_n'(\beta h) + \\
& + (\beta^2h^2 - 2n^2)\, J_n(\beta h)] = \\
& = 4n^2\,[hJ_n'(\alpha h) - J_n(\alpha h)][hJ_n'(\beta h) - J_n(\beta h)] \\
& F_\parallel: \quad J_n'(\beta h) = 0
\end{aligned}
$$

Уравнения (2.6) получаются из условия отсутствия напряжений на боковой поверхности стержня.

В каждой серии имеется бесконечное число типов колебаний (ветвей), отвечающих разным значениям ω — корням соответствующего дисперсионного уравнения при каждом $n \geqslant 0$.

При $n = 0$ дисперсионное уравнение (2.6) серии $F_\perp$ сводится к произведению двух множителей. Один из них дает дисперсионное уравнение для колебаний растяжения — сжатия по толщине, при этом радиальная компонента смещения f_r не зависит от θ, а $f_\theta = 0$. Второй множитель дает дисперсионное уравнение для крутильных волн, характеризующихся наличием только одной компоненты смещения f_θ, не зависящей от θ.

Серия $F_\parallel$ при $n = 0$ дает продольные осесимметричные колебания. Соответствующее дисперсионное уравнение имеет вид

$$J_1(\beta h) = 0$$

При $n \geqslant 1$ имеем семейства изгибных волн, которые в дальнейшем и будем рассматривать. В соответствии с условиями (1.1) будем считать, что функции

$$(2.7)\qquad u = \psi = 0, \quad x = \pm l$$

Не ограничивая общности, считаем также, что $u \sim \psi \sim 1$.

3. Рассмотрим сначала серию $F_\perp$. Считая u заданной функцией x, найдем w (в первом приближении $w = 0$). Оставив в (1.2) только главные члены, содержащие w, и главный перекрестный член, придем к функционалу

$$I_\perp = \frac{\Omega}{2}\int_{-l}^{l} \langle 2\lambda u f^{\alpha}_{,\alpha} w_{,x} + \mu\,(w_{,\alpha} + f_\alpha u_{,x})(w^{,\alpha} + f^\alpha u_{,x}) + \rho\omega^2 w^2\rangle\, dx$$

варьирование которого даст уравнение и граничное условие для w

$$
\begin{aligned}
(3.1)\qquad & (\lambda + \mu)\, u_{,x} f_{,\alpha}^{\alpha} + \mu\Delta w + \rho\,\omega^2 w = 0 \\
& \partial w / \partial \nu = -u_{,x} f^\alpha \nu_\alpha \quad \text{на } \Gamma
\end{aligned}
$$

Решение уравнений (3.1) имеет вид

$$w = u_{,x}\, g\,(x^\alpha)$$

Для круглого стержня (A дается первой формулой (2.5))

$$g = h\left[AJ_n(\alpha r) - J_n(\beta r)\,\frac{nJ_n(\beta h) + 2AJ_n'(\alpha h)\,h}{hJ_n'(\beta h)}\right]\cos n\theta$$

Таким образом, g имеет порядок h.

Аналогично находится следующая поправка к w_α: w фиксируется, а w_α ищется в форме $w_\alpha = uf_\alpha + w_\alpha'$, и в лагранжиане оставляются главные члены по w_α' и главный перекрестный член.

За счет переопределения u на w_α' можно наложить ограничение

$$\langle w_\alpha' f^\alpha \rangle = 0 \tag{3.2}$$

В результате варьирования функционала при условии (3.2) придем к уравнениям, определяющим функции w_α'

$$w_\alpha' = u_{,xx} g_\alpha \tag{3.3}$$

$$\lambda \frac{\partial}{\partial x^\alpha} g_{,\gamma}^{\gamma} + 2\mu \frac{\partial}{\partial x^\beta} g_{(\alpha,\beta)} + \rho\omega^2 g_\alpha = \varkappa f_\alpha - (\lambda + \mu) g_{,\alpha}$$

$$\lambda g_{,\gamma}{}^{\gamma} \nu_\alpha + 2\mu g_{(\alpha,\beta)} \nu^\beta = -\lambda g \nu_\alpha \quad \text{на } \Gamma$$

Здесь $\varkappa$ — множитель Лагранжа, отвечающий ограничению (3.2). Из уравнений (3.3) видно, что $g_\alpha \sim h^2$. Для построения одномерных уравнений явная форма решений этих уравнений не нужна.

4. Таким же путем получаются формулы для перемещений второй серии. Считая ψ заданной функцией x, найдем w_α (в первом приближении $w_\alpha = 0$). Оставив в (1.2) только главные члены, содержащие w_α, и главные перекрестные члены, придем к функционалу

$$I_{\parallel} = \frac{\Omega}{2} \int_{-l}^{l} \langle \lambda (w_{,\gamma}^{\gamma})^2 + 2\lambda w_{,\gamma}^{\gamma} \psi_{,x} G + 2\mu w_{(\alpha,\beta)} w^{(\alpha,\beta)} +$$
$$+ 2\mu \psi G_{,\alpha} w_{,x}^{\alpha} + \rho\omega^2 w_\alpha w^\alpha \rangle \, dx$$

варьирование которого дает уравнения и граничные условия для w_α

$$w_\alpha = \psi_{,x} G_\alpha (x^\beta) \tag{4.1}$$

$$\lambda \frac{\partial}{\partial x^\alpha} G_{,\gamma}^{\gamma} + 2\mu \frac{\partial}{\partial x^\beta} G_{(\alpha,\beta)} + \rho\omega^2 G_\alpha = -(\lambda + \mu) G_{,\alpha}$$

$$\lambda G_{,\gamma}{}^{\gamma} \nu_\alpha + 2\mu G_{(\alpha,\beta)} \nu^\beta = -\lambda G \nu_\alpha \quad \text{на } \Gamma$$

Из (4.1) следует, что $G_\alpha \sim h$.

Для круглого стержня решение имеет вид

$$G_\alpha = \varphi_{,\alpha} + E_{\alpha\beta} \Psi_{,\beta}$$

$$\varphi = \left[\frac{1}{\beta^2} J_n(\beta r) + M J_n(\alpha r) \right] \cos n\theta$$

$$\Psi = N J_n(\beta r) \sin n\theta$$

Постоянные M и N определяются из граничных условий на боковой поверхности Γ

$$M = \frac{2J_n(\beta h)}{\beta^2} \frac{2n^2 - (n^2 - \beta^2 h^2)(2n^2 - \beta^2 h^2)}{J_n(\alpha h)\left[(2n^2 - \beta^2 h^2)^2 - 4n^2\right] + 2\beta^2 h^2 J_n'(\alpha h)} \tag{4.2}$$

$$N = \frac{2n}{\beta^2} \frac{\beta^2 h^2 J_n(\alpha h) + 2h(n^2 - \beta^2 h^2 - 1) J_n'(\alpha h)}{J_n(\alpha h)\left[(2n^2 - \beta^2 h^2)^2 - 4n^2\right] + 2\beta^2 h^3 J_n'(\alpha h)}$$

Далее ищется поправка к w: полагается $w = \psi G + w'$, где ψ, G считаются известными, а w' находится варьированием функционала, в котором оставляются главные члены по w' и главные перекрестные члены. За счет переопределения ψ на w' можно наложить ограничение

$$\langle G w' \rangle = 0 \tag{4.3}$$

В результате варьирования функционала при условии (4.3) придем к уравнениям, определяющим функции w'

$$\begin{aligned} & w' = \psi_{,xx} H(x^\alpha) \\ & \Delta H + \rho\omega^2 H = \varkappa^\circ G + \left(1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right) G_{,\alpha}^{\alpha} \\ & \partial H / \partial \nu = -G_\alpha \nu^\alpha \text{ на } \Gamma \end{aligned} \tag{4.4}$$

Здесь $\varkappa^\circ$ — множитель Лагранжа.

Из (4.4) следует, что $H \sim h^2$. Явный вид функции H для построения одномерных уравнений не потребуется.

5. Примем теперь, что u, ψ — произвольные функции x и t. Вычисляя $\langle \Lambda \rangle$ в (1.2) для каждой ветви и удерживая слагаемые порядка h^{-2} и 1, получим

$$\begin{aligned} & F_\perp:\ 2\langle\Lambda\rangle = \langle \lambda u^2 (f_{,\alpha}{}^{\alpha})^2 + 2\lambda u u_{,xx} f_{,\alpha}{}^{\alpha} g + 2\mu u^2 f_{(\alpha,\beta)} f^{(\alpha,\beta)} + \\ & + \mu u_{,x}{}^2 (f_\alpha + g_{,\alpha})(f^\alpha + g^{,\alpha}) - \rho (u_{,xt}^2 g^2 + u_{,t}{}^2 f_\alpha f^\alpha) \rangle \\ & F_\parallel:\ 2\langle\Lambda\rangle = \langle \mu\psi^2 G_{,\alpha} G^{,\alpha} + \psi_{,x}{}^2 [\lambda (G + G_{,\alpha}{}^{\alpha})^2 + \\ & + 2\mu (G^2 + G_{(\alpha,\beta)} G^{(\alpha,\beta)} - G_{,\alpha} G^{,\alpha})] - \rho (\psi_{,xt}^2 G_\alpha G^\alpha + \psi_{,t}{}^2 G^2) \rangle \end{aligned} \tag{5.1}$$

Здесь не выписан осредненный лагранжиан для низшей ветви $F_\perp$, соответствующей $\omega_\perp = 0$, так как эта ветвь описывается классическим уравнением Бернулли — Эйлера.

Отметим, что, благодаря ограничениям (3.2), (4.3), функции g_α и H не вошли в осредненные лагранжианы.

6. Колебания, соответствующие любым двум различным ветвям с погрешностью, не большей чем величины удерживаемых в лагранжианах членов, ортогональны по упругой и кинетической энергиям

$$\int_{-l}^{l} \langle \underset{1}{\sigma^{ij}} \underset{2}{\varepsilon_{ij}} \rangle\, dx = 0, \quad \int_{-l}^{l} \langle \underset{1}{w}{}_{,t}{}^{i} \underset{2}{w_{i,t}} \rangle\, dx = 0 \tag{6.1}$$

Здесь w_i, σ^{ij}, ε_{ij} — перемещения, напряжения и деформации, индексами *1* и *2* отмечаются их значения для различных ветвей, индексы i, j пробегают значения 0, *1*, *2*.

Равенства (6.1) проверяются непосредственной подстановкой. При этом используются уравнения и граничные условия, которым удовлетворяют функции f_α, g, g_α и G, H, G_α, а также краевые условия на концах стержня (2.7).

Ортогональность по энергии означает, что колебания, соответствующие различным ветвям, независимы.

7. Уравнения свободных высокочастотных колебаний стержня серий $F_\perp$ и $F_\parallel$ получим, варьируя функционалы (5.1). Эти уравнения имеют вид

($\omega_\perp$ и $\omega_\parallel$ — корни соответствующих дисперсионных уравнений (2.6))

(7.1)
$$\rho a_\perp (\omega_\perp^2 u + u_{,tt}) = b_\perp u_{,xx} + \rho c_\perp u_{,xxtt}$$
$$\rho a_\parallel (\omega_\parallel^2 \psi + \psi_{,tt}) = b_\parallel \psi_{,xx} + \rho c_\parallel \psi_{,xxtt}$$
$$a_\perp = \Omega \langle f_\alpha f^\alpha \rangle, \quad b_\perp = \mu a_\perp + \rho\omega_\perp^2 c_\perp - (\lambda + \mu) d_\perp + \mu e_\perp$$
$$c_\perp = \Omega \langle g^2 \rangle, \quad d_\perp = \Omega \langle f^{\alpha}_{,\alpha} g \rangle, \quad e_\perp = \int_\Gamma g f_\alpha \nu^\alpha d\Gamma$$
$$a_\parallel = \Omega \langle G^2 \rangle, b_\parallel = (\lambda + 2\mu) a_\parallel + \rho\omega_\parallel^2 c_\parallel + (\lambda + \mu) d_\parallel - \mu e_\parallel$$
$$c_\parallel = \Omega \langle G_\alpha G^\alpha \rangle, \quad d_\parallel = \Omega \langle G G^{\alpha}_{,\alpha} \rangle, \quad e_\parallel = \int_\Gamma G G_\alpha \nu^\alpha d\Gamma$$

Для круглого стержня радиуса h
$$\pi^{-1} a_\perp = A^2 \{h J_n(\alpha h) J_n'(\alpha h) + {}^1/_2 (\alpha^2 h^2 - n^2) J_n^2(\alpha h) + {}^1/_2 h^2 J_n'^2(\alpha h)\} + 2 A n J_n(\alpha h) J_n(\beta h) + h J_n(\beta h) J_n'(\beta h) + {}^1/_2 (\beta^2 h^2 - n^2) J_n^2(\beta h) + {}^1/_2 h^2 J_n'^2(\beta h)$$
$$\pi^{-1} c_\perp = A^2 [(\alpha^2 h^2 - n^2) J_n^2(\alpha h) + h^2 J_n'^2(\alpha h)] / 2\alpha^2 + B^2 [(\beta^2 h^2 - n^2) J_n^2(\beta h) + h^2 J_n'^2(\beta h)] / 2\beta^2 - 2ABh [J_n(\alpha h) J_n'(\beta h) - J_n(\beta h) J_n'(\alpha h)] / (\alpha^2 - \beta^2)$$
$$\pi^{-1} d_\perp = AB\alpha^2 h [J_n(\alpha h) J_n'(\beta h) - J_n(\beta h) J_n'(\alpha h)] / (\alpha^2 - \beta^2) - {}^1/_2 A^2 [(\alpha^2 h^2 - n^2) J_n^2(\alpha h) + h^2 J_n'^2(\alpha h)]$$
$$\pi^{-1} e_\perp = h [A J_n(\alpha h) - B J_n(\beta h)] [A J_n'(\alpha h) + n / h\, J_n(\beta h)]$$
$$B = \frac{n}{J_n'(\beta h)} \times \frac{4hJ_n'(\alpha h) J_n'(\beta h) - 2J_n(\beta h) J_n'(\alpha h) + h^{-1}(\beta^2 h^2 - 2n^2) J_n(\alpha h) J_n(\beta h)}{2hJ_n'(\alpha h) + (\beta^2 h^2 - 2n^2) J_n(\alpha h)}$$
$$\pi^{-1} a_\parallel = \frac{1}{2\beta^2} [(\beta^2 h^2 - n^2) J_n^2(\beta h) + h^2 J_n'^2(\beta h)]$$
$$\pi^{-1} d_\parallel = M \frac{\alpha^2 h^2}{\alpha^2 - \beta^2} [J_n(\beta h) J_n'(\alpha h) - J_n(\alpha h) J_n'(\beta h)] - \frac{1}{2\beta^2} [(\beta^2 h^2 - n^2) J_n^2(\beta h) + h^2 J_n'^2(\beta h)]$$
$$\pi^{-1} e_\parallel = J_n(\beta h) \left[\frac{h}{\beta^2} J_n'(\beta h) + M h J_n'(\alpha h) + N n J_n(\beta h)\right]$$
$$\pi^{-1} c_\parallel = (N^2 + \beta^{-4}) \{h J_n'(\beta h) J_n(\beta h) + {}^1/_2 [(\beta^2 h^2 - h^2) J_n^2(\beta h) + h^2 J_n'^2(\beta h)]\} + M^2 \{h J_n'(\alpha h) J_n(\alpha h) + {}^1/_2 [(\alpha^2 h^2 - n^2) J_n^2(\alpha h) + h^2 J_n'^2(\alpha h)]\} + 2MNnh^{-1} J_n(\alpha h) J_n(\beta h) + 2Nnh^{-1}\beta^{-2} J_n^2(\beta h) + \frac{2hM}{\beta^2(\alpha^2 - \beta^2)} [\alpha^2 J_n(\alpha h) J_n'(\beta h) - \beta^2 J_n'(\alpha h) J_n(\beta h)]$$

Величина A определяется первой формулой (2.5), M и N определяются формулами (4.2).

Приближение, построенное в работе, имеет погрешность порядка h. Соответственно этому граничные условия (1.1) удовлетворяются с точностью до членов порядка h (так как $w = u_{,x} g \sim h$). Таким образом, невязка в граничных условиях вносит в решение погрешность того же порядка малости, что и замена уравнений трехмерной теории упругости приближенными одномерными.

8. В качестве примера применения уравнений (7.1) рассмотрим задачу о высокочастотных свободных колебаниях стержня длиной $2l$, жестко закрепленного на концах. Решение уравнений (7.1) при граничных условиях

$$u(-l) = u(l) = \psi(-l) = \psi(l) = 0$$

строится методом разделения переменных. В результате получим

$$u_m = (A_m \cos \gamma_m t + B_m \sin \gamma_m t) \sin \lambda_m x \tag{8.1}$$

$$\gamma_m = \sqrt{\frac{\rho a\omega^2 + b\lambda_m^2}{\rho(a + c\lambda_m^2)}}, \quad \lambda_m = \frac{m\pi}{l}$$

где m — целое число, ω — корень дисперсионного уравнения (2.6), a, b, c — коэффициенты первого уравнения (7.1).

Для функций ψ_m решение имеет тот же вид, но коэффициенты a, b, c и частоты ω вычисляются по формулам, соответствующим серии $F_{\parallel}$.

Полученное решение имеет следующий смысл. В бесконечном стержне возможны высокочастотные длинноволновые гармонические колебания с частотами $\omega_{\perp}$ и $\omega_{\parallel}$, при этом перемещения постоянны вдоль стержня, а по поперечным координатам изменяются как функции $g(x^{\alpha})$, $f_{\alpha}(x^{\beta})$ или $G(x^{\alpha})$, $G_{\alpha}(x^{\beta})$. Если же закрепить стержень на концах, то на поле перемещений, постоянное по продольной координате, наложится поле, медленно меняющееся вдоль оси. Собственные частоты изменятся и будут отличаться от ω. Вторая формула (8.1) как раз дает поправку к ω. Поэтому, хотя формально решение (8.1) верно при любых целых m, следует ограничить значения m таким образом, чтобы γ_m, вычисленное по второй формуле (8.1), не слишком отличалось от ω.

Поступила 3 I 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Achenbach J. D., Fang S. J.* Asymptotic analysis of the modes of wave propagation in a solid cylinder. J. Acoust. Soc. America, 1970, vol. 47, No. 5, pt. 2, p. 1282—1289.
2. *Бердичевский В. Л.* Об уравнениях теории анизотропных неоднородных стержней. Докл. АН СССР, 1976, т. 228, № 3.
3. *Бердичевский В. Л., Квашнина С. С.* Об уравнениях, описывающих поперечные колебания упругих стержней. ПММ, 1976, т. 40, вып. 1.
4. *Бердичевский В. Л.* Высокочастотные длинноволновые колебания пластин. Докл. АН СССР, 1977, т. 236, № 6.
5. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды, т. 2. М., «Наука», 1973.