Прикладная математика и механика. Том 43, 1979

УДК 539.3

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНКИ, ЛЕЖАЩЕЙ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

С. Н. Карасев

(Казань)

Рассматривается задача изгиба круглой пластинки, лежащей на упругом основании, системой жестких кольцевых штампов с плоской подошвой. На основе теории Кирхгофа — Лява с учетом поперечного обжатия пластинки по толщине в зонах контакта [1–3] построены интегральные уравнения относительно искомых нормальных контактных напряжений. Интегральные уравнения сводятся к системам линейных алгебраических уравнений; последние разбиваются на группы независимых уравнений.

Для решения контактных задач теории тонких пластин и оболочек применяются в основном два подхода. Первый заключается в построении решений дифференциальных уравнений теории пластин и оболочек в областях контакта и вне их и в сопряжении этих решений на границах зон контакта. На основе этого подхода получено решение ряда контактных задач для пластин и оболочек [4–13]. Второй подход основан на построении интегральных уравнений относительно искомых контактных напряжений и определении их решений [1, 14] [1].

Если зона контакта представляет собой область сложной формы (трапеция, треугольник, эллипс и др.), то практически выполнить условия сопряжения решений на границе этой зоны затруднительно. Наибольшие трудности представляют задачи, в которых неизвестны границы зон контакта; отметим лишь работу [15], в которой дано решение двумерной контактной задачи для круглой пластинки.

На примере решения контактной задачи для круглой пластинки, лежащей на упругом основании и находящейся под воздействием системы m кольцевых штампов с плоской подошвой (область контакта заранее известна), предлагается метод решения контактных задач, сформулированных в виде интегральных уравнений. Ядрами последних являются фундаментальные решения дифференциальных уравнений теории пластин и оболочек. Определены нормальные напряжения контакта в предположении, что касательные напряжения контакта отсутствуют и нет зон отрыва пластинки от штампов.

Рассмотрим изгиб круглой пластинки, лежащей на упругом основании Винклера. Расположим полярную систему координат r, θ в срединной плоскости и примем ее начало в центре окружности, по которой боковая поверхность пластинки пересекается со срединной плоскостью. Уравнение изгиба пластинки имеет в этом случае вид

$$\Delta\Delta w + w = \frac{\omega^2}{Dx}\delta(x-x_0)\,\delta(\theta-\theta_0), \quad \omega^4 = \frac{D}{K}, \quad x = \frac{r}{\omega} \tag{1}$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

[1] См. также *Толкачев В. М.* Некоторые контактные задачи теории оболочек. Докторск. диссертация. М., 1973.

Здесь K — модуль упругости основания, E, ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона пластинки, h — толщина пластинки, δ — дельта-функция.

Используя результаты работы [16], запишем общее решение уравнения (1) в форме

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} (S_n{}^0 \cos n\theta + S_n{}^1 \sin n\theta) + G(x, \theta, x_0, \theta_0)$$

$$S_n{}^k = C_n{}^k u_n + B_n{}^k v_n + D_n{}^k f_n + A_n{}^k g_n, \quad k = 0, 1$$

$$G(x, \theta, x_0, \theta_0) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n K_n(x, x_0) \cos n(\theta - \theta_0)$$

$$n = 0, \quad b_n = {}^1/_2; \quad n \geqslant 1, \quad b_n = 1$$

$$K_n(x, x_0) = \omega^2 H(x - x_0) Q_n(x, x_0) / (2D)$$

$$Q_n(x, x_0) = f_n(x) u_n(x_0) - f_n(x_0) u_n(x) - g_n(x) v_n(x_0) + {} + g_n(x_0) v_n(x)$$

Здесь $H(x - x_0)$ — единичная функция, u_n, v_n, f_n, g_n — функции Кельвина, связанные с функциями Бесселя первого J_n и третьего $H_n^{(1)}$ рода формулами [16]

$$u_n + iv_n = J_n(x\sqrt{i}), \quad f_n + ig_n = H_n^{(1)}(x\sqrt{i})$$

Считая, что к пластинке в точке с координатами (x_1, θ_1) приложена пригрузка в виде сосредоточенной силы P и учитывая деформацию поперечного обжатия пластинки в зонах контакта по толщине [3], запишем интегральные уравнения относительно неизвестных контактных напряжений $\sigma_j(x, \theta)$ в виде

$$\alpha\sigma_j(x, \theta) + \omega^2 \sum_{i=1}^{m} \int_0^{2\pi} \int_{a_i}^{b_i} G(x, \theta, x_0, \theta_0)\, \sigma_i(x_0, \theta_0)\, x_0\, dx_0\, d\theta_0 = U_j \tag{2}$$

$$U_j = \gamma_j + \beta_{1j}\, x \cos\theta + \beta_{2j}\, x \sin\theta - PG(x, \theta, x_1, \theta_1) - V_j$$

$$V_j = \sum_{n=0}^{\infty} (S_n{}^0 \cos n\theta + S_n{}^1 \sin n\theta)$$

$$a_j < x < b_j, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi; \quad \alpha = 13(1 - \nu^2)\, h / (32E);$$
$$j = 1, \ldots, m$$

Здесь постоянные γ_j, β_{1j}, β_{2j} характеризуют смещение j-го штампа как жесткого тела, a_j, b_j — безразмерные внутренний и внешний радиусы j-го штампа.

К уравнениям (2) присоединим условия равновесия штампов

$$\omega^3 \int_0^{2\pi} \int_{a_i}^{b_i} \sigma_i x^2 \cos\theta\, dx\, d\theta = M_{1i} \quad (i = 1, \ldots, m) \tag{3}$$

$$\omega^3 \int_0^{2\pi} \int_{a_i}^{b_i} \sigma_i x^2 \sin\theta\, dx\, d\theta = M_{2i}, \quad \omega^2 \int_0^{2\pi} \int_{a_i}^{b_i} \sigma_i x\, dx\, d\theta = P_i$$

Здесь P_i, M_{1i}, M_{2i} — проекции главных векторов и моментов внешних сил, приложенных к штампам, на оси координат.

Действуя на уравнения (2) оператором $(\Delta\Delta + 1)$ и используя фильтрующее свойство дельта-функции, находим, что функции σ_j удовлетворяют уравнениям

$$\Delta\Delta\sigma_j + (\lambda^4 + 1)\,\sigma_j = \alpha^{-1}(\gamma_j + \beta_{1j}\,x\cos\theta + \beta_{2j}x\sin\theta) \tag{4}$$
$$\lambda^4 = \omega^4/(\alpha D)$$

Решая уравнения (4), находим

$$\sigma_j(x,\theta) = \alpha^{-1}\varepsilon^{-4}(\gamma_j + \beta_{1j}x\cos\theta + \beta_{2j}x\sin\theta) + \tag{5}$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}(\overset{\circ}{\sigma}_{ni}(x)\cos n\theta + \sigma_{ni}^1(x)\sin n\theta), \quad \varepsilon^4 = 1 + \lambda^4$$

Функции $\sigma_{ni}{}^{\circ}$, $\sigma_{ni}{}^{1}$ определяются из уравнений

$$\Delta_n\Delta_n\sigma_{ni} + \varepsilon^4\sigma_{ni} = 0, \quad \Delta_n = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx} - \frac{n^2}{x^2} \tag{6}$$
$$\sigma_{ni}{}^{\circ}(x) = A_{ni}u_n(\varepsilon x) + B_{ni}v_n(\varepsilon x) + C_{ni}f_n(\varepsilon x) + D_{ni}g_n(\varepsilon x)$$
$$\sigma_{ni}{}^{1}(x) = A_{ni}{}^{1}u_n(\varepsilon x) + B_{ni}{}^{1}v_n(\varepsilon x) + C^1{}_{ni}f_n(\varepsilon x) + D^1{}_{ni}g_n(\varepsilon x)$$

Дифференциальные уравнения (4) определяют структуру решений интегральных уравнений (2). Учитывая, что функции σ_j удовлетворяют уравнениям (4), сведем интегральные уравнения (2) к системе линейных алгебраических уравнений.

Из уравнений (4) — (6) получим

$$\sigma_i(x,\theta) = -\lambda^{-4}\sigma_i(x,\theta) - \lambda^{-4}\sum_{n=0}^{\infty}(\Delta_n\Delta_n\overset{\circ}{\sigma}_{ni}\cos n\theta + \tag{7}$$
$$+\Delta_n\Delta_n\sigma_{ni}^1\sin n\theta) + \lambda^{-4}\alpha^{-1}(\gamma_i + \beta_{1i}x\cos\theta + \beta_{2i}x\sin\theta)$$

Подставляя (7) в (2) и интегрируя по частям, приходим к следующему выражению:

$$\alpha\sigma_j + \pi\omega^2\lambda^{-4}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{m} b_n x_0[\overset{\circ}{\Lambda}_{ni}\cos n\theta + \Lambda_{ni}^1\sin n\theta] + \tag{8}$$
$$+\sum_{i=1}^{m}[\pi\omega^2\lambda^{-4}\alpha^{-1}x_0\Omega_i - \omega^4\lambda^{-4}\Pi_i] = -P\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n - V_j$$
$$\Lambda_{ni}^k = \left[\sigma_{ni}^k L_n K_n - K_n L_n\sigma_{ni}^k + \frac{dK_n}{dx_0}L\sigma_{ni}^k - \frac{d\sigma_{ni}^k}{dx_0}LK_n\right]\Bigg|_{a_i}^{b_i}, \quad k = 0, 1$$
$$\Omega_i = \left[\left(LK_1 - x_0\frac{dK_1}{dx_0} - x_0L_1K_1 - \frac{K_1}{x_0}\right)(\beta_{1i}\cos\theta + \beta_{2i}\sin\theta) - \right.$$
$$\left. -\frac{1}{2}\gamma_i L_0 K_0\right]\Bigg|_{a_i}^{b_i}$$
$$\Pi_i = \int_0^{2\pi}\int_{a_i}^{b_i}[(\Delta\Delta + 1)G]\,x_0\sigma_i\,dx_0\,d\theta_0$$
$$\beta_n = b_n K_n(x, x_1)\cos n(\theta - \theta_1)$$
$$L = \frac{d^2}{dx_0{}^2} + \frac{1}{x_0}\frac{d}{dx_0}, \quad L_n y = \frac{d}{dx_0}Ly - n^2\frac{d}{dx_0}\left(\frac{y}{x_0{}^2}\right) - \frac{n^2}{x_0}\frac{dy}{dx_0}$$
$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

В выражении (8) содержатся только четыре системы линейно-независимых функций

$$\begin{bmatrix}\cos n\theta\\ \sin n\theta\end{bmatrix} u_n(x),\quad \begin{bmatrix}\cos n\theta\\ \sin n\theta\end{bmatrix} v_n(x),\quad \begin{bmatrix}\cos n\theta\\ \sin n\theta\end{bmatrix} f_n(x),\quad \begin{bmatrix}\cos n\theta\\ \sin n\theta\end{bmatrix} g_n(x)$$

Приравнивая в (8) слева и справа коэффициенты при одинаковых функциях и принимая во внимание (6), получим первую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $A_{ni}, \ldots, D_n^k$ в виде

$$\begin{aligned}
(9)\qquad & \sum_{i=1}^{m}\left[b_n\Lambda_{ni}^-(b_i, a_i) + \alpha^{-1}d_n\beta_{1i}\Phi_{ni}^-(b_i, a_i) - \frac{1}{2}\gamma_i\omega_n L_0^-(b_i, a_i)\right] + \\
& + D_n^k = \frac{1}{2D} P b_n \omega^2 H(x - x_1)\, u_n(x_1)\cos n\theta_1, \quad k = 0 \\
& \Lambda_{ni}^-(b_i, a_i) = b_i\,\Lambda_{ni}^*(b_i)\, H(x - b_i) - a_i\Lambda_{ni}^*(a_i)\, H(x - a_i) \\
& \Lambda_{ni}^*(z) = \sigma_{ni}(z)\, L_n u_n(z) - u_n(z)\, L_n\sigma_{ni}(z) + L\sigma_{ni}(z)\,\frac{du_n(z)}{dz} - \\
& - \frac{d\sigma_n(z)}{dz} L u_n(z) \\
& \Phi_{ni}^-(b_i, a_i) = \Phi_{ni}^*(b_i) - \Phi_{ni}^*(a_i) \\
& \Phi_{ni}^*(z) = zLu_1(z) - z^2\frac{du_1(z)}{dx} - z^2L_1u_1(z) - u_1(z), \quad z = a_i, b_i \\
& L_0^-(b_i, a_i) = b_iL_0u_0(b_i) - a_iL_0u_0(a_i) \\
& n = 1, \quad d_n = 1; \quad n = 0,\ 2,\ 3,\ \ldots, \quad d_n = 0 \\
& n = 0, \quad \omega_n = 1; \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots, \quad \omega_n = 0
\end{aligned}$$

Вторую, третью и четвертую системы уравнений получим из уравнений (9) последовательной заменой $u_n(z)$ на $g_n(z)$, $-f_n(z)$, $-v_n(z)$ $(z = a_i, b_i)$ и D_n^k на B_n^k, C_n^k, A_n^k.

Условия равновесия приводят к системе уравнений

$$\begin{aligned}
(10)\qquad & \psi_i^-(b_i, a_i) + \beta_{ki}(b_i^3 - a_i^3)/(3\alpha) = -M_{ki}\varepsilon^4/(\pi\omega^3), \quad k = 1, 2 \\
& a_iL_0\sigma_{0i}(a_i) - b_iL_0\sigma_{0i}(b_i) + \gamma_i(b_i^2 - a_i^2)/(2\alpha) = P_i\varepsilon^4/(2\pi\omega^2) \\
& \psi_i^-(b_i, a_i) = \psi_i^*(b_i) - \psi_i^*(a_i) \\
& \psi_i^*(z) = z^2L_1\sigma_{1i}^k(z) + \frac{d}{dx}\sigma_{1i}^k(z) + \sigma_{1i}^k(z) - zL\sigma_{1i}^k(z), \quad k = 0, 1
\end{aligned}$$

К уравнениям (9), (10) присоединим граничные условия. Примем, что края кольцевой пластинки защемлены, т. е. $w(R_i, \theta) = 0$, $\partial w(R_i, \theta)/\partial x = 0$ $(i = 1, 2;\ R_1, R_2$ — внутренний и внешний безразмерные радиусы пластинки). Из граничных условий $w(R_i, \theta) = 0$ получим

$$\begin{aligned}
(11)\qquad & \sum_{i=1}^{m}\Big\{b_n[\Lambda_{ni}^{**}(b_i) - \Lambda_{ni}^{**}(a_i)] + \alpha^{-1}d_n\beta_{1i}[\Phi_{ni}^{**}(b_i) - \Phi_{ni}^{**}(a_i)] - \\
& - \frac{1}{2}\gamma_i\omega_nL_0^{**}(b_i, a_i)\Big\} + S_n^0(R_j) + Pb_nK_n(R_j, x_1)\cos n\theta_1 = 0 \\
& n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots; \quad j = 1,\ 2
\end{aligned}$$

Здесь функции $\Lambda_{ni}^{**}(z)$, $\Phi_{ni}^{**}(z)$, $L_0^{**}(b_i, a_i)$ получаются из $\Lambda_{ni}^{*}(z)$, $\Phi_{ni}^{*}(z)$, $L_0^{-}(b_i, a_i)$ заменой $u_n(z)$ на $K_n(R_j, z)$. Чтобы получить два других уравнения, достаточно в (11) заменить $K_n(R_j, b_i)$ на $dK_n(R_j, b_i)/dx$ и $K_n(R_j, a_i)$ на $dK_n(R_j, a_i)/dx$, а функции u_n, v_n, f_n, g_n — их производными. Бесконечная система уравнений (9) — (11) разбивается для произвольного n на конечные группы уравнений. Каждая группа уравнений содержит не более чем $5m + 5$ уравнений.

Основное преимущество рассмотренного метода решения контактной задачи по сравнению с методом стыковки заключается в уменьшении числа подлежащих определению произвольных постоянных. Указанный метод не нуждается в построении функций влияния [1,14].

Пусть кольцевая пластинка загружена осесимметрично шестью штампами. Первый подход приводит в этом случае к необходимости решать систему 58 линейных алгебраических уравнений. Развитый здесь метод сводит эту задачу к решению 34 уравнений. С увеличением количества зон контакта преимущество указанного метода становится очевидным.

Поступила 26 V 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Попов Г. Я.* О контактных задачах для оболочек и пластин. Тр. X Всес. конференции по теории оболочек и пластин, т. 1. Кутаиси, 1975. Тбилиси, «Мецниереба», 1975.
2. *Григолюк Э. И., Толкачев В. М.* Цилиндрический изгиб пластины жесткими штампами. ПММ, 1975, т. 39, вып. 5.
3. *Карасев С. Н., Артюхин Ю. П.* Влияние поперечного сдвига и обжатия на распределение контактных напряжений. В сб.: Исследования по теории пластин и оболочек, вып. 12. Изд-во Казанск. ун-та, 1976.
4. *Александров В. М.* Некоторые контактные задачи для балок, пластинок и оболочек. Инж. ж., 1965, т. 5, вып. 4.
5. *Артюхин Ю. П., Карасев С. Н.* Действие жесткого штампа на пологую сферическую оболочку и пластинку. В сб.: Исследования по теории пластин и оболочек, вып. 9. Изд-во Казанск. ун-та, 1972.
6. *Артюхин Ю. П., Карасев С. Н.* Определение напряжений в пологой сферической оболочке при действии жесткого тела. В сб. : Исследования по теории пластин и оболочек, вып. 11. Изд-во Казанск. ун-та, 1975.
7. *Блох М. В., Цукров С. Я.* О влиянии изменения толщины стенки на осесимметричный контакт тонких цилиндрических оболочек. Прикл. механ., 1974, т. 10, вып. 4.
8. *Бондаренко В. А.* Контакт тонкостенной сферической оболочки с жестким шаром. Прикл. механ., 1971, т. 7, вып. 12.
9. *Крук Г. С.* Контактная задача для трехслойной пластинки с легким заполнителем. В сб.: Математические методы и физико-механические поля, вып. 1. Киев, «Наукова думка», 1975.
10. *Лукаш П. А., Леонтьев Н. М.* Расчет сферической оболочки, опирающейся на жесткое основание. Инж. сб., 1959, т. 25.
11. *Пелех Б. Л., Сухорольский М. А.* Взаимодействие системы жестких гладких штампов с упругими цилиндрическими оболочками из армированных пластиков. Прикл. механ., 1974, т. 10, вып. 4.
12. *Розенберг Л. А.* О давлении твердого тела на пластинку. Инж. сб., 1955, т. 21.
13. *Essenburg F.* On surface constraints in plate problems. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1962, vol. 29, No. 2. (Рус. перев.: Прикл. механ. Тр. Америк. о-ва инж-механ. Сер. E, 1962, т. 29, № 2.)
14. *Пелех Б. Л., Сухорольский М. А.* К решению задач об упругом контакте цилиндрических оболочек. Прикл. механ., 1974, т. 10, вып. 8.
15. *Галин Л. А.* О давлении твердого тела на пластинку. ПММ, 1948, т. 11, вып. 3.
16. *Коренев Б. Г.* Введение в теорию бесселевых функций. М., «Наука», 1971.