Прикладная математика и механика. Том 43, 1979

УДК 539.3

О ДВОЙСТВЕННОМ ВАРИАЦИОННОМ ПРИНЦИПЕ В ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В. Л. Бердичевский, В. А. Мисюра

(Москва)

Изложен метод построения двойственного вариационного принципа в геометрически нелинейной теории упругости. Двойственный функционал (функционал типа Кастильяно) вычисляется в случае изотропного полулинейного материала.

1. Введение. В геометрически линейной теории упругости истинное поле перемещений является экстремалью функционала Лагранжа $I(u)$, определенного на допустимых полях перемещений u

$$\delta I(u) = 0 \tag{1.1}$$

а истинное поле напряжений — экстремалью функционала Кастильяно $J(\sigma)$, определенного на допустимых полях напряжений σ

$$\delta J(\sigma) = 0 \tag{1.2}$$

Существенно, что функционалы Лагранжа и Кастильяно образуют пару двойственных функционалов. Это означает, что дополнительно к (1.1) и (1.2) справедливо равенство

$$\inf_u I(u) = \sup_\sigma J(\sigma) \tag{1.3}$$

Равенство (1.3) позволяет строить двусторонние оценки упругой энергии [1]. Из этих оценок вытекают, например, двусторонние оценки эффективных упругих модулей микронеоднородных упругих тел или неравенства, позволяющие доказывать асимптотическую точность прикладных теорий стержней, пластин и оболочек.

В геометрически нелинейной теории упругости из-за невыпуклости трудно рассчитывать на существование функционала, удовлетворяющего одновременно условиям (1.2) и (1.3). Функционал $J(\sigma)$, удовлетворяющий условию (1.2), был построен Л. М. Зубовым [2]. Койтер [3] обратил внимание на то, что преобразование Лежандра, примененное в [2], приводит к многозначному функционалу $J(\sigma)$ и остается неясным, как следует выбирать ветви $J(\sigma)$. Этому вопросу посвящена работа Л. М. Зубова [4].

Ряд вопросов, связанных с конструированием функционала $J(\sigma)$, обсуждался в работах [5–13]. Отметим также работы по вариационным задачам с невыпуклыми функционалами [14, 15].

Ниже строится функционал $J(\sigma)$, который, вообще говоря, не удовлетворяет (1.2), однако подчиняется соотношению

$$\sup_\sigma J(\sigma) \leqslant \inf_u I(u) \tag{1.4}$$

При этом сохраняется важное свойство двойственного вариационного принципа — возможность построения двусторонних оценок энергии.

2. Функционал Лагранжа. Рассмотрим геометрически нелинейное тело, занимающее в недеформированном состоянии область V_0 с кусочно-гладкой границей ∂V_0. Обозначим через x^i координаты декартовой системы отсчета наблюдателя, ξ^p — координаты сопутствующей системы отсчета. Символами $i, j, k, \ldots$, отмечаются индексы, преобразования по которым происходят при преобразовании системы отсчета наблюдателя, по индексам $p, q, r, \ldots$ преобразования при преобразованиях сопутствующей системы координат. Положения частиц в недеформированном и деформированном состоянии задаются функциями $x_0^i = x_0^i(\xi^p)$ и $x^i = x^i(\xi^p)$ соответственно. Граница ∂V_0 разбита на две части: S и Σ, на S заданы поверхностные «мертвые» нагрузки p_i, на Σ — положения частиц в деформированном состоянии

$$x^i(\xi^p)|_\Sigma = \varphi^i(\xi^p) \tag{2.1}$$

Определим функционал [16]

$$I[x^i(\xi^p)] = E(x^i) - l(x^i) \tag{2.2}$$

$$E(x^i) = \int\limits_{V_0} U(x_p^i)\,d\tau, \quad l(x^i) = \int\limits_{V_0} F_i x^i(\xi^p)\,d\tau + \int\limits_{\partial V_0} p_i x^i(\xi^p)\,d\sigma$$

Здесь U — плотность внутренней энергии, $x_p^i = \partial x^i / \partial \xi^p$ — градиент деформации, F_i — плотность массовых сил. Далее предполагаем, что минимальное значение функционала (2.2) достигается на функциях, удовлетворяющих условию

$$\det \| x_p^i \| > 0 \tag{2.3}$$

Положения равновесия тела являются критическими точками функционала (2.2) на множестве функций, удовлетворяющих условиям (2.1).

В геометрически нелинейной теории упругости U обычно задается как выпуклая функция ε_{pq} или γ_{pq}

$$\varepsilon_{pq} = {}^1/_2\,(g_{ij}x_p^i x_q^j - g_{pq}^\circ), \quad \gamma_{pq} = |x|_{pq} - |x_0|_{pq} \tag{2.4}$$

$$g_{pq}^\circ = g_{ij}x_{0p}^i x_{0q}^j, \quad x_{0p}^i = \partial x_0^i / \partial \xi^p, \quad x_p^i = |x|_{pq}\lambda^{iq}$$

Здесь g_{ij} и g_{pq}° — ковариантные компоненты метрического тензора в системе отсчета наблюдателя и в сопутствующей системе отсчета в недеформированном состоянии, $|x|_{pq}$ — модуль тензора x_p^i, определяемый полярным разложением Кэли [17], $|x|_{pq}$ — положительно-определенный симметричный тензор, λ^{iq} — компоненты ортогональной матрицы

$$g_{pq}^\circ \lambda^{ip}\lambda^{jq} = g^{ij}, \quad g_{ij}\lambda^{ip}\lambda^{jq} = g_0^{pq} \tag{2.5}$$

$|x_0|_{pq}$ — модуль тензора x_{0p}^i. Жонглирование индексами $p, q, r, \ldots$ осуществляется при помощи метрики g_{pq}°, а индексами $i, j, k, \ldots$ — при помощи метрики g_{ij}.

Если бы функция U была выпукла по x_p^i, то двойственная вариационная задача могла бы быть построена по общему правилу, сформулированному в [18]. Однако U, выпуклая по ε_{pq} или γ_{pq}, не выпукла по x_p^i.

Это показывают следующие примеры.

Пример 1. Рассмотрим одномерную деформацию: $x^1 = x^1(\xi^1)$, $x^2 = \xi^2$, $x^3 = \xi^3$, $g_{11}^0 = 1$ (индекс *1* дальше опускаем). Пусть U — квадратичная форма по ε_{pq}. Тогда в рассматриваемом случае $U = E\varepsilon^2$, $\varepsilon = \varepsilon_{11} = {}^1/_2\,[(\partial x / \partial\xi)^2 - 1]$. Невыпуклость U по $\partial x / \partial\xi$ очевидна.

Пример 2. Рассмотрим изотропный упругий полулинейный материал, для которого плотность внутренней энергии U имеет вид

$$U(\gamma_{pq}) = {}^1/_2\lambda\,(g_0^{pq}\gamma_{pq})^2 + \mu\,(\gamma^{pq}\gamma_{pq})$$

Для двумерной задачи, учитывая (2.4), функцию U как функцию x_p^α, (α, $p = 1, 2$) при $\lambda = 0$ запишем в виде

$$U(x_p^\alpha) = \mu\,\{(x_1^1)^2 + (x_2^1)^2 + (x_1^2)^2 + (x_2^2)^2 - 2\,[(x_1^1 + x_2^2)^2 + (x_2^1 - x_1^2)^2]^{1/2} + 2\}$$

Необходимым условием выпуклости функции многих переменных является ее выпуклость по каждой из переменных. Проверка этого условия для функции (2.6) сводится к исследованию знака второй частной производной U по каждой из переменных x_p^α. Выпишем, например, $\partial^2 U / (\partial x_1^1)^2$

$$\frac{1}{2\mu}\frac{\partial^2 U}{\partial (x_1^1)^2} = 1 - \frac{(x_2^1 - x_1^2)^2}{[(x_1^1 + x_2^2)^2 + (x_2^1 - x_1^2)^2]^{3/2}}$$

Ясно, что x_2^1, x_1^2 и x_2^2 можно подобрать таким образом, чтобы $\partial^2 U / \partial (x_1^1)^2 < 0$. Это указывает на невыпуклость функции U по x_p^i.

Статическая неустойчивость упругих тел, а также наличие нескольких положений равновесия связаны с невыпуклостью функции U по x_p^i.

3. Двойственный вариационный принцип. Рассмотрим задачу о минимуме функционала (2.2) по всем функциям, удовлетворяющим условиям (2.1). Предполагаем, что минимальное значение вариационной задачи (2.2), (2.1) достигается на функциях, удовлетворяющих условию (2.3).

Пусть U — произвольная непрерывно дифференцируемая функция γ_{pq} (или, что то же, $|x|_{pq}$). Рассмотрим функцию

(3.1)
$$\bar U = \begin{cases} U(x_p^i), & x_p^i: \det\|x_p^i\| > 0 \\ +\infty, & x_p^i: \det\|x_p^i\| \leqslant 0 \end{cases}$$

Обозначим через $\bar U^*(\sigma_i^p)$ преобразование Юнга функции $\bar U(x_p^i)$ по x_p^i

(3.2)
$$\bar U^*(\sigma_i^p) = \sup_{x_p^i}\,[\sigma_i^p x_p^i - \bar U(x_p^i)]$$

Здесь σ_i^p — двойственные переменные. Пусть $\bar U^{**}(x_p^i)$ — преобразование Юнга функции $\bar U^*(\sigma_i^p)$

(3.3)
$$\bar U^{**}(x_p^i) = \sup_{\sigma_i^p}\,[x_p^i\sigma_i^p - \bar U^*(\sigma_i^p)]$$

Известно [19], что $\bar U^{**}(x_p^i)$ — максимальная выпуклая по x_p^i функция, не превосходящая $\bar U(x_p^i)$.

Введем обозначения

$$\bar I(x^i) = \int_{V_0} \bar U(x_p^i)\,d\tau - l(x^i), \quad E^*(\sigma_i^p) = \int_{V_0} \bar U^*(\sigma_i^p)\,d\tau$$

$$l^*(\sigma_i^p) = \int_{V_0} \sigma_i^p \frac{\partial x_\Sigma^i}{\partial \xi^p}\,d\tau - l(x_\Sigma^i)$$

где x_Σ^i — произвольные функции, удовлетворяющие условию (2.1).

Двойственный вариационный принцип сформулируем как задачу о минимуме функционала

$$J(\sigma_i^p) = E^*(\sigma_i^p) - l^*(\sigma_i^p)$$

где минимум рассматривается по всем σ_i^p, удовлетворяющим условиям

$$\int_{V_0} \sigma_i^p \frac{\partial x'^i}{\partial \xi^p} d\tau - l(x'^i) = 0 \tag{3.4}$$

Равенства (3.4) по условию имеют место для любых функций x'^i, обращающихся в нуль на Σ. Если σ_i^p непрерывно дифференцируемы, то ограничения (3.4) можно переписать в виде (n_p — нормаль к S)

$$\partial\sigma_i^p / \partial\xi^p + F_i = 0 \quad \text{в} \quad V_0, \qquad \sigma_i^p n_p = p_i \quad \text{на} \quad S \tag{3.5}$$

Заметим, что в силу (3.4) значения функционала $l^*(\sigma_i^p)$ не зависят от выбора функций x_Σ^i.

Теорема 1. Справедливо неравенство

$$\sup\nolimits_{\sigma_i^p \in (3.5)} [-J(\sigma_i^p)] \leqslant \inf\nolimits_{x^i \in (2.1)} I(x^i)$$

Запись $x^i \in (2.1)$ означает, что x^i удовлетворяют условиям (2.1).

Доказательство. Из предположения о том, что минимизирующий элемент вариационной задачи (2.2), (2.1) удовлетворяет условию (2.3), имеем

$$\inf\nolimits_{x^i \in (2.1)} I(x^i) = \inf\nolimits_{x^i \in (2.1)} \bar{I}(x^i) \geqslant \inf\nolimits_{x^i \in (2.1)} \Big[\int_{V_0} \bar{U}^{**} d\tau - l(x^i)\Big] =$$

$$= \inf\nolimits_{x^i (2.1)} \sup\nolimits_{\sigma_i^p} \Big[\int_{V_0} (\sigma_i^p x_p^i - \bar{U}^*) d\tau - l(x^i)\Big] \geqslant$$

$$\geqslant \sup\nolimits_{\sigma_i^p \in (3.5)} \inf\nolimits_{x^i \in (2.1)} \Big[\int_{V_0} \sigma_i^p x_p^i d\tau - l(x^i) - \int_{V_0} \bar{U}^* d\tau\Big] =$$

$$= \sup\nolimits_{\sigma_i^p \in (3.5)} [l^*(\sigma_i^p) - E^*(\sigma_i^p)] = \sup\nolimits_{\sigma_i^p \in (3.5)} [-J(\sigma_i^p)]$$

Здесь использовано неравенство, справедливое для любого функционала $\Phi(x, \sigma)$

$$\inf\nolimits_x \sup\nolimits_\sigma \Phi(x, \sigma) \geqslant \sup\nolimits_\sigma \inf\nolimits_x \Phi(x, \sigma)$$

Таким образом, проблема построения двойственного вариационного принципа сводится к вычислению преобразования Юнга функции $\bar{U}$.

4. О преобразовании Юнга функции $\bar{U}$. Рассмотрим преобразование Юнга функции $\bar{U}$ по x_p^i (3.2). Отметим, что

$$\bar{U}^*(\sigma_i^p) = \sup\nolimits_{x_p^i \in (2.3)} [\sigma_i^p x_p^i - U(x_p^i)] \tag{4.1}$$

Лемма 1. Пусть θ^{pq} — произвольный тензор, а μ_{pq} — тензор, удовлетворяющий условиям ортогональности

$$g_0^{pq} \mu_{ps} \mu_{qt} = g_{st}^\circ, \quad \det \| \mu_{pq} \| > 0 \tag{4.2}$$

Тогда

$$\sup\nolimits_{\mu_{pq} \in (4.2)} \theta^{pq} \mu_{pq} = |\theta|_1 + |\theta|_2 + |\theta|_3 \operatorname{sgn} \det \| \theta^{pq} \|$$

Здесь $|\theta|_i$ — собственные значения тензора $|\theta|^{pq}$, расположенные в убывающем порядке.

Доказательство. 1°. Пусть сначала $\det \|\theta^{pq}\| > 0$. Используя полярное разложение тензора θ^{pq}, т. е. $\theta^{pq} = |\theta|^{ps}\lambda_s{}^q$, утверждение леммы можно переписать в виде

$$\sup_{\nu_{st}\in(4.2)} |\theta|^{ps}\nu_{ps} = |\theta|_1 + |\theta|_2 + |\theta|_3 \tag{4.3}$$

Тензор ν_{st}, удовлетворяющий (4.2) в системе координат, главной для симметричного тензора $|\theta|^{ps}$, представим в форме произведения трех элементарных вращений с независимыми параметрами Эйлера φ_1, φ_2, ψ.

Доказательство равенств (4.3) сводится к вычислению величины

$$\theta = \sup_{\varphi_1,\varphi_2,\psi} [A\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - B\sin\varphi_1\sin\varphi_2 + |\theta|_3\cos\psi] \tag{4.4}$$

$$A = |\theta|_1 + |\theta|_2\cos\psi, \quad B = |\theta|_1\cos\psi + |\theta|_2$$

Вычисление верхней грани по φ_2 дает

$$\theta = \sup_{\varphi_1\psi} [(A^2\cos^2\varphi_1 + B^2\sin^2\varphi_1)^{1/2} + |\theta|_3\cos\psi]$$

Так как $A \geqslant 0$, $A^2 \geqslant B^2$ (напомним, что $|\theta|_1 \geqslant |\theta|_2 \geqslant |\theta|_3$), A и B не зависят от φ_1, получим

$$\theta = \sup_{\psi} (A + |\theta|_3\cos\psi) = |\theta|_1 + |\theta|_2 + |\theta|_3$$

2°. Пусть $\det\|\theta^{pq}\| < 0$. В этом случае утверждение леммы имеет вид

$$\sup_{\varkappa_{st}} |\theta|^{st}\varkappa_{st} = |\theta|_1 + |\theta|_2 - |\theta|_3$$

где верхняя грань рассматривается по всем $\varkappa_{st}$, удовлетворяющим условиям

$$g_0{}^{pq}\varkappa_{ps}\varkappa_{qt} = g_{st}{}^\circ, \quad \det\|\varkappa_{pq}\| < 0 \tag{4.5}$$

Доказательство утверждения в этом случае аналогично доказательству в случае 1°. Необходимо только в (4.4) перед членом $|\theta|_3\cos\psi$ знак изменить на противоположный.

Замечание. Отметим, что утверждение леммы 1 при $\det\|\theta^{pq}\| > 0$ не связано с упорядоченностью собственных значений. В случае, когда $\det\|\theta^{pq}\| < 0$, утверждение леммы также можно представить в форме, не предполагающей упорядоченности собственных значений

$$\sup_{\mu_{pq}\in(4.2)} \theta^{pq}\mu_{pq} = \max [|\theta|_1 + |\theta|_2 - |\theta|_3, |\theta|_2 + |\theta|_3 - |\theta|_1, |\theta|_3 + |\theta|_1 - |\theta|_2]$$

Лемма 2. Пусть U зависит только от собственных значений тензора $|x|_{pq}$, $|\sigma|^{pq}$ — модуль тензора $\sigma_i{}^p$. Тогда тензоры $|x|_{pq}$ и $|\sigma|^{pq}$ соосны.

Теорема 2. Пусть функция U удовлетворяет условиям леммы 2. Тогда в системе координат, главной для тензора $|\sigma|^{pq}$, преобразование Юнга функции $\bar{U}$ дается формулой

$$\bar{U}^*(\sigma_i{}^p) = \begin{cases} U_1{}^*, & \det\|\sigma_i{}^p\| > 0 \\ U_2{}^*, & \det\|\sigma_i{}^p\| \leqslant 0 \end{cases} \tag{4.6}$$

$$U_1{}^* = \sup_{|x|_i>0} [|x|_i|\sigma|^i - U(|x|_i)]$$

$$U_2{}^* = \sup_{|x|_i>0} [\max(\psi_1, \psi_2, \psi_3) - U(|x|_i)]$$

$$\psi_1 = |x|_3|\sigma|^3 + |x|_2|\sigma|^2 - |x|_1|\sigma|^1$$

$$\psi_2 = |x|_3|\sigma|^3 + |\sigma|_1|x|^1 - |x|_2|\sigma|^2$$

$$\psi_3 = |x|_1|\sigma|^1 + |x|_2|\sigma|^2 - |x|_3|\sigma|^3$$

где $|x|_i$ и $|\sigma|_i$ — соответственно собственные значения тензоров $|x|_{pq}$ и $|\sigma|^{ps}$.

Доказательство. Подставим в (4.1) полярное разложение тензоров $x_p{}^i$ и $\sigma_i{}^p$

$$\bar{U}^*(\sigma_i{}^p) = \sup_{x_p{}^i \in (2.3)} [\,|\sigma|^{pq}\,|x|_{ps}\nu_q{}^s - U(|x|_{pq})] \tag{4.7}$$

где $\nu_q{}^s$ — тензор, удовлетворяющий условиям

$$g_0{}^{pq}\nu_p{}^s\nu_q{}^t = g_0{}^{st}, \quad \operatorname{sgn}\det\|\nu_q{}^s\| = \operatorname{sgn}\det\|\sigma_i{}^p\| \tag{4.8}$$

Будем вычислять верхнюю грань в (4.7) последовательно, беря сначала верхнюю грань по $\nu_q{}^s$, а затем по $|x|_{pq}$. Так как U не зависит от $\nu_q{}^s$, то нахождение верхней грани по $\nu_q{}^s$ сводится к вычислению величины

$$\sup_{\nu_q{}^s \in (4.8)} \theta_s{}^p\nu_p{}^s, \quad \theta_s{}^p = |\sigma|^{pq}\,|x|_{qs} \tag{4.9}$$

Из соосности тензоров $|\sigma|^{pq}$ и $|x|_{rs}$ собственные значения тензора $|\theta|^{pq}$ имеют вид

$$|\theta|^i = |x|^i\,|\sigma|^i, \quad i = 1,\ 2,\ 3 \tag{4.10}$$

(4.9), (4.10) и лемма 1 приводят к утверждению теоремы.

В случае анизотропной упругой среды вычисление $\bar{U}^*$ представляет сложную задачу. Укажем простой метод оценки минимального значения функционала (2.3) в этом случае.

Пусть $U(|x|_{pq})$ — плотность внутренней энергии, $s_1(|x|_{pq})$, $s_2(|x|_{pq})$, $s_3(|x|_{pq})$ — соответственно первый, второй, третий инварианты тензора $|x|_{pq}$. Рассмотрим функцию

$$U_1(r_1, r_2, r_3) = \inf_{|x|_{pq}:\, s_i = r_i,\ i = 1, 2, 3} U(|x|_{pq})$$

Очевидно, что $U_1 \leqslant U$. Функцию U_1 можно рассматривать как плотность внутренней энергии некоторого изотропного упругого материала, упругие характеристики которого «меньше» упругих характеристик исходного анизотропного материала.

Введем функционал

$$I_1(x^i) = \int_{V_0} U_1\,d\tau - l(x^i)$$

и обозначим через J_1 функционал, двойственный к I_1. Тогда

$$\sup_{\sigma_i{}^p \in (3.8)} (-J_1) \leqslant \inf_{x^i \in (2.1)} I_1 \leqslant \inf_{x^i \in (2.1)} I$$

5. Функция $\bar{U}^*$ для полулинейного материала.

1°. Особенно просто вычисляется функция $\bar{U}^*$ в случае полулинейного материала с нулевым коэффициентом Ламе λ. Из (4.6) имеем

$$U_1^* = {}^1\!/_4\mu^{-1}[|\sigma|_1{}^2 + |\sigma|_2{}^2 + |\sigma|_3{}^2] + |\sigma|_1 + |\sigma|_2 + |\sigma|_3$$

U_2^* — максимальное из значений в точке $|\sigma|_i$ функций $\psi(|\sigma|_1, |\sigma|_2, |\sigma|_3)$, $\psi(|\sigma|_3, |\sigma|_1, |\sigma|_2)$, $\psi(|\sigma|_2, |\sigma|_3, |\sigma|_1)$, где

$$\psi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = {}^1\!/_4\mu^{-1}[\alpha_1{}^2 + \alpha_2{}^2 + \beta^2] + \alpha_1 + \alpha_2 - \beta$$

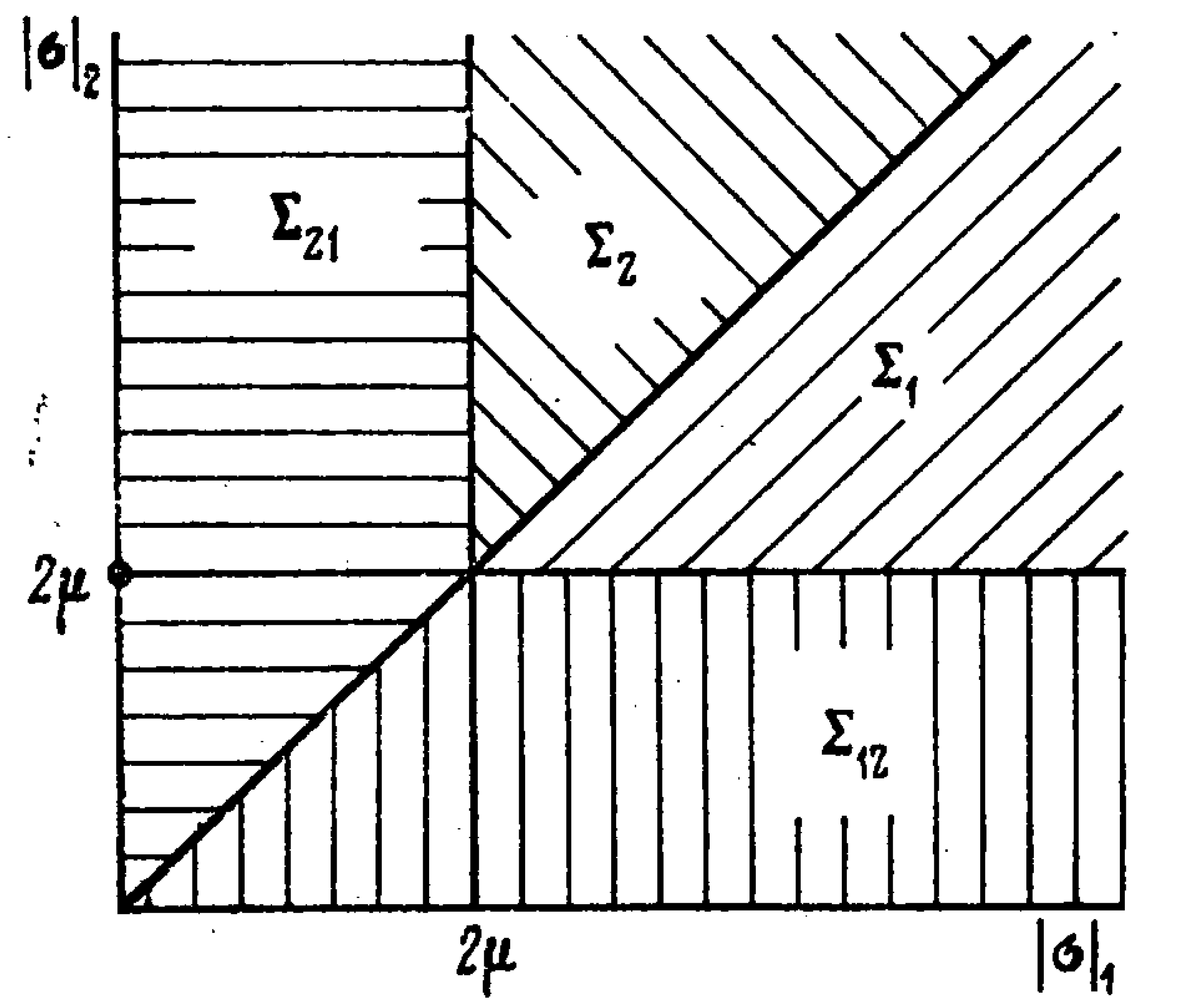
$$\beta = \begin{cases} \beta = \alpha_3, & \alpha_3 \leqslant 2\mu \\ \beta = 2\mu, & \alpha_3 > 2\mu \end{cases}$$

2°. Рассмотрим плоский случай: $x^\alpha = x^\alpha(\xi^1, \xi^2)$, $x^3 = \xi^3$ (греческие индексы пробегают значения *1*, *2*). Тогда $|\sigma|_3 = 0$, $\gamma_3 = 0$, преобразование Юнга $U(|x|_\alpha)$ имеет вид

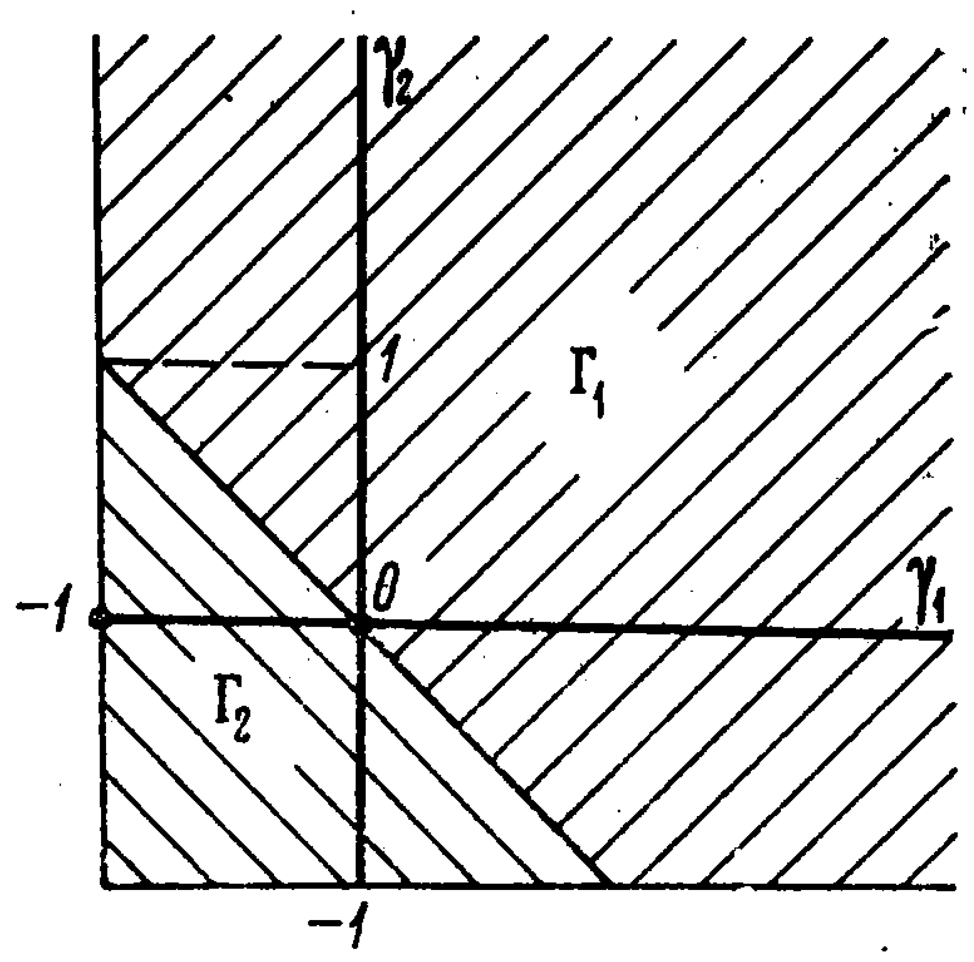
$$U_1{}^* = {}^1/_4\mu^{-1}[|\sigma|_1{}^2 + |\sigma|_2{}^2] + |\sigma|_1 + |\sigma|_2$$

$$U_2{}^* = \begin{cases} {}^1/_4\mu^{-1}[|\sigma|_1{}^2 + |\sigma|_2{}^2] + |\sigma|_1 - |\sigma|_2, & |\sigma|_\alpha \in \Sigma_{12} \\ \\ {}^1/_4\mu^{-1}|\sigma|_1{}^2 + |\sigma|_1 - \mu, & |\sigma|_\alpha \in \Sigma_1 \end{cases} \qquad (1 \leftrightarrow 2)$$

где Σ_{12}, Σ_{21}, Σ_1, Σ_2 — области в плоскости $(|\sigma|_1, |\sigma|_2)$, указанные на фиг. 1, а $|\sigma|_\alpha$ — собственные значения тензора $|\sigma|_{pq}$.



Фиг. 1



Фиг. 2

О характере огрубления, происходящем при переходе к двойственной вариационной задаче, позволяет судить функция $\bar{U}^{**}(x_p{}^i)$. Если $\bar{U}^{**} = \bar{U}$, то двойственная вариационная задача является точной переформулировкой исходной. Если $\bar{U}^{**}$ незначительно отличается от $\bar{U}$, то можно ожидать, что решение двойственной задачи в энергетической норме незначительно отличается от исходной.

Вычисление по формуле (3.3) дает

$$\bar{U}^{**}(x_p{}^i) = \begin{cases} \mu(\gamma_1{}^2 + \gamma_2{}^2), & \gamma_\alpha \in \Gamma_1 \\ {}^1/_2\mu(\gamma_1 - \gamma_2)^2, & \gamma_\alpha \in \Gamma_2 \end{cases}$$

где γ_α — собственные значения тензора $\gamma_{\alpha\beta}$, Γ_1, Γ_2 — области плоскости (γ_1, γ_2), указанные на фиг. 2.

Таким образом, $\bar{U}^{**} = \bar{U}$, если деформации лежат в области Γ_1. Эта область состоит из растяжений по обеим осям, а также сжатий по одной оси и растяжений по другой, при которых растяжение больше сжатия. В области Γ_2 (все остальные случаи) $\bar{U}^{**} < \bar{U}$, причем в Γ_2

$$\bar{U} - \bar{U}^{**} = {}^1/_2\mu(\gamma_1 + \gamma_2)^2 \tag{5.1}$$

Если твердое тело подвергается деформации, при которой γ_α лежат в области Γ_1, то двойственный принцип дает то же решение, что и исходный.

Если истинные деформации γ_1, γ_2 лежат в области Γ_2, то двойственный принцип не приведет к точному решению. Характер энергетической погрешности определяется равенством (5.1).

3°. Приведем результат вычисления функции $\bar{U}^*$ при $\lambda \neq 0$. По теореме 2

$$\bar{U}^*(\sigma_i^p) = \begin{cases} U_1^*(|\sigma|_1, |\sigma|_2, |\sigma|_3), & \sigma_i^p: \det\|\sigma_i^p\| \geqslant 0 \\ U_2^*(|\sigma|_1, |\sigma|_2, |\sigma|_3), & \sigma_i^p: \det\|\sigma_i^p\| < 0 \end{cases}$$

где $U_2^*(|\sigma|_i)$ — максимальное из значений в точке $|\sigma|_i$ функций $U_1^*(-|\sigma|_1, |\sigma|_2, |\sigma|_3)$, $U_1^*(|\sigma|_1, -|\sigma|_2, |\sigma|_3)$, $U_1^*(|\sigma|_1, |\sigma|_2, -|\sigma|_3)$.

Разобьем область изменения переменных $|\sigma|_1, |\sigma|_2, |\sigma|_3$ на десять областей $\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_1', \Sigma_1'', \Sigma_2, \Sigma_2', \Sigma_2'', \Sigma_3, \Sigma_3', \Sigma_3''$. Области Σ, $\Sigma_1\Sigma_1'\Sigma_1''$ определены соотношениями

$$\Sigma: |\sigma|_1 \geqslant \nu(|\sigma|_2 + |\sigma|_3) - E, \quad |\sigma|_2 \geqslant \nu(|\sigma|_1 + |\sigma|_3) - E, \quad |\sigma|_3 \geqslant \nu(|\sigma|_1 + |\sigma|_2) - E \tag{5.2}$$

$$\Sigma_1: |\sigma|_1 < \nu(|\sigma|_2 + |\sigma|_3) - E, \quad |\sigma|_2 \geqslant \sigma|\sigma|_3 - E/(1-\nu), \quad |\sigma|_3 \geqslant \sigma|\sigma|_2 - E/(1-\nu)$$

$$\Sigma_1': |\sigma|_1 < \nu(|\sigma|_2 + |\sigma|_3) - E, \quad 0 \leqslant |\sigma|_2 < \sigma|\sigma|_3 - E/(1-\nu)$$

$$\Sigma_1'': |\sigma|_1 < \nu(|\sigma|_2 + |\sigma|_3) - E, \quad 0 \leqslant |\sigma|_3 < \sigma|\sigma|_2 - E/(1-\nu)$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}, \quad E = \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda+\mu}\mu, \quad \sigma = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}$$

В этих областях функция $U_1^*(|\sigma|_i)$ имеет вид

$$\begin{aligned} &{}^1/_4\mu^{-1}\left[|\sigma|_1^2 + |\sigma|_2^2 + |\sigma|_3^2 - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}(|\sigma|_1 + |\sigma|_2 + |\sigma|_3)^2\right] + \\ &+ |\sigma|_1 + |\sigma|_2 + |\sigma|_3 \quad \text{в } \Sigma \\ &{}^1/_4\mu^{-1}\left[|\sigma|_2^2 + |\sigma|_3^2 - \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}(|\sigma|_2 + |\sigma|_3 - 2\mu)^2\right] + \\ &+ |\sigma|_2 + |\sigma|_3 - \mu \quad \text{в } \Sigma_1 \\ &\frac{(|\sigma|_3 + 2\lambda)^2}{2(\lambda+2\mu)} + |\sigma|_3 - 2(\lambda+\mu) \quad \text{в } \Sigma_1' \\ &\frac{(|\sigma|_2 + 2\lambda)^2}{2(\lambda+2\mu)} + |\sigma|_2 - 2(\lambda+\mu) \quad \text{в } \Sigma_1'' \end{aligned} \tag{5.3}$$

Области $\Sigma_2, \Sigma_2', \Sigma_2'', \Sigma_3, \Sigma_3', \Sigma_3''$ и значения функции U_1^* в этих областях получаются из (5.2) и (5.3) циклической перестановкой индексов.

Вид функции U_1^* можно существенно упростить, если рассмотреть окрестность ненапряженного состояния радиуса r_0 (нетрудно усмотреть, что точка (0, 0, 0) пространства переменных $(|\sigma|_1, |\sigma|_2, |\sigma|_3)$ принадлежит Σ, r_0 есть расстояние от точки (0, 0, 0) до каждой из плоскостей, ограничивающих Σ), $r_0 = E / \sqrt{1 + 2\nu^2}$.

Тогда в рассматриваемой окрестности при $\det\|\sigma_i^p\| \geqslant 0$

$$\bar{U}^*(\sigma_i^p) = {}^1/_4\mu\left[|\sigma|_1^2 + |\sigma|_2^2 + |\sigma|_3^2 - \frac{\nu}{1+\nu}(|\sigma|_1 + |\sigma|_2 + |\sigma|_3)^2\right] + |\sigma|_3 + |\sigma|_2 + |\sigma|_3$$

Если $\det \| \sigma_i^{p} \| < 0$

$$\bar{U}^*(\sigma_i^p) = {}^1/_4\,\mu \left[|\sigma|_1^2 + |\sigma|_2^2 + |\sigma|_3^2 - \frac{\nu}{1+\nu} (|\sigma|_1 + |\sigma|_2 - |\sigma|_3)^2 \right] + |\sigma|_1 + |\sigma|_2 - |\sigma|_3$$

где собственные значения тензора $|\sigma|^{pq}$ занумерованы в убывающем порядке.

Поступила 29 III 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Synge J. L.* The hypersicle in mathematical physics. Cambridge Univ. Press, 1957.
2. *Зубов Л. М.* Принцип стационарности дополнительной работы в нелинейной теории упругости. ПММ, 1970, т. 34, вып. 2.
3. *Koiter W. T.* On the principle of stationary complementary energy in the non-linear theory of elasticity. SIAM, J. Appl. Math., 1973, vol. 25, No. 3.
4. *Зубов Л. М.* О представлении градиента перемещений изотропного упругого тела через тензор напряжений Пиола. ПММ, 1976, т. 40, вып. 6.
5. *Laughaar H. L.* The principle of complementary energy in the non-linear elasticity theory. J. Franklin Inst., 1953, vol. 256, No. 3, p. 255—264.
6. *Pipes L. A.* The principle of complementary energy in non-linear elasticity. J. Franklin Inst., 1962, vol. 274, No. 3.
7. *Libove R.* Complementary energy method for finite deformations. J. Engng Mech. Dev., Proc. Amer. Soc. Civ. Engng, 1974, vol. 6.
8. *Levinson M.* The complementary energy theorem in elasticity. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1965, vol. 32, No. 4.
9. *Christoffersen J.* On Zubov's prinsiple of stationary complementary energy in the non-linear theory of elasticity. DCAMSU, Re 44, April 1973.
10. *Де Вебеке Б. Ф.* Новый вариационный принцип в теории упругости с конечными деформациями. В сб.: Успехи механики деформируемых сред. М., «Наука», 1975.
11. *Koiter W. T.* Complementary energy, neutral equilibrium and buckling. Proc. Koninkl. Nederl. Acad. wet. B, 1976, vol. 79, No. 3.
12. *Лурье А. И.* Теория упругости. М., «Наука», 1970.
13. *Stumpf H.* Dual extramum prinsiples and error bounds in the theory of plates with large defections. Arch. mech. stosowanej, 1975, vol. 27, No. 3.
14. *Боголюбов Н. Н.* О некоторых новых методах в вариационном исчислении. В кн.: Избранные труды, т. 1. Киев, «Наукова думка», 1969.
15. *Ekeland I., Temam R.* Analyse convexe et problemes variationels. Paris, Dunod, Gautier Villars, 1974.
16. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды, т. 2. М., «Наука», 1973.
17. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М., «Наука», 1976.
18. *Бердичевский В. Л.* Об одном вариационном принципе. Докл. АН СССР, 1974, т. 215, № 6.
19. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М., «Мир», 1973.