Прикладная математика и механика. Том 43, 1979

УДК 534.2:532

ДИАГРАММА РАССЕЯНИЯ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ НА ВЫПУКЛОЙ ОБОЛОЧКЕ

А. П. Качалов

(Ленинград)

При помощи анализа дифракционного поля вблизи выпуклой оболочки построена высокочастотная асимптотика диаграммы рассеяния плоской звуковой волны. Выражение для диаграммы рассеяния найдено в виде интеграла по поверхности оболочки, зависящего от давления и его нормальной производной. При помощи метода стационарной фазы определена асимптотика интеграла при больших углах между направлением падающего поля и направлением наблюдения. Исследована асимптотика при малых углах.

1. Интегральная формула диаграммы рассеяния. Пусть на тонкую выпуклую оболочку, помещенную в жидкость, падает в направлении θ_0 плоская, высокочастотная звуковая волна $P_+ = \exp\{-i[\omega t - k(\mathbf{r}, \theta_0)]\}$. Вне оболочки давление удовлетворяет уравнению Гельмгольца. Зависимость полей давления от времени, сводящаяся к наличию множителя $\exp(-i\omega t)$, далее не указывается, а этот множитель опускается. Колебания оболочки описываются уравнениями теории тонких оболочек [1], к которым добавлено условие равенства нормальных составляющих скорости оболочки и жидкости на оболочке.

Так как рассеянное оболочкой поле (P_-) удовлетворяет уравнению Гельмгольца и условиям излучения на бесконечности, то согласно формуле Грина

$$P_-(r\theta) = \frac{1}{4\pi}\int_S \left\{\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ik\rho}}{\rho}\right)P_- - \frac{e^{ik\rho}}{\rho}\frac{\partial P_-}{\partial n}\right\} ds \tag{1.1}$$

Здесь S — поверхность оболочки, k — волновое число, θ_0 и θ — единичные векторы в направлении падающего поля и направлении наблюдения, r и ρ — расстояния от точки наблюдения до начала координат и точки на поверхности, n — внешняя нормаль к оболочке. Считаем, что начало координат находится внутри оболочки. Для больших расстояний до точки наблюдения

$$\frac{e^{ik\rho}}{\rho} = \frac{\exp\{ik[r-(\theta, \mathbf{r})]\}}{r}\left(1 + O\left(\frac{\mu^2}{kr}\right)\right) \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ik\rho}}{\rho}\right) = -ik(\theta, \mathbf{n})\frac{\exp\{ik[r-(\theta, \mathbf{r})]\}}{r}\left(1 + O\left(\frac{\mu^2}{kr}\right)\right)$$

$$\mu = D/\lambda$$

Здесь D — максимальное расстояние точек оболочки от начала координат, λ — длина волны. В силу высокочастотности падающего поля μ велико, поэтому для того, чтобы поправка в (1.2) была мала, нужно выполнение условия $kr \gg \mu^2$. Из (1.1) и (1.2) для больших r получим

$$P_-(r\theta) = e^{ikr}r^{-1} f(\theta) [1 + O(\mu^2 / (kr))]$$

Для функции $f(\theta)$, которая называется «диаграммой рассеяния», справедлива формула

$$f(\theta) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_S \left\{\frac{\partial P_-}{\partial n} + ik(\theta, \mathbf{n}) P_-\right\} \exp\{-ik(\theta, \mathbf{r})\} ds$$

Определим теперь P_- вблизи оболочки. Построение дифракционного поля вблизи оболочки для случая $kh \ll 1$ (h — толщина оболочки) приведено в работе [2] (см. также [3]). Аналогичным образом могут быть получены формулы и для произвольного kh. Выражения для P_- различны в освещенной, теневой и полутеневой областях. Под полутеневой областью понимается область шириной $\sim \mu^{-1/3+\varepsilon}$, окружающая контур L — границу, отделяющую область геометрической тени от освещенной области на оболочке.

В освещенной области вне полутени

$$P_- \sim -[(1 - A) / (1 + A)] \exp\{ik\tau_-\}$$

$$A = \frac{i(\theta_0, \mathbf{n})}{\rho_2 a^2}\left[\rho_1 kha^2 - \frac{E(kh)^3}{12(1-\sigma^2)}(\nabla_2 x)^4 - \frac{\beta}{\Lambda}\right]$$

$$\beta = Eh\left\{\frac{1}{h_1^2 R_2}\left(\frac{\partial x}{\partial x_1}\right)^2 + \frac{1}{h_2^2 R_1}\left(\frac{\partial x}{\partial x_2}\right)^2\right\}^2$$

$$\Lambda = k\{(\nabla_2 x)^2 - \rho_1 a^2 (1 - \sigma^2) / E\}\{(\nabla_2 x)^2 - 2\rho_1 a^2 (1 + \sigma) / E\}$$

Здесь τ_- — эйконал отраженного поля, x_i, h_i, R_i — координаты линий кривизны на поверхности оболочки, коэффициенты Ламе и радиусы кривизны, ρ_1 и ρ_2 — плотность оболочки и жидкости вне оболочки, E и σ — модуль Юнга и коэффициент Пуассона, a — скорость звука в жидкости, $x = (\theta_0, \mathbf{r})$, ∇_2 — оператор Гамильтона в координатах (x_1, x_2).

Рассмотрим систему координат (y, z) на поверхности оболочки; координата z характеризует положение точки на контуре L, y — с точностью до знака длина геодезической, выпущенной из контура L в направлении θ_0, при этом y имеет знак плюс в теневой и минус в освещенной зоне на оболочке,

$$s = (k / (2R^2))^{1/3} y, \quad \nu = (2k^2 / R)^{1/3} n$$

Здесь R — радиус кривизны геодезической. Тогда в полутеневой области

$$P_- \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\{ik\tau(y, z)\} \int\limits_l e^{is\zeta} G(\zeta) w_1(\zeta - \nu) d\zeta$$

$$l = l_1 \cup l_2 \cup l_3 = l_-(0, 2\pi/3) \cup l_-(0, 4\pi/3) \cup l_+(0, 0)$$

$$\tau(y, z) = x(0, z) + y$$

$$G(\zeta) = -[v(\zeta) + Cv'(\zeta)] / [w_1(\zeta) + Cw_1'(\zeta)]$$
$$C = \left(\frac{2}{kR}\right)^{1/3} \left\{\frac{\rho_1}{\rho_2} kh - \frac{E(kh)^3}{12\rho_2 a^2 (1-\sigma^2)} - \frac{\beta_1}{\Lambda_1}\right\}$$
$$\beta_1 = E(kh)(R^{-1} - R_1^{-1} - R_2^{-1})^2$$
$$\Lambda_1 = \rho_2 (ka)^2 [1 - \rho_1 a^2 (1-\sigma^2) / E][1 - 2\rho_1 a^2 (1+\sigma) / E]$$

Здесь v и w_1 — функции Эйри; $l_+(b, \varphi)$ — луч на комплексной плоскости, выходящий из точки b и составляющий угол φ с вещественной осью, а $l_-(b, \varphi)$ — тот же контур, но проходимый в противоположном направлении.

В тени $P_- = -P_+$ с точностью до экспоненциально малых по μ членов.

Пусть $\{\chi_i\}_{i=1}^3$ — разбиение единицы на поверхности оболочки, где носитель χ_1 лежит в освещенной области, носитель χ_2 — в полутени, а носитель χ_3 — в теневой области. Тогда диаграмму рассеяния можно представить в виде суммы трех интегралов

$$f(\theta) = \sum_{m=1}^{3} f_m(\theta)$$

Для $f_m(\theta)$ $(m = 1, 2, 3)$ получим следующие формулы:

$$f_1(\theta) = \frac{ik}{4\pi} \int_S \chi_1 (\theta - \theta_0, \mathbf{n}) \frac{1-A}{1+A} \exp\{-ik(\theta - \theta_0, \mathbf{r})\} ds \tag{1.3}$$

$$f_2(\theta) = \frac{-\pi^{-3/2}}{4} ik \int_S \chi_2 \exp\{ik(\tau - (\theta, \mathbf{r}))\} \int_l e^{is\zeta} G(\zeta) \times$$
$$\times \left[(\theta, \mathbf{n}) w_1(\zeta) + i\left(\frac{2}{kR}\right)^{1/3} w_1'(\zeta)\right] d\zeta\, ds$$
$$f_3(\theta) = \frac{ik}{4\pi} \int_S \chi_3 (\theta + \theta_0, \mathbf{n}) \exp\{-ik(\theta - \theta_0, \mathbf{r})\} ds$$

2. Асимптотика диаграммы рассеяния при $|\theta - \theta_0| \gg \mu^{-1/3+\varepsilon}$. Определим расположение критических точек интегралов (1.3). Для интегралов $f_1(\theta)$ и $f_3(\theta)$ они определяются из условий

$$(\theta - \theta_0, \partial\mathbf{r} / \partial x_i) = 0, \quad i = 1, 2$$

Отсюда следует, что в критических точках

$$\mathbf{n}(x_1, x_2) = \pm (\theta - \theta_0) / |\theta - \theta_0| \tag{2.1}$$

Знак плюс соответствует критической точке, лежащей в освещенной области, минус — критической точке, лежащей в тени. Эти точки простые, так как определитель матрицы вторых производных фазы по координатам x_1, x_2 не равен нулю.

Критические точки $f_2(\theta)$ определяются из условий

$$\partial\tau / \partial y = (\theta, \partial\mathbf{r} / \partial y), \quad \partial\tau / \partial z = (\theta, \partial\mathbf{r} / \partial z)$$

Отсюда получаем в этих точках

$$\partial\mathbf{r} / \partial y = \theta \tag{2.2}$$

Критические точки этого типа уже не являются простыми, так как матрица вторых производных от фазы имеет ранг единица.

Определим теперь асимптотику интегралов при $|\theta - \theta_0| \geqslant \mu^{-1/3+\varepsilon}$. Пусть указанное неравенство выполняется для некоторого малого $\varepsilon > 0$. Из (2.1) и (2.2) следует, что можно выбрать разбиение единицы так, что критические точки интеграла $f_2(\theta)$ лежат вне носителя, а в критических точках интегралов $f_1(\theta)$ и $f_3(\theta)$ значения χ_1 и χ_3 равны единице. Отметим, что так как $(\theta + \theta_0, \theta - \theta_0) = 0$, то значение подынтегральной функции последнего интеграла (1.3) в стационарной точке равно нулю. Отсюда $f_3(\theta) = O(\mu^{-2/3})$. В силу выбора разбиения единицы значение $f_2(\theta)$ экспоненциально мало. Применяя к первому интегралу (1.3) метод стационарной фазы [4], получим

$$f(\theta) = \varkappa^\circ \exp\{-ik(\theta - \theta_0, \mathbf{r}^\circ)\}\,(1 + O[(\mu\,|\theta - \theta_0|)^{-1}]) \tag{2.3}$$

$$\varkappa^\circ = \frac{i\exp(i\pi/2)\,h_1^\circ h_2^\circ}{2(|\det(\theta - \theta_0, \partial^2\mathbf{r}^\circ/\partial x_i\,\partial x_j)|)^{1/2}}\,\frac{1 - A^\circ}{1 + A^\circ}(\theta - \theta_0, \mathbf{n}^\circ)$$

Здесь U° равно значению величины U ($U = h_1, h_2, \mathbf{r}, A, \mathbf{n}$) в критической точке (x_1°, x_2°), для которой $\mathbf{n}(x_1^\circ, x_2^\circ) = (\theta - \theta_0)/|\theta - \theta_0|$. Из (2.3) следует

$$f(\theta) \sim -\frac{1}{2}(K^\circ)^{-1/2}\frac{1 - A^\circ}{1 + A^\circ}\exp\{-ik(\theta - \theta_0, \mathbf{r}^\circ)\} \tag{2.4}$$

Здесь K — гауссова кривизна. Формула (2.4) согласуется с результами работы [5].

3. Асимптотика диаграммы рассеяния при $\mu^{-1} \ll |\theta - \theta_0| \leqslant \mu^{-1/3+\varepsilon}$. Выбором разбиения единицы добьемся того, что критические точки первого и третьего интегралов (1.3) будут лежать вне носителей χ_1 и χ_3, откуда следует экспоненциальная малость этих интегралов. Применение метода стационарной фазы к интегралу $f_2(\theta)$ невозможно, так как лежащие внутри носителя χ_2 критические точки не являются простыми.

Существуют две критические точки второго интеграла (1.3), удовлетворяющие условию (2.2). Одна из них (y_1, z_1) лежит в освещенной области ($y_1 < 0$), другая (y_2, z_2) — в тени ($y_2 > 0$). Представим χ_2 в виде $\chi_{21} + \chi_{22}$, где $\chi_{2i} \in C^\infty$, $0 \leqslant \chi_{2i} \leqslant 1$ и носитель χ_{2i} включает полосу геодезических, содержащих одну критическую точку (y_i, z_i). Соответственно $f_2(\theta)$ представляется в виде $f_{21}(\theta) + f_{22}(\theta)$. Запишем $\tau - (\theta, \mathbf{r})$ для интеграла $f_{2i}(\theta)$ в виде

$$\tau(y, z) - (\theta, \mathbf{r}(y, z)) = \Phi_i(z) + \left(\theta, \frac{\partial\mathbf{r}(y_i, z_i)}{\partial y}\right)(y - y_i) -$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\theta, \frac{\partial^n\mathbf{r}(y_i, z)}{\partial y^n}\right)\frac{(y - y_i)^n}{n!}$$

$$\Phi_i(z) = \tau(y_i, z) - (\theta, \mathbf{r}(y_i, z))$$

Так как $|y|, |y_i| = O(\mu^{-1/3+\varepsilon})$ для всякого $\varepsilon > 0$, то

$$k\,|\tau(y, z) - (\theta, \mathbf{r}(y, z)) - \Phi_i(z)| = O(\mu^{3\varepsilon})$$

Таким образом, быстро осциллирующие члены в $f_{2i}(\theta)$ зависят только от z и имеют по одной стационарной точке внутри носителя. Следовательно, к интегралу по z применим метод стационарной фазы, согласно которому из (1.3) следует

$$f_2(\theta) \sim \sum_{m=1}^{2} \Omega_m(\theta) \exp\{ik(\tau_m - (\theta, \mathbf{r}_m))\} N_m \tag{3.1}$$

$$\Omega_m = \frac{k^{-1/6}(g_m)^{1/2} \exp(\pm i\pi/4)}{2^{1/3}\pi\, |\partial t_m{}^2 / \partial y|^{1/2}}, \quad t_m{}^2 = \left(\frac{\partial \mathbf{r}_m}{\partial z}, \frac{\partial \mathbf{r}_m}{\partial z}\right)$$

$$N_m = \int\limits_{l} \int\limits_{-\mu^\varepsilon}^{\mu^\varepsilon} \chi_{2m} \exp\left\{is\zeta + \frac{i}{3}(s - s_m)^3\right\} \sigma_m(s - s_m, \zeta)\, d\zeta\, ds$$

$$\sigma_m(x, \zeta) = [w_1'(\zeta) - ixw_1(\zeta)]\, G_m(\zeta)$$

Здесь g — определитель метрического тензора поверхности в координатах (y, z); индекс m означает, что соответствующая величина вычисляется в точке (y_m, z_m).

Интеграл (3.1) содержит экспоненту от полинома третьей степени по s. Отсюда следует, что его асимптотика должна содержать интегралы по ζ от функций Эйри и их производных.

Для $\zeta \in l_2 \cup l_3$ имеет место тождество

$$\sigma_m(x, \zeta) = \sigma_m^{(1)}(x, \zeta) + \sigma_m^{(2)}(x, \zeta)$$

$$\sigma_m^{(1)} = -v'(\zeta) + ixv(\zeta)$$

$$\sigma_m^{(2)} = (1 + iC_m x) / [w_1(\zeta) + C_m w_1'(\zeta)]$$

Тогда интеграл N_m представляется в виде $N_m = I_m^{(1)} + I_m^{(2)}$, где

$$I_m^{(n)} = \int\limits_{l} \int\limits_{-\mu^\varepsilon}^{\mu^\varepsilon} \chi_{2m} \exp\left\{is\zeta + \frac{i}{3}(s - s_m)^3\right\} \sigma_m^{(n)}(s - s_m, \zeta)\, d\zeta\, ds$$

Интеграл $I_m^{(1)}$ после интегрирования по ζ, а затем интегрирования по частям по s принимает вид

$$I_m^{(1)} = -\frac{\sqrt{\pi}}{s_m} \int\limits_{-\mu^\varepsilon}^{\mu^\varepsilon} \frac{d\chi_{2m}}{ds} \exp\left\{-iss_m(s - s_m) - \frac{i}{3} s_m{}^3\right\} ds$$

Этот интеграл выбором разбиения единицы можно сделать малым $\sim \mu^{-1/6}$.

Исследуем интеграл $I_m^{(2)}$. Продолжим при $s_m > 0$ интервал $(-\mu^\varepsilon, \mu^\varepsilon)$ до контура $l_-(-\mu^\varepsilon, 5\pi/6) \cup [-\mu^\varepsilon, \mu^\varepsilon] \cup l_+(\mu^\varepsilon, \pi/6)$. Затем деформируем этот конур в $l_-(s_m, 5\pi/6) \cup l_+(s_m, \pi/6)$. Аналогично при $s_m < 0$ преобразуем интервал $(-\mu^\varepsilon, \mu^\varepsilon)$ в контур $l_-(s_m, 3\pi/2) \cup l_+(s_m, \pi/6)$.

Заменим в интеграле $I_m^{(2)}$ интегрирование по промежутку $(-\mu^\varepsilon, \mu^\varepsilon)$ на интегрирование по соответствующим контурам. Изменение интеграла при такой замене степенным образом мало по μ. Тогда интеграл по s выражается через функцию Эйри и ее производную. Отсюда получим асимптотику для N_m

$$N_m \sim 2\sqrt{\pi} M_m = 2\sqrt{\pi}\left\{\frac{i}{2}\int\limits_{l_2} e^{is_m\zeta} R_1^{(1)}(\zeta)\,d\zeta + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{l_3} e^{is_m\zeta} R_2^{(1)}(\zeta)\,d\zeta - \frac{1}{2s_m}\right\}$$

$$R_1^{(1)} = \frac{w_2 + C_m w_2'}{w_1 + C_m w_1'}, \quad R_2^{(1)} = \frac{v + C_m v'}{w_1 + C_m w_1'}$$

Так как

$$\tau_m \sim (\theta_0, \mathrm{r}_m) + k^{-1} s_m^3 / 3 \tag{3.2}$$

$$\tfrac{1}{2}\partial t_m^2 / \partial y \sim -K_m s_m g_m (2R_m / k)^{1/3}$$

K_m — гауссова кривизна в точке (y_m, z_m)) получим окончательное выражение для диаграммы рассеяния при $\mu^{-1} \ll |\theta - \theta_0| \leqslant \mu^{-1/3+\varepsilon}$ в виде

$$f(\theta) \sim \sum_{m=1}^{2} |K_m \pi s_m|^{-1/2} \exp\left\{-ik(\theta - \theta_0, \mathrm{r}_m) + \frac{i}{3} s_m^3 \pm \frac{i\pi}{4}\right\} M_m \tag{3.3}$$

4. Диаграмма рассеяния при $|\theta - \theta_0| \lesssim \mu^{-1}$. Из результатов п. 2, 3 следует, что большим параметром в интегралах является величина $|\theta - \theta_0|\,\mu$. Тогда в указанном диапазоне θ подынтегральные функции нельзя считать быстро осциллирующими.

Следовательно, $f_2(\theta) = O(\mu^{-1/3+\varepsilon})$, $(\theta - \theta_0, \mathrm{n}) = O(\mu^{-1})$, $f_1(\theta) = O(1)$. Заменив в третьем соотношении (1.3) θ на θ_0, имеем

$$f(\theta) \sim f_3(\theta) \sim \frac{ik}{2\pi}\int\limits_S \chi_3(\theta_0, \mathrm{n}) \exp\{-ik(\theta - \theta_0, \mathrm{r})\}\,ds \tag{4.1}$$

Дальнейшие упрощения возможны лишь в случае $|\theta - \theta_0|\,\mu \ll 1$. Заменив экспоненту в интеграле (4.1) на единицу, получим интеграл по теневой части поверхности равным площади проекции оболочки S в направлении θ_0, т. е.

$$f(\theta) \sim ikS / (2\pi) \tag{4.2}$$

Укажем, что формулы (2.4), (3.3), (4.1) и (4.2) для диаграммы рассеяния согласованы друг с другом. Формула (2.4), справедливая для больших углов наблюдения между направлением падающего поля и направлением наблюдения, следует также непосредственно из лучевого метода. При малых углах лучевые формулы теряют справедливость и решение становится более сложным. Отметим, что при переходе к малым углам между θ и θ_0 интегралы Френеля, которые имеют место в полутени на конечных расстояниях от поверхности, не возникают.

Замечание. Те же результаты можно получить для задач Дирихле и Неймана во внешности выпуклой области в R^3. Соответствующие формулы для задачи Неймана получаются из формул (2.4) и (3.3) формальной подстановкой $A \equiv \infty$, $C \equiv \infty$, а для задачи Дирихле — подстановкой $A \equiv 0$, $C \equiv 0$. Доказательство полученных формул проводится аналогично [6].

Заметим, что для рассеяния плоской высокочастотной электромагнитной волны на идеально проводящем круговом цилиндре аналогичные результаты получены из анализа точного решения в работе [7].

Поступила 6 I 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек. Л., Судпромгиз, 1962.
2. *Качалов А. П.* Некоторые формулы для задачи дифракции на выпуклой оболочке. Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. матем. ин-та АН СССР, 1976, т. 62.
3. *Бабич В. М., Булдырев В. С.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М., «Наука», 1972.
4. *Маслов В. П.* Теория возмущений и асимптотические методы. Изд-во МГУ, 1965.
5. *Majda A.* High frequency asymptotics for the scattering matrix and the inverse problem of acoustical scattering. Commun. Pure and Appl. Math., 1976, vol. 29, No. 3, p. 261—291.
6. *Бабич В. М.* О строгом оправдании коротковолнового приближения в трехмерном случае. Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. матем. ин-та АН СССР, 1973, т. 34.
7. *Горяинов А. С.* Асимптотическое решение задачи о дифракции плоской электромагнитной волны на проводящем цилиндре. Радиотехника и электроника, 1958, т. 3, № 5.