

**ОБ АКУСТИЧЕСКОМ ПОЛЕ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА
В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ОБЪЕМЕ,
ОГРАНИЧЕННОМ ТОНКИМИ УПРУГИМИ СТЕНКАМИ**

Д. П. Коузов

(Ленинград)

Находится аналитическое выражение для функции Грина уравнения Гельмгольца в прямоугольнике. На сторонах прямоугольника заданы граничные условия, содержащие производные высокого порядка, а в вершинах — гранично-контактные условия. Данная гранично-контактная задача возникает при исследовании акустического поля в прямоугольном объеме, ограниченном тонкими упругими стенками. Работа является продолжением работ [1, 2], в которых рассмотрены сходные задачи для четвертьплоскости и полуполосы.

1. Постановка задачи. Примеры. Будем искать решение двумерного уравнения Гельмгольца

$$(1.1) \quad (\Delta + k^2)P(x, y) = -\delta(x - x_0, y - y_0)$$

в прямоугольнике $0 < x < a$, $0 < y < b$ при граничных условиях

$$(1.2) \quad L_1 \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) P(x, 0) = 0, \quad L_2 \left(\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y} \right) P(x, b) = 0$$

$$0 < x < a$$

$$(1.3) \quad L_3 \left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x} \right) P(0, y) = 0, \quad L_4 \left(\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial x} \right) P(a, y) = 0$$

$$0 < y < b$$

Здесь P — акустическое давление в среде, Δ — оператор Лапласа, k — волновое число, которое будем считать комплексным ($0 < \arg k < \pi/4$), учитывая тем самым поглощение в среде. Полученное ниже решение окажется, однако, справедливым и для случая идеальной среды ($\arg k = 0$), но при том условии, что k^2 не является собственным числом задачи. Зависимость от времени условимся подразумевать в виде множителя $e^{-i\omega t}$. Граничные операторы L_α ($\alpha = 1, 2, 3, 4$) представляют собою линейные дифференциальные операторы порядка N_α с постоянными коэффициентами. Вид их определим формулой

$$(1.4) \quad L_\alpha(\xi, \eta) = \eta m_{\alpha 1}(-\xi^2) + m_{\alpha 2}(-\xi^2)$$

где $m_{\alpha 1}$ и $m_{\alpha 2}$ — полиномы. На алгебраические свойства этих полиномов будут наложены в дальнейшем некоторые ограничения.

Искомое решение должно быть непрерывным в рассматриваемой области вплоть до границы, за исключением точки приложения источника (x_0, y_0) .

Для случая простейших граничных условий Дирихле ($L_\alpha = 1$) или Неймана ($L_\alpha = \eta$) поставленная задача имеет единственное решение, которое может быть найдено элементарно разложением в ряд Фурье или методом изображений. При граничных операторах, порядок которых превышает единицу, решение утрачивает единственность и содержит N произвольных постоянных. Число этих постоянных может быть найдено по формулам

$$(1.5) \quad N = N_{13} + N_{14} + N_{23} + N_{24}$$

$$N_{\alpha\beta} = E \left(\frac{N_\alpha + N_\beta - 1}{2} \right)$$

$$(\alpha = 1, 2; \beta = 3, 4)$$

где $E(x)$ — целая часть числа x .

Произвол в решении устраняется после включения в постановку задачи N гранично-контактных условий, задающих режим в угловых точках области.

$$R_{\alpha\beta s} P(x_\beta, y_\alpha) + R_{\beta\alpha s} P(x_\beta, y_\alpha) = 0 \quad (\alpha = 1, 2; \beta = 3, 4; s = 1, 2, \dots, N_{\alpha\beta})$$

Здесь

$$R_{\alpha\beta s} P(x_\beta, y_\alpha) = \lim_{x \rightarrow x_\beta} \left[(-1)^{\alpha+1} \frac{\partial}{\partial y} r_{\alpha\beta s1} \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right) + r_{\alpha\beta s2} \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] P(x, y_\alpha)$$

$$R_{\beta\alpha s} P(x_\beta, y_\alpha) = \lim_{y \rightarrow y_\alpha} \left[(-1)^{\beta+1} \frac{\partial}{\partial x} r_{\beta\alpha s1} \left(-i \frac{\partial}{\partial y} \right) + r_{\beta\alpha s2} \left(-i \frac{\partial}{\partial y} \right) \right] P(x_\beta, y)$$

$$x_3 = 0, \quad x_4 = a, \quad y_1 = 0, \quad y_2 = b$$

$r_{\alpha\beta sj}$ и $r_{\beta\alpha sj}$ ($j = 1, 2$) — полиномы своих аргументов.

Пример 1. Акустическое поле точечного источника в прямоугольной области, ограниченной тонкими изгибно колеблющимися пластинами. В этом случае для граничных операторов имеем

$$L_\alpha(\xi, \eta) = \eta(\xi^4 - \kappa_\alpha^4) + \nu_\alpha, \quad \nu_\alpha = \rho\omega^2/D_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4)$$

где κ_α — волновое число изгибных волн в пластине, ρ — плотность среды, D_α — цилиндрическая жесткость пластины.

Для полного описания данной модели необходимо знать механический режим на стыках пластин в угловых точках области (спай, шарнирное соединение, трещина и т. п.). Этот режим в каждой из вершин прямоугольника определяется четырьмя гранично-контактными равенствами, таким образом, в соответствии с (1.5) здесь $N = 16$. Будем считать пластины жестко спаянными. В таком случае набор гранично-контактных равенств для каждой из угловых точек (x_β, y_α) ($\alpha = 1, 2; \beta = 3, 4$) имеет вид

$$\lim_{x \rightarrow x_\beta} \frac{\partial P(x, y_\alpha)}{\partial y} = 0, \quad \lim_{y \rightarrow y_\alpha} \frac{\partial P(x_\beta, y)}{\partial x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_\beta} \frac{\partial^2 P(x, y_\alpha)}{\partial x \partial y} + \lim_{y \rightarrow y_\alpha} \frac{\partial^2 P(x_\beta, y)}{\partial y \partial x} = 0$$

$$(-1)^\alpha D_\alpha \lim_{x \rightarrow x_\beta} \frac{\partial^3 P(x, y_\alpha)}{\partial x^2 \partial y} - (-1)^\beta D_\beta \lim_{y \rightarrow y_\alpha} \frac{\partial^3 P(x_\beta, y)}{\partial y^2 \partial x} = 0$$

Первые два равенства означают отсутствие смещений пластины в местах их спая, третье равенство — неизменность угла между пластинами, четвертое — отсутствие стороннего вращающего момента в местах спая пластин.

В [3] приведены также другие возможные примеры граничных операторов. В частности, учет продольных движений пластин привел бы к операторам L_α седьмого порядка. В этом случае потребовалось бы указать по шесть гранично-контактных условий в каждом из вершин прямоугольника.

Пример 2. Задача о звукопрозрачности перегородки, разделяющей два идентичных прямоугольных помещения. Тонкая упругая перегородка делит прямоугольное помещение, ограниченное тонкими упругими стенками, на два отсека. Требуется найти акустическое поле, возбужденное точечным источником, которое действует в одном из отсеков.

Будем считать, что ось Oy направлена вдоль перегородки. Задача сводится к отысканию решения уравнения Гельмгольца (1.1) ($0 < |x| < a$, $0 < y < b$) при граничных условиях (1.2), выполненных при ($0 < |x| < a$), граничном условии

$$L_3 \left(\frac{\partial}{\partial y}, \pm \frac{\partial}{\partial x} \right) P(\mp a, y) = 0 \quad (0 < y < b)$$

условиях сопряжения

$$\frac{1}{2} m_{41} \left(-\frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left[\frac{\partial P(+0, y)}{\partial x} + \frac{\partial P(-0, y)}{\partial x} \right] +$$

$$+ m_{42} \left(-\frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) [P(+0, y) - P(-0, y)] = 0$$

$$\frac{1}{2} m_{51} \left(-\frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left[\frac{\partial P(+0, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(-0, y)}{\partial x} \right] +$$

$$+ m_{52} \left(-\frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) [P(+0, y) + P(-0, y)] = 0$$

$$(0 < y < b)$$

и гранично-контактных условиях, выполненных в точках $(0, 0)$, $(0, b)$, $(\pm a, 0)$ и $(\pm a, b)$.

Разлагая поле на четную и нечетную части относительно переменной x

$$P(x, y) = P_+(x, y) + P_-(x, y), \quad P_\pm(x, y) = 1/2 [P(x, y) \pm P(-x, y)]$$

разобьем задачу на две, каждая из которых может рассматриваться в области $0 < x < a$, $0 < y < b$.

В частности, если учитывать только изгибные колебания перегородки, условия сопряжения принимают вид

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} - \kappa_4^4 \right) \left[\frac{\partial P(+0, y)}{\partial x} + \frac{\partial P(-0, y)}{\partial x} \right] +$$

$$+ \nu_4 [P(+0, y) - P(-0, y)] = 0$$

$$\frac{\partial P(+0, y)}{\partial x} = \frac{\partial P(-0, y)}{\partial x}$$

При этом нечетная задача отличается от задачи из примера 1 лишь удвоением некоторых коэффициентов, а в четной задаче при $x = 0$ имеет место условие Неймана.

Пример 3. Задача об акустике прямоугольного помещения, разделенного двумя перпендикулярными перегородками на четыре идентичных отсека. Разлагая поле на четную и нечетную части по каждой из пространственных переменных, можно свести задачу к четырем самостоятельным задачам рассматриваемого типа.

Задачи, в постановке которых участвуют граничные условия «второго порядка» (гранично-контактные условия), принято называть гранично-

контактными [4]. Традиционная процедура нахождения аналитического решения гранично-контактной задачи предполагает предварительное нахождение общего решения, т. е. решения, удовлетворяющего всем условиям задачи, кроме гранично-контактных. Такое решение в двумерных задачах содержит некоторое число N аддитивных произвольных постоянных (в рассматриваемом случае число N определяется формулами (1.5)). Это общее решение может быть представлено в виде суммы частного решения неоднородной задачи P_0 и общего решения однородной задачи Q .

Точки границы, в которых ставятся гранично-контактные условия, будем называть точками контакта или контактными. В предположении, что в контактных точках не действует источник поля, функцию P_0 можно выбирать таким образом, что в этих точках она будет иметь непрерывные производные по координатам всех порядков, которые фигурируют в гранично-контактных условиях. Такой выбор P_0 однозначен. В рассматриваемом случае, как это будет видно из получаемого ниже явного выражения для P_0 , это поле имеет в контактных точках непрерывные производные всех порядков.

Слагаемое Q представляет собою поле, расходящееся от точек контакта. Само поле Q является непрерывным в рассматриваемой области вплоть до границы, но несет в себе разрывы производных полного поля P в точках контакта.

В целях облегчения процедуры нахождения решения оба слагаемых поля будем искать порознь. При этом полезно иметь в виду результаты работ [1,2], в которых получены решения задач, родственных данной.

2. Частное решение неоднородной задачи. Рассмотрим предварительно вспомогательную задачу, состоящую в нахождении решения уравнения Гельмгольца (1.1) в полосе ($|x| < \infty$, $0 < y < b$) при граничных условиях (1.2), выполненных при всех $x \in (-\infty, \infty)$. Решение предполагается экспоненциально убывающим при $|x| \rightarrow \infty$. Иными словами, требуется найти функцию Грина бесконечного плоского акустического волновода, движения стенок которого описываются уравнениями (1.2). Искомое решение обозначим P_1 . Будем искать P_1 в следующем виде:

$$(2.1) \quad P_1(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp [i\lambda(x - x_0) - \gamma|y - y_0|] \frac{d\lambda}{\gamma} + \\ + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_1(\lambda) \exp(i\lambda x - \gamma y) d\lambda + \\ + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_2(\lambda) \exp[i\lambda x - \gamma(b - y)] d\lambda, \quad \gamma = \sqrt{\lambda^2 - k^2}$$

Выбор ветви радикала традиционный [1]. Первое слагаемое справа представляет собою фундаментальное решение уравнения Гельмгольца (1.1) для безграничной среды, второе и третье слагаемые задают волны, отраженные от стенок волновода. Подстановка выражения (2.1) в граничные условия (1.2) приводит к линейной системе для нахождения неиз-

вестных функций $B_1(\lambda)$ и $B_2(\lambda)$. После вычислений получим

$$(2.2) \quad P_1(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} D(\lambda, y_-, y_+) \exp[i\lambda(x - x_0)] d\lambda$$

$$D(\lambda, y_-, y_+) = \frac{D_1(\lambda, y_-) D_2(\lambda, y_+)}{D_{12}(\lambda)}$$

$$\gamma D_{12}(\lambda) = l_1 l_2 \exp(\gamma b) - l_1^\circ l_2^\circ \exp(-\gamma b)$$

$$\gamma D_1(\lambda, y) = l_1 \exp(\gamma y) - l_1^\circ \exp(-\gamma y)$$

$$\gamma D_2(\lambda, y) = l_2 \exp[\gamma(b - y)] - l_2^\circ \exp[-\gamma(b - y)]$$

$$l_\alpha = l_\alpha(\lambda) = -\gamma m_{\alpha 1}(\lambda^2) + m_{\alpha 2}(\lambda^2)$$

$$l_\alpha^\circ = l_\alpha^\circ(\lambda) = \gamma m_{\alpha 1}(\lambda^2) + m_{\alpha 2}(\lambda^2)$$

$$2y_\pm = y + y_0 \pm |y - y_0| \quad (\alpha = 1, 2)$$

Функции $D_{12}(\lambda)$, $D_1(\lambda, y)$, $D_2(\lambda, y)$ — четные целые функции переменной λ . Условимся считать, что при $0 < \arg k < \pi/4$ функция $D_{12}(\lambda)$ не имеет вещественных корней. Это ограничение на свойства функций $l_1(\lambda)$ и $l_2(\lambda)$ очевидно с физической точки зрения, поскольку вещественные корни дисперсионного уравнения соответствуют волновым числам незатухающих нормальных волн, которые невозможны в волноводе, заполненном поглощающей средой. При $\arg k = 0$, т. е. в случае, когда волновод заполнен идеальной средой, некоторые из корней $D_{12}(\lambda)$ могут выйти на действительную ось. В этом случае контур интегрирования в (2.2) следует сместить с действительной оси таким образом, чтобы он обошел соответствующие полюса согласно принципу предельного поглощения.

Интеграл (2.2) преобразуем в сумму с помощью теоремы о вычетах

$$(2.3) \quad P_1(x, y) = \frac{i}{2} \sum_s D_*(\lambda_s, y_-, y_+) \exp[i\lambda |x - x_0|]$$

$$D_*(\lambda, y_-, y_+) = \frac{D_1(\lambda, y_-) D_2(\lambda, y_+)}{dD_{12}(\lambda)/d\lambda}$$

Здесь λ_s — корни функции $D_{12}(\lambda)$, расположенные (при $0 < \arg k < \pi/4$) в верхней полуплоскости.

В представлении (2.3) можно освободиться от символов y_- и y_+ . Из определения λ_s как корня $D_{12}(\lambda)$ вытекают следующие равенства:

$$\frac{D_2(\lambda_s, y)}{l_2^\circ(\lambda_s)} \exp[\gamma(\lambda_s) b] = -\frac{D_1(\lambda_s, y)}{l_1(\lambda_s)}$$

$$\frac{D_2(\lambda_s, y)}{l_2(\lambda_s)} \exp[-\gamma(\lambda_s) b] = -\frac{D_1(\lambda_s, y)}{l_1^\circ(\lambda_s)}$$

Используя, к примеру, первое из них, можно получить соотношения

$$D_*(\lambda_s, y_-, y_+) = D_*(\lambda_s, y, y_0) = D_*(\lambda_s, y_0, y)$$

Будем для P_1 пользоваться представлением (2.3). Для того, чтобы получить искомое поле P_0 , следует добавить к P_1 волны, отраженные от бо-

ковых стенок $x = 0$, $x = a$ рассматриваемого объема

$$(2.4) \quad P_0(x, y) = P_1(x, y) + \frac{i}{2} \sum_s A_1(\lambda_s) D_*(\lambda_s, y_-, y_+) \exp(i\lambda_s x) + \\ + \frac{i}{2} \sum_s A_2(\lambda_s) D_*(\lambda_s, y_-, y_+) \exp[i\lambda_s(a - x)]$$

Подстановка (2.4) в граничные условия (1.3) приводит к системе линейных уравнений для нахождения коэффициентов отражения $A_1(\lambda_s)$ и $A_2(\lambda_s)$. После некоторых преобразований получаем

$$(2.5) \quad P_0(x, y) = \frac{1}{2} \sum_s \lambda_s D_*(\lambda_s, y_-, y_+) \Delta(\lambda_s, x_-, x_+)$$

$$\Delta(\lambda, x_-, x_+) = \frac{\Delta_3(\lambda, x_-) \Delta_4(\lambda, x_+)}{\Delta_{34}(\lambda)}$$

$$i\lambda \Delta_{34}(\lambda) = n_3 n_4 \exp(-i\lambda a) - n_3^\circ n_4^\circ \exp(i\lambda a)$$

$$i\lambda \Delta_3(\lambda, x) = n_3 \exp(-i\lambda x) - n_3^\circ \exp(i\lambda x)$$

$$i\lambda \Delta_4(\lambda, x) = n_4 \exp[-i\lambda(a - x)] - n_4^\circ \exp[i\lambda(a - x)]$$

$$n_\alpha = n_\alpha(\lambda) = i\lambda m_{\alpha 1}(k^2 - \lambda^2) + m_{\alpha 2}(k^2 - \lambda^2)$$

$$n_\alpha^\circ = n_\alpha^\circ(\lambda) = n_\alpha(-\lambda) \quad (\alpha = 3, 4)$$

$$2x_\pm = x + x_0 \pm |x - x_0|$$

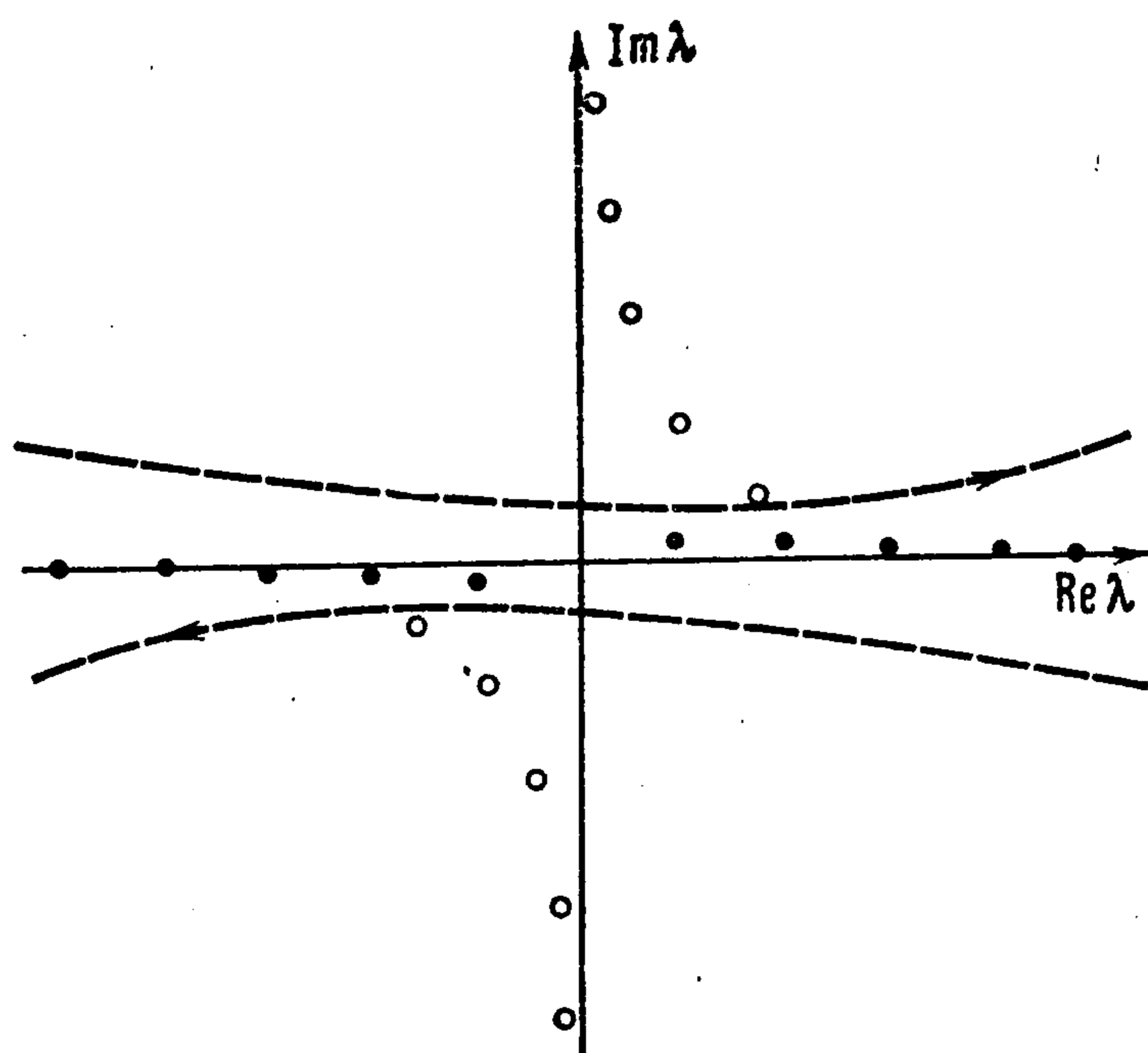
Функции $n_3(\pm\lambda)$ и $n_4(\pm\lambda)$ представляют собой полиномы, $\Delta_{34}(\lambda)$, $\Delta_3(\lambda, x)$, $\Delta_4(\lambda, x)$ — целые четные функции переменной λ ; предполагается, что функции $D_{12}(\lambda)$ и $\Delta_{34}(\lambda)$

не имеют общих корней. Такое ограничение на свойства граничных операторов L_α ($\alpha = 1, 2, 3, 4$) естественно, поскольку в противном случае имелось бы резонансное обращение поля в бесконечность, несмотря на наличие в среде поглощения.

Расположение корней функций $D_{12}(\lambda)$ и $\Delta_{34}(\lambda)$ схематически показано на фигуре светлыми и темными точками соответственно. В окрестности начала координат расположение корней носит нерегулярный характер —

оно определяется конкретным заданием граничных операторов. При $|\lambda| \rightarrow \infty$ корни $D_{12}(\lambda)$ асимптотически сближаются с корнями $\text{sh } \gamma b$, а корни $\Delta_{34}(\lambda)$ — с корнями $\sin \lambda a$.

Равенство (2.5) задает разложение функции $P_0(x, y)$ в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма — Лиувилля для переменной y . С помощью теоремы о вычетах перейдем к интегральному представлению



для $P_0(x, y)$

$$(2.6) \quad P_0(x, y) = \frac{1}{8\pi i} \int_{\Lambda} D(\lambda, y_-, y_+) \Delta(\lambda, x_-, x_+) \lambda d\lambda$$

Здесь Λ — контур, разделяющий корни функций $D_{12}(\lambda)$ и $\Delta_{34}(\lambda)$, при этом корни $D_{12}(\lambda)$ расположены слева по ходу контура. Контур Λ изображен на фигуре штриховыми линиями. Он состоит из двух ветвей и обладает центральной симметрией относительно начала координат. В связи с нечетностью подынтегральной функции выражение (2.6) не меняется при смене знака переменной интегрирования. Оно удобно тем, что сохраняет равноправие пространственных переменных x и y . В самом деле, используя теорему о вычетах для области, расположенной между ветвями контура Λ , возвращаемся к представлению (2.5), а применяя то же рассуждение для области снаружи ветвей контура Λ , получаем аналогичное разложение, в котором участвуют собственные функции задачи Штурма — Лиувилля для переменной x .

3. Общее решение однородной задачи. Общее решение однородной задачи Q имеет в рассматриваемом случае следующую структуру:

$$Q = Q_{13} + Q_{14} + Q_{23} + Q_{24}$$

где $Q_{\alpha\beta}$ ($\alpha = 1, 2$; $\beta = 3, 4$) представляет собой поле, расходящееся от угловой точки (x_β, y_α) рассматриваемой области. В целях простоты получим аналитическое выражение для Q путем аналогии с соответствующими компонентами поля в задачах, рассмотренных в [1, 2].

В работе [1] найдена функция Грина уравнения Гельмгольца для области $x > 0, y > 0$ при граничных и гранично-контактных условиях, подобных рассматриваемым в предлагаемой статье. Выпишем в качестве отдельных аргументов функции P_0 координаты (x_0, y_0) точки приложения источника. Частное решение неоднородной задачи в [1] имеет во введенных здесь обозначениях следующий вид (сумма полей источника и трех его изображений):

$$P_0(x, y, x_0, y_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Lambda_1} \left\{ \exp[i\lambda(x - x_0) - \gamma|y - y_0|] - \frac{l_1^\circ}{l_1} \exp[i\lambda(x - x_0) - \gamma(y + y_0)] - \frac{n_2^\circ}{n_2} \exp[i\lambda(x + x_0) - \gamma|y - y_0|] + \frac{l_1^\circ n_2^\circ}{l_1 n_2} \exp[i\lambda(x + x_0) - \gamma(y + y_0)] \right\} \frac{d\lambda}{\gamma}$$

Здесь Λ_1 — некоторый контур, отделяющий корни l_1 , расположенные в верхней полуплоскости, от остальных корней функции l_1 и n_2 . Выясним, какой вид принимает $P_0(x, y, x_0, y_0)$, если переместить источник поля в контактную точку. Имеем

$$(3.1) \quad P_0(x, y, 0, 0) = -\frac{i}{\pi} \int_{\Lambda_1} \frac{\lambda m_{11}(\lambda^2) m_{21}(k^2 - \lambda^2)}{l_1 n_2} e^{i\lambda x - \gamma y} d\lambda$$

Сравним это выражение с соответствующим решением однородной задачи в [1]

$$Q(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Lambda_1} \frac{\lambda q_{N-1}(\lambda^2)}{l_1 n_2} e^{i\lambda x - \gamma y} d\lambda$$

Здесь $q_{N-1}(\lambda^2)$ — четный полином степени $2N - 2$ с произвольными коэффициентами. Вместо $q_{N-1}(\lambda^2)$ в (3.1) стоит четный полином, степень которого на две единицы больше, а коэффициенты известны. Аналогичное соответствие между P_0 и Q_α ($\alpha = 1, 2$) имеет место в задаче, решенной в [2] (область, рассматриваемая в [2] — полубесконечный плоский волновод $0 < x < \infty$, $0 < y < b$, — имеет две контактные точки).

Вернемся к рассматриваемой задаче. После предельного перехода $(x_0, y_0) \rightarrow (0, 0)$ получим

$$P_0(x, y, 0, 0) = - \frac{1}{2\pi} \int_{\Lambda} \frac{D_2(\lambda, y) \Delta_4(\lambda, x)}{D_{12}(\lambda) \Delta_{34}(\lambda)} \lambda m_{11}(\lambda^2) m_{21}(k^2 - \lambda^2) d\lambda$$

Таким образом, следует ожидать, что поле Q_{13} должно иметь вид

$$(3.2) \quad Q_{13}(x, y) = \frac{1}{8\pi i} \int_{\Lambda} \frac{D_2(\lambda, y) \Delta_4(\lambda, x)}{D_{12}(\lambda) \Delta_{34}(\lambda)} \lambda q_{N_{13}-1}(\lambda^2) d\lambda$$

Поскольку это выражение выписано на основании некоторых аналогий, а не получено путем систематической процедуры, оно нуждается в проверке. Непосредственным дифференцированием можно убедиться в справедливости соотношений

$$(\Delta + k^2) D_2(\lambda, y) \Delta_4(\lambda, x) = 0$$

$$L_1 \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) D_2(\lambda, 0) \Delta_4(\lambda, x) = D_{12}(\lambda) \Delta_4(\lambda, x)$$

$$L_2 \left(\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y} \right) D_2(\lambda, b) \Delta_4(\lambda, x) = 0$$

$$L_3 \left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x} \right) D_2(\lambda, y) \Delta_4(\lambda, 0) = D_2(\lambda, y) \Delta_{34}(\lambda)$$

$$L_4 \left(\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial x} \right) D_2(\lambda, y) \Delta_4(\lambda, a) = 0$$

Таким образом, выполнение однородного уравнения Гельмгольца и вторых граничных условий в (1.2) и (1.3) очевидны. Рассмотрим два оставшихся граничных условия. Имеем

$$L_1 \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) Q_{13}(x, 0) = \frac{1}{8\pi i} \int_{\Lambda} \frac{\Delta_4(\lambda, x)}{\Delta_{34}(\lambda)} \lambda q_{N_{13}-1}(\lambda^2) d\lambda$$

$$L_3 \left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x} \right) Q_{13}(0, y) = \frac{1}{8\pi i} \int_{\Lambda} \frac{D_2(\lambda, x)}{D_{12}(\lambda)} \lambda q_{N_{13}-1}(\lambda^2) d\lambda$$

При $|\operatorname{Im} \lambda| \rightarrow \infty$ подынтегральное выражение в первом из этих равенств экспоненциально убывает при $0 < x < a$, причем снаружи от ветвей контура Λ нет особенностей подынтегрального выражения. Применяя теорему о вычетах для области вне ветвей контура Λ , получим, что $L_1 Q_{13}(x, 0) = 0$. Аналогичным образом равенство $L_3 Q_{13}(0, y) = 0$ выте-

кает из теоремы о вычетах, примененной к области, расположенной между ветвями контура Λ .

Непрерывность Q_{13} в окрестности начала координат вытекает из равномерной сходимости интеграла (3.2).

Выражения для Q_{14} , Q_{23} , Q_{24} могут быть получены из (3.2) путем циклической замены индексов 1, 2 и 3, 4.

Тем самым общее решение однородной задачи найдено. Выражение (3.2) содержит необходимое число N_{13} произвольных постоянных, и поэтому при использовании гранично-контактных условий возникает линейная система для нахождения этих постоянных, содержащая одинаковое число уравнений и неизвестных. При этом формальное применение одноименных граничных операторов $R_{\alpha\beta\gamma}$ и $R_{\beta\alpha\gamma}$ к $Q_{\alpha\beta}$ ($\alpha = 1, 2$; $\beta = 3, 4$), вообще говоря, приводит к расходящимся интегралам. Для того чтобы была возможна регуляризация этих интегралов, гранично-контактные операторы должны удовлетворять некоторым специальным требованиям. Соответствующие условия приведены в [1, 2]. При выполнении этих условий регуляризация может быть выполнена способом, описанным в [2].

Поступила 6 VII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белинский Б. П., Коузов Д. П., Чельцова В. Д.* О дифракции акустических волн на пластинах, сочлененных под прямым углом. ПММ, 1973, т. 37, вып. 2.
2. *Коузов Д. П., Пачин В. А.* О дифракции акустических волн в плоском полубесконечном волноводе с упругими стенками. ПММ, 1976, т. 49, вып. 1.
3. *Коузов Д. П.* О решении уравнения Гельмгольца для полуплоскости при граничных условиях, содержащих производные высокого порядка. ПММ, 1967, т. 31, вып. 1.
4. *Красильников В. Н.* О решении некоторых гранично-контактных задач линейной гидродинамики. ПММ, 1961, т. 25, вып. 4.