

**К РАСЧЕТУ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЭФФЕКТОВ
В ИОНИЗОВАННОМ МНОГОКОМПОНЕНТНОМ ГАЗЕ
ОКОЛО ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩИХ ТЕЛ. МЕТОД РАСЩЕПЛЕНИЯ**

М. С. Бенилов, Г. А. Тирский

(Москва)

Рассматривается постановка гидродинамической задачи об определении электрических эффектов в умеренно ионизованном газе около электропроводящих тел в условиях, когда характерный дебаевский радиус существенно меньше характерного размера обтекаемого тела. Найдена новая формулировка задачи, позволяющая существенно упростить как численное, так и аналитическое ее исследование. Сформулирован метод расщепления, по которому концентрации и диффузионные потоки ионизованных компонент во всей области, занятой газом, включая дебаевский слой, определяются из решения исходной задачи в квазинейтральной постановке. Затем из решения линейного дифференциального уравнения с известными коэффициентами определяется электрическое поле во всем объеме газа. Показано, что в определенной области потенциалов поверхности тела найденное таким образом решение является равномерно пригодным.

В качестве примера рассмотрена одномерная задача об электрическом зонде в трехкомпонентном слабоионизованном газе. Применение к этой задаче метода расщепления приводит к линейным уравнениям для концентрации заряженных частиц и электрического поля, которые решены в квадратурах. Получены явные формулы для линейных участков ионной и электронной характеристик.

В последнее время в связи с необходимостью интерпретации зондовых измерений в плотной плазме, проводимых в различных условиях обтекания зонда, в литературе проявляется повышенный интерес к гидродинамическим задачам определения электрических параметров в плазме около электропроводящих тел (см., например, [1-8]). Гидродинамическая модель применима во всем занимаемом ионизованным газом объеме в рамках основного предположения, что длина свободного пробега частиц λ много меньше всех характерных размеров задачи, в частности, меньше толщины дебаевского слоя λ_d ; дрейфовая скорость частиц много меньше тепловой. Последнее условие означает, что работа электрического поля E на длине свободного пробега много меньше тепловой энергии kT , т. е. $eE\lambda \ll kT$. В рассматриваемом случае столкновительного дебаевского слоя это условие выполняется, по крайней мере, при потенциалах стенки $\varphi_w \sim kT/e$. В самом деле, величина электрического поля в дебаевском слое имеет порядок $E \sim \varphi_w / \lambda_d \sim kT / e\lambda_d$. С учетом неравенства $\lambda \ll \lambda_d$ получаем $eE\lambda \sim e(kT / e\lambda_d)\lambda \ll kT$. Отметим, что условие $\varphi_w \sim kT/e$ выполняется в достаточно широкой области потенциалов. Например, токи насыщения на зонд в слабоионизованной плазме достигаются уже при потенциале поверхности тела в несколько kT/e .

Рассматриваемая задача нелинейна и при малом по сравнению с характерным размером тела дебаевском радиусе (эта ситуация является типичной) содержит малый параметр ϵ , равный квадрату отношения характерного дебаевского радиуса к характерному размеру тела, перед членом с электрическим полем в уравнении Пуассона. Непо-

средственное численное решение задач такого типа в исходной постановке даже в простейших случаях, как известно [2], сопряжено с трудностями.

В данной работе предлагается преобразование, позволяющее существенно упростить как численное, так и аналитическое исследование этой электрогидродинамической задачи. Это преобразование заключается в выводе из уравнения Пуассона с использованием уравнений переноса массы компонент уравнения второго порядка для электрического поля. Включение этого уравнения в электрогидродинамическую систему вместо уравнения Пуассона делает устойчивыми итерационные численные алгоритмы, в которых на каждой итерации на известном из предыдущей итерации гидродинамическом поле решается указанное выше уравнение для электрического поля и затем на найденном таким образом распределении электрического поля определяется новое гидродинамическое поле, в частности, концентрации ионизованных компонент. Заметим, что в применении к рассматриваемой задаче в исходной постановке указанный итерационный алгоритм с раздельным определением на каждой итерации электрического поля и поля гидродинамических параметров неустойчив. В частном случае слабоионизованного газа преобразование такого типа для получения численных решений использовалось в работе [4].

Предложенное преобразование позволяет также упростить и асимптотическое решение задачи в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$. Показано, что в определенной области потенциалов поверхности тела равномерно пригодное решение задачи при $\varepsilon \rightarrow 0$ можно найти из упрощенных асимптотически точных во всей области течения уравнений. С точки зрения применения указанного выше итерационного алгоритма это означает, что в данном случае первая же итерация дает асимптотически точный результат.

Такой подход, названный методом расщепления, демонстрируется далее в работе на решении одномерной задачи об электрическом зонде в слабоионизованном трехкомпонентном движущемся или покоящемся газе с постоянными или переменными свойствами. Применение метода расщепления позволяет линеаризовать эту задачу и получить явные формулы для линейных участков ионной и электронной характеристик.

1. Постановка задачи. Будем рассматривать стационарное течение химически реагирующей частично ионизованной многокомпонентной вязкой теплопроводной смеси газов с разными диффузионными свойствами компонент около электропроводящих тел при отсутствии внешнего магнитного поля. Наведенное за счет внутренних токов магнитное поле мало как релятивистский эффект. Для простоты изложения (усложнение на общий случай отмечено в конце п. 2) будем предполагать, что степень ионизации газа умеренна, т. е. достаточно мала, чтобы присутствие ионизованных компонент не оказывало существенного влияния на течение нейтральных компонент. Это означает, что степень ионизации по порядку величины не должна превышать нескольких процентов. Поэтому поля всех величин, относящихся к газу в целом, таких, как температура, давление и среднемассовая скорость, а также поля концентраций и диффузионных потоков нейтральных компонент, могут быть определены из решения соответствующей задачи без учета ионизации и в данной постановке предполагаются известными. Таким образом, задача состоит в определении концентраций и диффузионных потоков ионизованных компонент и электрического поля. Температуры всех компонент также для простоты изложения будем полагать равными.

В качестве определяющей примем систему из уравнений сохранения массы ионизованных компонент, уравнений Стефана — Максвелла [5] для ионизованных компонент, уравнений Максвелла для электрического

поля. В безразмерном виде эта система будет такой:

$$(1.1) \quad \operatorname{Re} \rho v \nabla \left(\frac{x_i}{m} \right) + \operatorname{div} \mathbf{J}_i^\circ = D_i w_i^\circ \quad (i = 1, \dots, M)$$

$$(1.2) \quad \nabla x_i = \sum_{k=1}^N \Delta_{ik} (x_i \mathbf{J}_k^\circ - x_k \mathbf{J}_i^\circ) + (c_i - x_i) \nabla \ln p + x_i \Sigma_i^T \nabla \ln T + \\ + \left(x_i z_i - c_i \sum_{k=1}^M x_k z_k \right) \frac{\mathbf{E}^\circ}{T} \quad (i = 1, \dots, M)$$

$$(1.3) \quad \varepsilon \operatorname{div} \mathbf{E}^\circ = n \sum_{k=1}^M x_k z_k, \quad \mathbf{E}^\circ = -\nabla \varphi^\circ$$

$$c_i = \frac{m_i}{m} x_i, \quad \Delta_{ij} = \frac{a_{ij}}{n}, \quad m = \sum_{k=M+1}^N x_k m_k, \quad \mathbf{J}_i^\circ = \frac{L a_0}{n_0} \mathbf{J}_i$$

$$\mathbf{E}^\circ = \frac{eL}{kT_0} \mathbf{E}, \quad \Sigma_i^T = \sum_{k=1}^N \frac{x_k a_0 a_{ik}}{\rho_0 p} \left(\frac{D_k^T}{c_k} - \frac{D_i^T}{c_i} \right)$$

$$\operatorname{Re} = a_0 v_0 L, \quad D_i = \frac{w_{i0} \cdot L^2 a_0}{n_0}, \quad \varepsilon = \frac{kT_0}{4\pi n_0 e^2 L^2}$$

Здесь и ниже c_i, x_i — массовая и молярная концентрации; $\mathbf{J}_i, \mathbf{E}, D_i^T$ — размерные числовой диффузионный поток, электрическое поле и коэффициент термодиффузии; z_i — зарядовое число; $\rho, v, w_i^\circ, T, p, a_{ij}, n$ — безразмерные плотность, среднemasсовая скорость, числовая скорость возникновения i -й компоненты в единице объема в результате химических реакций, температура, давление, коэффициенты сопротивления и полная числовая концентрация, нормированные на соответствующие характерные значения (последние отмечены нулевым индексом); m_i — масса частицы i -го сорта, нормированная на величину ρ_0 / n_0 ; k — постоянная Больцмана; e — заряд электрона; L — характерный масштаб задачи; N — полное число компонент смеси; первые M номеров приписаны ионизованным компонентам.

Сформулируем граничные условия для системы уравнений (1.1)–(1.3). На поверхности тела, которую полагаем идеально поглощающей и каталитической, концентрации ионизованных компонент обращаются в нуль

$$(1.4) \quad x_i = 0 \quad (i = 1, \dots, M)$$

Вдали от обтекаемого тела концентрации ионизованных компонент стремятся к своим значениям в невозмущенном газе

$$(1.5) \quad x_i \rightarrow x_{i\infty} \quad (i = 1, \dots, M) \quad \left(\sum_{k=1}^M x_{k\infty} z_k = 0 \right)$$

(в силу асимптотики рассматриваемых уравнений на бесконечности невозмущенный газ является электронейтральным [6]).

Для замыкания задачи необходимо сформулировать еще граничное условие для уравнения (1.3), т. е. задать (в явном или неявном виде) потенциал поверхности тела относительно бесконечности. Выбор этого граничного условия производится обычно из соображений удобства с учетом характера выбранного для решения задачи алгоритма.

Например, задавалось распределение плотности электрического тока на поверхность [7], отношение плотностей ионного и электронного диффузионных потоков [8], значение диффузионного потока ионов [9], значение электрического поля на поверхности тела [4], значение потенциала поверхности тела относительно бесконечности [10]. В задачах обтекания ионизованным газом неэлектропроводящих тел [11] ставилось условие отсутствия тока на стенку, что соответствует так называемой задаче с плавающим потенциалом.

Для целей данной работы по причинам, которые будут ясны из дальнейшего, это граничное условие удобно задавать формально в виде следующей линейной комбинации диффузионных потоков ионизованных компонент на поверхность тела (нулевой индекс у безразмерных диффузионных потоков опускаем):

$$(1.6) \quad - \sum_{j=1}^M z_j J_{jy} \sum_{k=M+1}^N x_k \Delta_{kj} = \alpha \quad \text{при } y = 0$$

где α — заданная функция на поверхности тела, y — нормальная к поверхности координата.

Это условие можно рассматривать как обобщение граничного условия, использовавшегося ранее [6] при численном решении уравнений дебаевского слоя. После решения задачи (1.1) — (1.6) можно найти соответствующее данной функции α распределение потенциала поверхности. Следует отметить, что самостоятельного физического смысла граничное условие (1.6) не имеет: его введение есть формальный прием, упрощающий далее асимптотический анализ задачи. В случае одномерных задач на последнем этапе решения параметр α выражается через потенциал поверхности, и все результаты приводятся к обычному виду, в частности, получается вольтамперная характеристика.

2. Уравнение для электрического поля. При $\varepsilon \ll 1$, что является типичной ситуацией, уравнение (1.3) неудобно для определения электрического поля E^0 , поскольку перед членом с электрическим полем стоит малый параметр. При построении для решения задачи итерационного численного алгоритма с отдельным решением линеаризованных уравнений на каждой итерации наличие большого параметра ε^{-1} в правой части этого уравнения приводит к расходимости итерационного процесса ввиду неизбежной ошибки, возникающей при вычислении суммы $x_1 z_1 + \dots + x_M z_M$ из предыдущей итерации. Для преодоления этой трудности необходимо на каждой итерации решать линеаризованные уравнения совместно, что требует больших затрат машинного времени. Например, в работе [10] при решении задачи об определении электрических эффектов в окрестности проводящей сферы в покоящемся слабоионизованном газе лине-

аризованные уравнения совместно решались методом матричной прогонки.

Чтобы избежать появления указанной трудности, необходимо вывести для электрического поля новое уравнение, устойчивое к возмущениям концентраций ионизованных компонент. Для этого исключим из определяющей системы уравнений концентрацию одной из ионизованных компонент (например компоненту с номером M). Выразим из уравнения (1.3) величину x_M

$$(2.1) \quad x_M = \frac{1}{z_M} \left(\frac{\varepsilon}{n} \operatorname{div} \mathbf{E}^0 - \sum_{k=1}^{M-1} x_k z_k \right)$$

и подставим это выражение в соотношение (1.2) при $i = M$. Исключая из полученного соотношения ∇x_k ($k = 1, \dots, M-1$) с помощью соответствующих уравнений переноса, получим следующее уравнение для электрического поля (нулевой индекс у безразмерного электрического поля опускаем):

$$(2.2) \quad \begin{aligned} & \frac{\varepsilon}{n} \nabla \operatorname{div} \mathbf{E} + \frac{\varepsilon}{n} \operatorname{div} \mathbf{E} \left(\frac{\mathbf{E}}{T} \sum_{k=1}^M c_k z_k + \nabla \ln T \right) - \frac{\mathbf{E}}{T} \sum_{k=1}^M x_k z_k^2 = \\ & = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \Delta_{kj} x_k \mathbf{J}_j (z_k - z_j) + \sum_{k=1}^M c_k z_k \nabla \ln p + \sum_{k=1}^M x_k z_k \Sigma_k^T \nabla \ln T \\ & \mathbf{E} = - \nabla \varphi^0 \end{aligned}$$

Таким образом, определяющая система уравнений содержит теперь уравнения (1.1), уравнения (1.2) при $i \neq M$ и уравнение (2.2). Входящая в уравнения величина x_M должна быть заменена своим выражением (2.1). Соответствующее преобразование граничных условий (1.4)–(1.6) для такой формулировки задачи очевидно:

на поверхности тела

$$(2.3) \quad \begin{aligned} x_i &= 0 \quad (i = 1, \dots, M-1), \quad - \sum_{j=1}^M z_j J_{jy} \sum_{k=M+1}^N x_k \Delta_{kj} = \alpha \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0 \end{aligned}$$

вдали от обтекаемого тела

$$(2.4) \quad x_i \rightarrow x_{i\infty} \quad (i = 1, \dots, M-1), \quad \operatorname{div} \mathbf{E} \rightarrow 0$$

В случае слабоионизованного трехкомпонентного газа уравнения Стефана—Максвелла принимают вид законов Фика. Подставляя их в уравнения сохранения массы компонент (1.1), можно исключить диффузионные потоки из непосредственного решения задачи. В этом случае для вывода нового уравнения для электрического поля следует комбинировать не уравнения переноса, а уравнения диффузии ионов и электронов [4]. Использование этого уравнения вместо исходного уравнения Пуассона позволяет разделить линеаризованные уравнения на каждом шаге итерационного процесса и решать их (в случае одномерных задач) скалярной про-

гонкой. Примеры построения вычислительных алгоритмов рассматривались в работе [4]. Здесь отметим лишь, что итерационный процесс удобно начинать с решения уравнения для электрического поля, при этом в качестве начального приближения для концентраций ионов и электронов следует задавать квазинейтральное решение (см. п. 3). Предлагаемый алгоритм не требует значительных затрат машинного времени и эффективен в широком диапазоне значений параметра ε , включая область весьма малых значений ε .

Заметим, что уравнение (2.2) будет справедливо и в общем случае многокомпонентной смеси произвольной степени ионизации. Тогда оно должно быть включено в общую гидродинамическую систему с пондеромоторными силами, и соотношения Стефана — Максвелла (1.2) должны быть выписаны для всех компонент смеси.

3. Асимптотический анализ задачи в случае малых радиусов Дебая. Уравнение (2.2) содержит малый параметр перед старшими производными, а сформулированная выше задача в целом может быть отнесена к типу сингулярно возмущенных. Первый член внешнего асимптотического разложения решения этой задачи по малому параметру описывается квазинейтральной системой уравнений, которую можно получить из исходной, формально полагая $\varepsilon = 0$. Уравнение (2.1) принимает вид алгебраического условия квазинейтральности; уравнение (2.2) будет таким (нулевой индекс у безразмерного потенциала опускаем):

$$(3.1) \quad \nabla\varphi = T \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \Delta_{kj} x_k \mathbf{J}_j (z_k^* - z_j^*) + T \sum_{k=1}^M c_k z_k^* \nabla \ln p + \\ + \sum_{k=1}^M x_k z_k^* \Sigma_k^T \nabla T, \quad z_i^* = z_i \left(\sum_{k=1}^M x_k z_k^2 \right)^{-1}$$

Остальные уравнения системы при $\varepsilon = 0$ не изменяют своего вида. Вблизи обтекаемой поверхности существует внутренняя область, в которой внешнее решение несправедливо. В рассматриваемом случае нулевых на обтекаемой поверхности концентраций ионизованных компонент на существование этой области указывает особенность, которую имеет на обтекаемой поверхности внешнее решение (3.1). Будем называть эту внутреннюю область дебаевским пограничным слоем (ДПС).

Для построения асимптотических решений рассматриваемой задачи в широком диапазоне значений потенциала поверхности тела применяются [1, 2] различные модификации метода внешних и внутренних разложений. В данной работе будет развит и применен другой асимптотический метод, справедливый в области потенциалов поверхности тела, соответствующей малым значениям параметра α .

С целью упростить изложение ограничимся в дальнейшем рассмотрением одномерных задач, к которым относятся, например, задача о гиперзвуковом течении ионизованного газа в окрестности линии тока, проходящей через переднюю критическую точку затупленного тела, задача о проводящей сфере в покоящемся газе и другие.

В форме с исключенной концентрацией компоненты M имеем следующую систему определяющих уравнений:

$$(3.2) \quad \operatorname{Re} \rho v \left(\frac{x_i}{m} \right)' + \frac{1}{r^2} (r^2 J_i)' = D_i w_i^* \quad (i = 1, \dots, M)$$

$$(3.3) \quad x_i' = \sum_{k=1}^N \Delta_{ik} (x_i J_k - x_k J_i) + (c_i - x_i) \ln' p + x_i \Sigma_i^T \ln' T + \\ + \left(x_i z_i - c_i \sum_{k=1}^M x_k z_k \right) \frac{E}{T} \quad (i = 1, \dots, M-1)$$

$$(3.4) \quad \frac{\varepsilon}{n} \left[\frac{1}{r^2} (r^2 E)' \right]' + \frac{\varepsilon}{nr^2} (r^2 E)' \left(\frac{E}{T} \sum_{k=1}^M c_k z_k + \ln' T \right) - \frac{E}{T} \sum_{k=1}^M x_k z_k^2 = \\ = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \Delta_{kj} x_k J_j (z_k - z_j) + \sum_{k=1}^M c_k z_k \ln' p + \sum_{k=1}^M x_k z_k \Sigma_k^T \ln' T$$

$$(3.5) \quad x_M + \frac{1}{z_M} \sum_{k=1}^{M-1} x_k z_k = \frac{1}{z_M} \frac{\varepsilon}{nr^2} (r^2 E)'$$

Здесь $r = 1 + y$, штрих означает дифференцирование по y . Граничные условия (2.3), (2.4) принимают вид:

на теле

$$(3.6) \quad x_i = 0 \quad (i = 1, \dots, M-1)$$

$$(3.7) \quad - \sum_{j=1}^M z_j J_j \sum_{k=M+1}^N x_k \Delta_{kj} = \alpha$$

$$(3.8) \quad E' + 2E = 0$$

на бесконечности

$$(3.9) \quad x_i \rightarrow x_{i\infty} \quad (i = 1, \dots, M-1)$$

$$(3.10) \quad r^{-2} (r^2 E)' \rightarrow 0$$

Разрешим уравнение (3.4) относительно E/T и подставим это выражение в уравнения переноса (3.3). Получим

$$(3.11) \quad x_i' = - J_i \sum_{k=1}^N x_k \Delta_{ik} + x_i \sum_{k=1}^N \Delta_{ik}^* J_k - K_{pi} \ln' p - K_{Ti} \ln' T + \\ + \frac{\varepsilon}{nr^2} (r^2 E)' x_i \left[z_i^* \left(\frac{E}{T} \sum_{k=1}^M c_k z_k + \ln' T \right) - \frac{m_i}{m} \frac{E}{T} \right] + \\ + x_i z_i^* \frac{\varepsilon}{n} \left[\frac{1}{r^2} (r^2 E)' \right]' \quad (i = 1, \dots, M-1)$$

Здесь

$$\Delta_{ij}^* = \Delta_{ij} - z_i^* \sum_{k=1}^N \Delta_{kj} x_k (z_k - z_j)$$

$$K_{pi} = x_i - c_i + x_i z_i^* \sum_{k=1}^M c_k z_k$$

$$K_{Ti} = -x_i \left(\Sigma_i^{T_i} - z_i^* \sum_{k=1}^M x_k z_k \Sigma_k^T \right)$$

Заметим теперь, что перед членами, учитывающими вклад электрического поля в систему уравнений многокомпонентной гидродинамики (3.2), (3.5), (3.11), стоит коэффициент ε . Предполагая, что рассматриваемые безразмерные величины по порядку величины равны единице, опустим эти члены. Уравнения (3.2) останутся неизменными, уравнение (3.5) примет вид условия квазинейтральности

$$(3.12) \quad \sum_{k=1}^M x_k z_k = 0$$

а уравнения (3.11) будут

$$(3.13) \quad x_i' = -J_i \sum_{k=1}^N x_k \Delta_{ik} + x_i \sum_{k=1}^N \Delta_{ik}^* J_k - K_{pi} \ln' p - K_{Ti} \ln' T$$

$$(i = 1, \dots, M - 1)$$

Соотношения (3.13) — известные квазинейтральные соотношения Стефана — Максвелла [11]. По своей структуре они совпадают с соответствующими соотношениями для смеси электронейтральных компонент.

Тем самым исходная задача (3.2) — (3.10) расщепляется на две: квазинейтральную задачу (3.2), (3.12), (3.13), (3.6), (3.7), (3.9) для нахождения концентраций и диффузионных потоков ионизованных компонент и задачу (3.4), (3.8), (3.10) для определения электрического поля на известном квазинейтральном решении. Эти задачи можно решать последовательно.

Для исследования справедливости такого расщепления необходимо, во-первых, оценить отличие квазинейтрального решения для концентраций и диффузионных потоков ионизованных компонент от точного решения исходной задачи. Далее, появляется ошибка при определении электрического поля из уравнения (3.4), обусловленная ошибкой в коэффициентах, вносимой при подстановке квазинейтрального решения для ионизованных компонент вместо точного. Поэтому необходимо оценить эту последнюю и найти такие параметры задачи, при которых ее влиянием можно пренебречь.

Рассмотрим сначала вопрос о близости квазинейтрального решения для концентраций и диффузионных потоков ионизованных компонент к точному. Для ответа на этот вопрос следует оценить влияние членов, пропорциональных ε , опущенных при переходе от (3.5), (3.11) к (3.12), (3.13). Эти члены могут оказаться существенными, если нарушается предположение о том, что порядки рассматриваемых безразмерных величин

равны единице. Поэтому в области ДПС необходимо специальное рассмотрение.

В зависимости от величины потенциала поверхности тела возможны два случая: (1) при умеренных потенциалах поверхности ($\varphi_w \leq O(\ln \varepsilon^{-1})$) дебаевский слой может быть описан одним асимптотическим разложением [6]; (2) при больших потенциалах поверхности ($\varphi_w > O(\ln \varepsilon^{-1})$) дебаевский слой имеет сложную структуру (состоит из нескольких пограничных слоев) и не может быть описан в рамках одного асимптотического разложения [12]. Для целей данной работы представляет интерес первый случай, который и будем рассматривать. При этом в отличие от работы [6] параметр α не будет предполагаться фиксированным.

Найдем порядок искомых величин в ДПС. Обозначим порядок величины электрического поля через E_d , а характерный масштаб ДПС — через δ . Порядок величины концентраций ионизованных компонент в ДПС также равен δ ; при этом предполагается, что вычисленная из квазинейтрального решения величина

$$\sum_{k=1}^M x_k'(0) z_k^2$$

конечна и не равна нулю.

В ДПС первый член левой части уравнения (3.4) должен быть одного порядка с последним, откуда находим $\delta = O(\varepsilon^{1/3})$. Предполагается, что определенная таким образом толщина ДПС много меньше всех характерных размеров задачи, в частности, меньше толщины вязкого пограничного слоя.

Решение уравнений сохранения массы компонент (3.2) в дебаевском слое будем искать в виде внутреннего асимптотического разложения следующего вида:

$$J_i(y, \varepsilon) = J_{1i}(y_d) + \varepsilon^{1/3} J_{2i}(y_d) + \dots \quad (i = 1, \dots, M)$$

Здесь $y_d = y\varepsilon^{-1/3}$ — растянутая координата ДПС. Подставляя это разложение в (3.2), находим

$$(3.14) \quad J_i = J_{1i} + \varepsilon^{1/3} [J_{2i}(0) + y_d (D_i w_i^*(x_j = 0, y = 0) - 2J_{1i})] + O(\varepsilon^{2/3}) \quad (i, j = 1, \dots, M)$$

Здесь J_{1i} , $J_{2i}(0)$ — постоянные, значения которых должны быть определены из сращивания с внешним разложением. При выводе этого выражения для определенности предполагалось, что на обтекаемой поверхности нормальная компонента среднemasсовой скорости равна нулю. Все последующее, однако, остается справедливым и при наличии вдува или отсоса. Заметим, что, поскольку выражения для диффузионных потоков в дебаевском слое (3.14) содержат только члены нулевого и первого порядка по y_d , которые должны быть сращены, внешнее решение для диффузионных потоков ионизованных компонент остается справедливым с точностью до членов порядка $\varepsilon^{2/3}$ и в дебаевском слое. Кроме того, эти соотношения показывают, что поперек дебаевского слоя диффузионные потоки

меняются на величину порядка $\varepsilon^{1/2}$. Нетрудно видеть, что изменение поперек дебаевского слоя коэффициентов сопротивления и концентраций нейтральных компонент также имеет порядок $\varepsilon^{1/2}$.

Уравнение (3.4) можно записать в виде

$$(3.15) \quad \begin{aligned} & \frac{\varepsilon}{n} E'' - \frac{2\varepsilon}{nr} E' - \frac{2\varepsilon}{nr^2} E + \frac{\varepsilon}{nr^2} (r^2 E)' \left(\frac{E}{T} \sum_{k=1}^M c_k z_k + \ln' T \right) - \\ & \varepsilon^{1/2} E_d \quad \varepsilon^{1/2} E_d \quad \varepsilon E_d \quad \varepsilon^{1/2} E_d \quad (\varepsilon^{1/2} E_d + 1) \\ & - \frac{E}{T} \sum_{k=1}^M x_k z_k^2 = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \Delta_{kj} x_k J_j (z_k - z_j) + \sum_{k=1}^M c_k z_k \ln' p + \\ & \varepsilon^{1/2} E_d \quad \alpha + O(\varepsilon^{1/2}) \quad \varepsilon^{1/2} \\ & + \sum_{k=1}^M x_k z_k \Sigma_k^T \ln' T \\ & \varepsilon^{1/2} \end{aligned}$$

Под каждым членом написана оценка его величины в дебаевском слое. Отсюда можно найти порядок величины электрического поля в ДПС

$$E_d = \begin{cases} \alpha \varepsilon^{-1/2}, & O(\alpha) > \varepsilon^{1/2} \\ 1, & O(\alpha) \leq \varepsilon^{1/2} \end{cases}$$

Для определенности будем в дальнейшем рассматривать случай $O(\alpha) > \varepsilon^{1/2}$; все последующее применимо и к противоположному случаю, при этом в оценках следует писать $\varepsilon^{1/2}$ вместо α .

Интересно оценить разделение зарядов в дебаевском слое, т. е. отношение правой части уравнения (3.5) к членам левой части. Это отношение в дебаевском слое равно α . Поэтому разделение зарядов в ДПС несущественно при малых α . При α порядка единицы разделение зарядов также порядка единицы.

Воспользуемся сделанными выше оценками для упрощения задачи (3.4), (3.8), (3.10) для электрического поля. Заметим, что второй член левой части уравнения (3.15) в дебаевском слое по порядку величины равен $\varepsilon^{1/2}$ относительно первого и последнего. Поэтому в дебаевском слое этот член может быть опущен. В квазинейтральной области порядок этого члена по сравнению с последним будет ε . Таким образом, второй член левой части уравнения (3.15) равномерно мал относительно последнего и может быть опущен во всей области течения. Аналогично равномерно малыми относительно последнего являются третий и четвертый члены левой части уравнения (3.15). Поэтому с равномерно малой по всей области течения ошибкой уравнение (3.4) можно записать в виде:

$$(3.16) \quad \begin{aligned} & \frac{\varepsilon}{n} E'' - \frac{E}{T} \sum_{k=1}^M x_k z_k^2 = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \Delta_{kj} x_k J_j (z_k - z_j) + \sum_{k=1}^M c_k z_k \ln' p + \\ & + \sum_{k=1}^M x_k z_k \Sigma_k^T \ln' T \end{aligned}$$

Второй член левой части граничного условия (3.8) порядка $\varepsilon^{1/2}$ относительно первого и может быть опущен. Граничное условие (3.8) принимает тогда вид

$$(3.17) \quad E' = 0 \quad \text{при} \quad y = 0$$

Приступим к оценке членов, опущенных в уравнениях (3.5), (3.11). Левая и правая части уравнения (3.5) имеют порядок величины соответственно единица и ε в квазинейтральной области, и $\varepsilon^{1/2}$ и $\alpha\varepsilon^{1/2}$ в ДПС. Левая часть уравнения (3.11) порядка единицы в квазинейтральной области и в ДПС, предпоследний член правой части порядка ε и $\alpha\varepsilon^{1/2}$, последний член правой части порядка ε и α в квазинейтральной области и в ДПС соответственно. Таким образом, предпоследний член правой части (3.11) равномерно мал и может быть опущен во всей области течения; пренебрежение последними членами уравнений (3.5) и (3.11) приведет к ошибке в концентрациях ионизованных компонент порядка $\varepsilon^{1/2}\alpha$. Ошибка в производных концентраций будет порядка $\varepsilon^{1/2}\alpha$ в квазинейтральной области и α в дебаевском слое.

Таким образом, пренебрежение членами, пропорциональными ε , в уравнениях (3.5), (3.11) приведет к относительной ошибке порядка α в концентрациях ионизованных компонент и их производных в дебаевском слое. На диффузионных потоках ионизованных компонент эта ошибка не скажется, поскольку из (3.14) эти величины в дебаевском слое с точностью до членов порядка $\varepsilon^{1/2}$ определяются внешним разложением. Поэтому в диффузионных потоках имеем равномерно малую ошибку порядка $\varepsilon^{1/2}\alpha$. Относительная ошибка в концентрациях ионизованных компонент будет равномерно малой при малых α .

Оценим, наконец, ошибку, связанную с подстановкой в уравнение (3.16) квазинейтрального решения (отмеченного ниже звездочкой) для концентраций и диффузионных потоков ионизованных компонент вместо точного. Очевидно, в правой части будет равномерно малая ошибка порядка $\varepsilon^{1/2}\alpha$. Рассмотрим левую часть этого уравнения

$$\frac{\varepsilon}{n} E'' - \frac{1}{T} \sum_{k=1}^M [x_k^* E + O(\varepsilon^{1/2}\alpha) E] z_k^2$$

| | | |
|---------------|----------|---------------------------|
| ε | 1 | $\varepsilon^{1/2}\alpha$ |
| α | α | α^2 |

Здесь точное решение для концентраций ионизованных компонент представлено в виде квазинейтрального решения и поправки порядка $\alpha\varepsilon^{1/2}$. Под каждым членом написана оценка порядка его величины в квазинейтральной области и в дебаевском слое соответственно.

Очевидно, возникающая в левой части относительная ошибка имеет порядок α в дебаевском слое и $\varepsilon^{1/2}\alpha$ в квазинейтральной области. Эта ошибка будет равномерно малой при малых α .

Таким образом, при малых ε и α решение исходной задачи (3.2) — (3.10) может быть найдено в два этапа. На первом этапе из решения квазинейтральной задачи (3.2), (3.12), (3.13), (3.6), (3.7), (3.9) определяются концентрации

ионизованных компонент и их диффузионные потоки. Это решение может быть найдено известными методами решения задач газовой динамики многокомпонентных нейтральных смесей. На втором этапе решается линейное уравнение (3.16) с граничными условиями (3.17), (3.10) и определяется распределение электрического поля. Интегрируя последнее, можно определить соответствующий данному α потенциал обтекаемой поверхности. Преимущество такого расщепления перед прямым решением исходной задачи очевидно.

Важно отметить, что при $\alpha = 0$ квазинейтральное решение для ионизованных компонент является точным при $\varepsilon \rightarrow 0$. Поэтому подстановка в уравнение (3.16) квазинейтрального решения есть по сути дела линеаризация по α . Заметим, что в случае отсутствия конвекции такая линеаризация справедлива при любых, а не только малых значениях параметра ε [13]. Теперь становится ясным удобство введения формального граничного условия (1.6).

Как указывалось выше, условие малости ε выполняется в большинстве встречающихся на практике задач; условие малости α означает ограничение на величину потенциала поверхности тела.

4. Пример. Применим изложенный метод к одномерной задаче об электрическом зонде в трехкомпонентном газе, содержащем положительные однозарядные ионы одного сорта, электроны и одного сорта нейтралы. Степень ионизации газа будем предполагать слабой, т. е. достаточно малой для того, чтобы столкновениями заряженных частиц между собой можно было пренебречь по сравнению с их столкновениями с нейтралами. К этому классу задач относится, в частности, задача о зонде в критической точке затупленного тела, обтекаемого гиперзвуковым потоком слабоионизованного газа [14], а также задача о сферическом зонде в покоящейся слабоионизованной плазме с постоянными или переменными свойствами. Для простоты будем пренебрегать термодиффузией и бародиффузией, а также полагать, что гомогенные химические реакции заморожены и рекомбинация идет только на обтекаемой поверхности. Определяющая система уравнений (1.1)–(1.3) принимает в этом случае вид

$$(4.1) \quad \operatorname{Re} \rho v x_j' + r^{-2} (r^2 J_j)' = 0 \quad (j = i, e)$$

$$(4.2) \quad J_j = \frac{1}{\Delta_{jn}} \left(-x_j' + x_j z_j \frac{E}{T} \right) \quad (j = i, e)$$

$$(4.3) \quad \varepsilon r^{-2} (r^2 E)' = \rho (x_i - x_e)$$

Здесь индексы i, e, n приписаны ионам, электронам и нейтралам соответственно. Граничные условия (α — заданная величина)

$$(4.4) \quad y = 0, \quad x_i = x_e = 0; \quad J_e \Delta_{en} - J_i \Delta_{in} = \alpha$$

$$y \rightarrow \infty, \quad x_i \rightarrow x_\infty, \quad x_e \rightarrow x_\infty$$

Задачи такого типа неоднократно рассматривались в литературе [1–3].

Найдем квазинейтральное решение для концентрации и диффузионных потоков ионов и электронов. Полагая отношение коэффициентов сопротивления ион — нейтрал и электрон — нейтрал постоянным, для квазинейтральной концентрации заряженных частиц имеем уравнение диффузии с очевидными граничными условиями

$$(4.5) \quad \operatorname{Re} \rho v x' - r^{-2} (r^2 \Delta_a^{-1} x')' = 0, \quad x = x_i = x_e, \quad \Delta_a = (\Delta_{in} + \Delta_{en}) / 2$$

$$y = 0, \quad x = 0; \quad y \rightarrow \infty, \quad x \rightarrow x_\infty$$

Решение этой задачи может быть выписано в квадратурах

$$(4.6) \quad x = x_\infty \frac{c(y)}{c(\infty)}, \quad x' = x_\infty \frac{\Delta_a}{c(\infty)r^2} \exp\left(\int_0^y \operatorname{Re} \rho v \Delta_a dt\right)$$

$$c(y) = \int_0^y \frac{\Delta_a}{r^2} \exp\left(\int_0^q \operatorname{Re} \rho v \Delta_a dt\right) dq$$

Квазинейтральные диффузионные потоки ионов и электронов будут

$$(4.7) \quad J_i = \frac{1}{2r^2\Delta_{aw}} \left[\left(1 - \frac{\Delta_{en}}{\Delta_{in}}\right) x'_w - \alpha \frac{\Delta_a}{\Delta_{in}} \right] - \frac{x'}{\Delta_a}$$

$$J_e = \frac{1}{2r^2\Delta_{aw}} \left[\left(1 - \frac{\Delta_{in}}{\Delta_{en}}\right) x'_w + \alpha \frac{\Delta_a}{\Delta_{en}} \right] - \frac{x'}{\Delta_a}$$

Здесь индексом w отмечены значения соответствующих величин на поверхности обтекаемого тела (зонда).

Приступим к определению электрического поля. Уравнение (3.16) в рассматриваемом частном случае после подстановки в правую часть выражений (4.7) для квазинейтральных диффузионных потоков ионов и электронов принимает вид

$$(4.8) \quad \frac{\varepsilon}{\rho} E'' - \frac{2x}{T} E = \frac{\Delta_{in} - \Delta_{en}}{\Delta_a} \left(x' - x'_w \frac{\Delta_a}{r^2\Delta_{aw}} \right) + \alpha \frac{\Delta_a}{r^2\Delta_{aw}}$$

Граничные условия имеют вид (3.17) и (3.10). Таким образом, в применении к данной задаче метод расщепления означает, что при малых ε и α решение исходной нелинейной краевой задачи (4.1)–(4.4) может быть найдено в два этапа, на каждом из которых решаются линейные уравнения. На первом этапе решается линейная задача (4.5) и определяется профиль концентрации заряженных частиц. После определения концентрации по формулам (4.7) можно найти профили диффузионных потоков ионов и электронов. На втором этапе из решения линейной краевой задачи (4.8), (3.17), (3.10) определяется профиль электрического поля, интегрированием которого можно найти соответствующее данному α распределение потенциала. В частности, потенциал поверхности тела относительно бесконечности дается выражением

$$(4.9) \quad \varphi_w = \int_0^\infty E dy$$

Рассмотрим вопрос о построении ионной и электронной характеристик, т. е. зависимостей плотностей диффузионных потоков ионов и электронов на поверхность обтекаемого тела от ее потенциала.

Для построения точных характеристик необходимо решать задачу (4.1)–(4.4) при разных значениях α ; каждое решение дает по одной точке на ионной и электронной характеристиках. Для построения участков характеристик, соответствующих области малых α , применим развитый выше метод расщепления. Из (4.7) для диффузионных потоков ионов и электронов на обтекаемую поверхность имеем

$$(4.10) \quad j_i = 1 + \frac{\alpha}{2x'_w}, \quad j_e = 1 - \frac{\alpha}{2x'_w}$$

$$\left(j_i = -\frac{J_{iw}\Delta_{inw}}{x'_w}, \quad j_e = -\frac{J_{ew}\Delta_{enw}}{x'_w} \right)$$

Здесь введены обозначения j_i и j_e для плотностей потоков ионов и электронов на обтекаемую поверхность, нормированных на значения этих величин при $\alpha = 0$.

Для получения характеристик в явном виде необходимо выразить α через потенциал поверхности тела (4.9). При этом удобно представить решение для E в виде супер-

позиции двух функций, каждая из которых не зависит от α

$$(4.11) \quad E = E_1 - \frac{\alpha}{2x_w'} E_2$$

где функции E_1 и E_2 — решения следующих линейных уравнений:

$$(4.12) \quad \frac{\varepsilon}{\rho} E_1'' - \frac{2x}{T} E_1' = \frac{\Delta_{in} - \Delta_{en}}{\Delta_a} \left(x' - x_w' \frac{\Delta_a}{r^2 \Delta_{aw}} \right)$$

$$(4.13) \quad \frac{\varepsilon}{2\rho} E_2'' - \frac{x}{T} E_2' = - \frac{\Delta_a x_w'}{r^2 \Delta_{aw}}$$

с граничными условиями (3.17), (3.10).

Выражая из соотношений (4.9) и (4.11) α через φ_w и подставляя это выражение в (4.10), получим искомые характеристики в виде

$$(4.14) \quad j_i = 1 - \frac{\varphi_w - \varphi_1}{\varphi_2}, \quad j_e = 1 + \frac{\varphi_w - \varphi_1}{\varphi_2} \left(\varphi_k = \int_0^\infty E_k dy, k = 1, 2 \right)$$

Введенные здесь коэффициенты φ_1 и φ_2 не зависят от α и, следовательно, от потенциала обтекаемой поверхности.]

Из этих формул следует, в частности, что как ионная, так и электронная характеристики проходят через точку ($\varphi_w = \varphi_1, j_i = j_e = 1$); этой точке соответствует значение α , равное нулю.

Коэффициенты φ_1 и φ_2 должны быть определены из решения линейных уравнений (4.12), (4.13). Найдем эти коэффициенты. Вырожденное решение уравнения (4.12) будет

$$E_1 = \frac{T}{2x} \frac{\Delta_{en} - \Delta_{in}}{\Delta_a} \left(x' - x_w' \frac{\Delta_a}{r^2 \Delta_{aw}} \right)$$

Это решение не имеет особенностей: неопределенность в точке $y = 0$ можно раскрыть с помощью правила Лопиталья. Но оно не удовлетворяет, вообще говоря, граничному условию (3.17). Однако, поскольку не удовлетворено граничное условие для производной, а не для самой функции и при этом порядок невязки равен единице, то в первом приближении по ε погранслою не возникает и вырожденное решение является равномерно пригодным. Поэтому

$$(4.15) \quad \varphi_1 = \frac{\Delta_{en} - \Delta_{in}}{2\Delta_a} \int_0^\infty \frac{T}{x} \left(x' - x_w' \frac{\Delta_a}{r^2 \Delta_{aw}} \right) dy$$

Решение уравнения (4.13) можно представить в виде суммы решений трех более простых уравнений

$$(4.16) \quad E_2 = E_3 + E_4 + E_5$$

$$\frac{\varepsilon}{2\rho} E_3'' - \frac{x}{T} E_3' = - \frac{\Delta_a x_w'}{r^2 \Delta_{aw}} + \frac{T_w x}{T y}$$

$$\frac{\varepsilon T y}{2\rho x T_w} E_4'' - \frac{y}{T_w} E_4' = \varepsilon E_5'' \left(\frac{1}{2\rho_w x_w'} - \frac{T y}{2\rho x T_w} \right)$$

$$\frac{\varepsilon}{2\rho_w x_w'} E_5'' - \frac{y}{T_w} E_5' = -1$$

Граничными условиями для каждого из этих уравнений будут условия (3.17), (3.10).

Вырожденные решения уравнений (4.16) для E_3 и E_4 не имеют особенностей и аналогично вырожденному решению уравнения (4.12) являются равномерно пригодными

$$(4.17) \quad E_3 = \frac{\Delta_a T x_w'}{r^2 \Delta_{aw} x} - \frac{T_w}{y}, \quad E_4 = \left(\frac{y}{T_w} E_5 - 1 \right) \left(\frac{T \rho_w x_w'}{\rho x} - \frac{T_w}{y} \right)$$

Последнее уравнение (4.16) есть неоднородное уравнение Эйри. Решение этого уравнения, удовлетворяющее граничным условиям (3.17), (3.10), дается выражением ($Gi(z)$, $Ai(z)$ — функции Эйри [15])

$$(4.18) \quad E_5 = \pi T_w \left(\frac{2 \rho_w x_w'}{\varepsilon T_w} \right)^{1/3} \left[Gi(z) + \frac{1}{\sqrt{3}} Ai(z) \right], \quad z = y \left(\frac{2 \rho_w x_w'}{\varepsilon T_w} \right)^{1/3}$$

В связи с вычислением потенциала понадобится функция

$$\theta(z) = \pi \int_0^z \left[Gi(t) + \frac{1}{\sqrt{3}} Ai(t) \right] dt$$

Асимптотику этой функции при больших z найдем, интегрируя асимптотику функций Эйри [15]:

$$(4.19) \quad \theta(z) \sim 1.587 + \frac{1}{3} \ln \frac{1}{2} + \ln z - \frac{2}{3} \frac{1}{z^3} + \dots$$

Постоянная интегрирования представлена здесь первыми двумя слагаемыми. Для ее определения в данной работе функция $\theta(z)$ была найдена численно.

Подставляя (4.18) во второе равенство (4.17) и учитывая асимптотику функций Эйри [15], видим, что решение E_4 равномерно мало по сравнению с E_5 . Подставляя первое равенство (4.17) и (4.18) в первое соотношение (4.16) и интегрируя полученное выражение, после преобразований находим с учетом (4.19) коэффициент φ_2

$$(4.20) \quad \varphi_2 = \int_0^\infty \left(\frac{\Delta_a T x_w'}{r^2 \Delta_{aw} x} - \frac{T}{ry} \right) dy + T_w \left(1.587 + \frac{1}{3} \ln \frac{\rho_w x_w'}{\varepsilon T_w} \right)$$

Отметим, что интегралы в (4.15) и (4.20) не зависят от ε . Поэтому для данного распределения скорости, плотности и температуры газа их достаточно вычислить один раз.

Область применения формул (4.14) ограничена предположением о малости α . Иными словами, эти формулы, применимы при потенциалах поверхности φ_w , достаточно близких к φ_1 : $|\varphi_w - \varphi_1| \ll \varphi_2$. С геометрической точки зрения формулы (4.14) описывают линейную аппроксимацию точных ионной и электронной характеристик в точке $(\varphi_1, 1)$.

Для построения точных ионной и электронной характеристик в широком диапазоне потенциалов обтекаемой поверхности задачу (4.1) — (4.4) необходимо решать численно. Однако общий вид ожидаемых характеристик может быть установлен с помощью относительно простого асимптотического анализа.

При больших положительных или отрицательных потенциалах поверхности поведение характеристик при достаточно малых ε приближенно описывается следующими формулами:

$$\varphi_w \rightarrow \infty, \quad j_i = 0, \quad j_e = 2; \quad \varphi_w \rightarrow -\infty, \quad j_i = 2, \quad j_e = 0$$

В области промежуточных потенциалов соответствующий асимптотический метод в случае покоящегося однородного газа развит в работе [6]. Используя обобщение этого метода на рассматриваемый здесь класс задач, можно показать, что ионная и электронная характеристики в первом приближении нечетны относительно точки $(\varphi_1, 1)$. Иными словами, в первом приближении справедливы тождества

$$(4.21) \quad \begin{aligned} j_i(\varphi_1 - \varphi_w) - 1 &= - [j_i(\varphi_w - \varphi_1) - 1] \\ j_e(\varphi_1 - \varphi_w) - 1 &= - [j_e(\varphi_w - \varphi_1) - 1] \end{aligned}$$

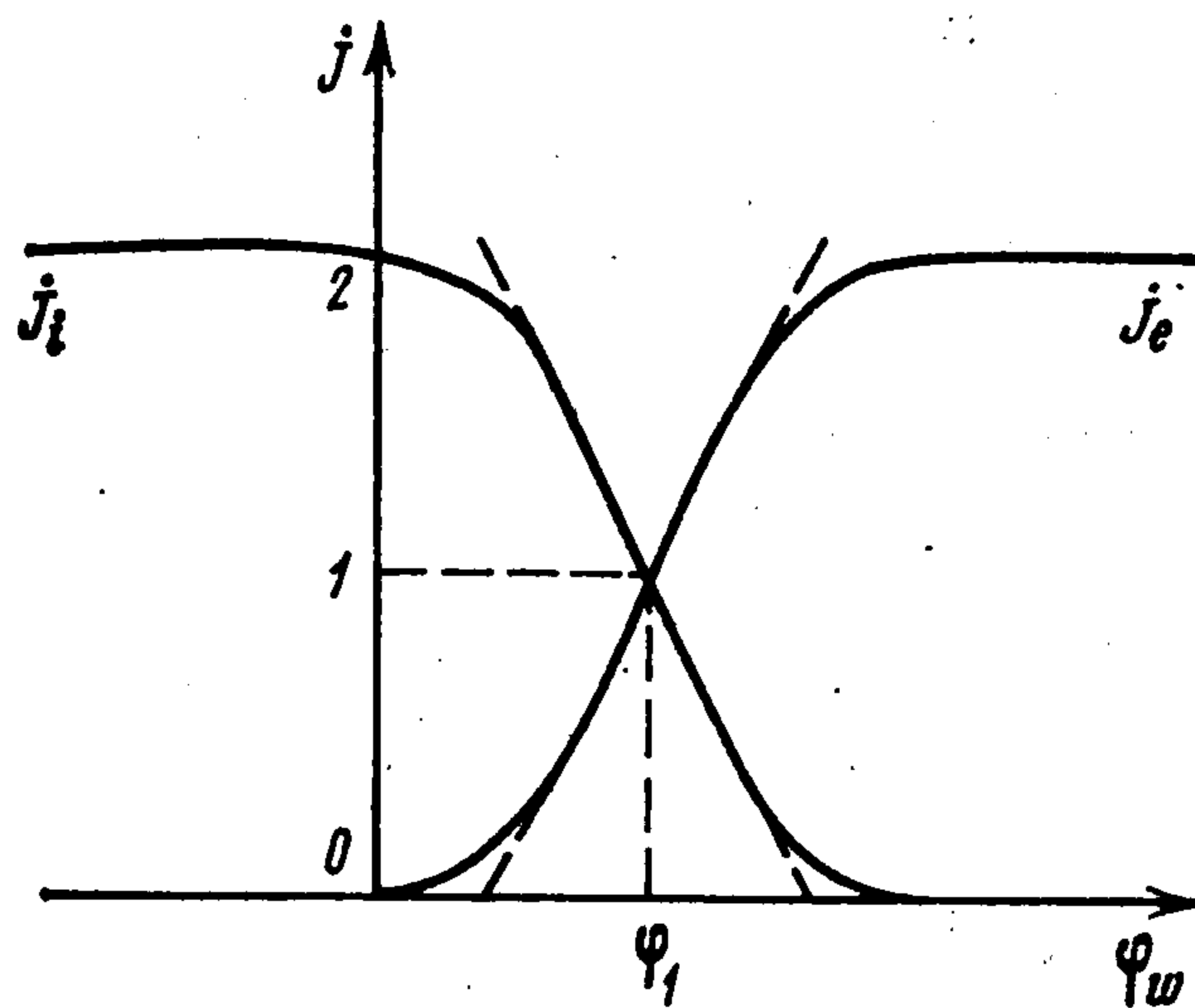
Отсюда, в частности, следует, что в точке $\varphi_w = \varphi_1$ вторые производные функций $j_i(\varphi_w)$, $j_e(\varphi_w)$ равны нулю. Поэтому в окрестности точки $(\varphi_1, 1)$ как ионная, так и электронная характеристики с точностью до членов порядка $\varepsilon^{1/3}$ линейны. Очевидно, эти линейные участки целиком описываются формулами (4.14).

Ожидаемые ионная и электронная характеристики схематически изображены на фигуре. Штриховыми линиями нанесены зависимости, определяемые формулами (4.14).

При известных ионной и электронной характеристиках полную вольтамперную характеристику, т. е. зависимость плотности электрического тока на поверхность зонда от ее потенциала, можно найти по формуле

$$j(\varphi_w) = j_e(\varphi_w) - \frac{\Delta_{enw}}{\Delta_{inw}} j_i(\varphi_w)$$

$$j = J \frac{La_0 \Delta_{enw} c(\infty)}{en_0 \Delta_{aw} x_\infty}$$



Здесь J — размерная плотность электрического тока на поверхность. С учетом соотношений (4.21) можно показать, что вольтамперная характеристика в первом приближении нечетна относительно точки $(\varphi_w = \varphi_1, j = 1 - \Delta_{enw} / \Delta_{inw})$. Иными словами, с точностью до членов порядка $\varepsilon^{1/3}$ имеет место тождество

$$j(\varphi_1 - \varphi_w) - \left(1 - \frac{\Delta_{enw}}{\Delta_{inw}}\right) = - \left[j(\varphi_w - \varphi_1) - \left(1 - \frac{\Delta_{enw}}{\Delta_{inw}}\right) \right]$$

Таким образом, значение параметра α , равное нулю, соответствует центру симметрии вольтамперной характеристики.

При интерпретации зондовых измерений концентрацию заряженных частиц в невозмущенной плазме x_∞ можно определить или по величине ионного тока насыщения, или по величине электронного тока насыщения, или по величине тока, соответствующего центру симметрии вольтамперной характеристики. Потенциал плазмы относительно земли φ_p удобно найти по формуле

$$(4.22) \quad \varphi_p = \varphi_0 - \frac{kT_0}{e} \left(\frac{\Delta_{en} - \Delta_{in}}{\Delta_{en} + \Delta_{in}} \varphi_2 + \varphi_1 \right)$$

Через φ_0 обозначен потенциал относительно земли точки пересечения касательной к вольтамперной характеристике, проведенной через ее центр симметрии, с осью потенциалов. Величины φ_p и φ_0 размерные.

Интересно рассмотреть упрощение формулы (4.22) в практически важном предельном случае больших чисел Рейнольдса набегающего потока ($Re \rightarrow \infty, Re \varepsilon \rightarrow 0$). В этом случае основной вклад в интегралы в выражениях (4.15), (4.20) дает невязкая область. Пренебрегая в этих выражениях членами порядка единицы и членами порядка $\ln(Re^{1/2} \varepsilon^{-1})$ по сравнению с членами, имеющими порядок $Re^{1/2}$, находим для этого случая

$$\varphi_2 = \frac{x_w'}{\Delta_{aw}} \int_0^\infty \frac{T \Delta_a}{r^2} dy, \quad \varphi_1 = \frac{\Delta_{in} - \Delta_{en}}{\Delta_{in} + \Delta_{en}} \varphi_2$$

Теперь формула (4.22) принимает следующий простой вид: $\varphi_p = \varphi_0$. Таким образом, в случае больших чисел Рейнольдса потенциал плазмы равен потенциалу точки пересечения с осью потенциалов касательной к вольтамперной характеристике, проведенной через ее центр симметрии.]

Отметим, что все сказанное выше остается справедливым и при наличии гомогенных химических реакций, за исключением того, что в правой части уравнения диффузии (4.5) в этом случае появляется неоднородный источниковый член и выражение (4.6) для квазинейтральной концентрации заряженных частиц становится неприменимым. Учет термодиффузии и бародиффузии также не представляет принципиальных затруднений.

В работе [13] изложенный метод применялся к задаче об определении электрических эффектов в окрестности проводящей сферы в покоящемся двухтемпературном слабоионизованном газе. Полученные в работе [13] формулы могут быть использованы для определения температуры электронов по измеренной вольтамперной характеристике.

Авторы благодарят Г. А. Любимова и В. В. Толмачева за обсуждение работы и ряд полезных замечаний.

Поступила 24 IV 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Chung P. M., Talbot L., Touryan K. J. Electric probes in stationary and flowing plasmas, pt. 2. Continuum probes. AIAA Journal, 1974, vol. 12, No. 2.
2. Чан П., Тэлбот Л., Турян К. Электрические зонды в неподвижной и движущейся плазме (теория и применение). М., «Мир», 1978.
3. Smy P. R. The use of Langmuir probes in the study of high pressure plasmas. Adv. in Phys., 1976, vol. 25, No. 5.
4. Бенилов М. С. Об итерационном методе решения сингулярно возмущенных краевых задач теории электрического зонда в плотной плазме. В сб.: Аэродинамика гиперзвуковых течений при наличии вдува. Изд-во МГУ, 1978.
5. Колесниченко А. В., Турский Г. А. Соотношения Стефана — Максвелла и поток тепла для неидеальных многокомпонентных сплошных сред. В сб.: Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, 1976, т. 7, № 4.
6. Cohen I. M. Asymptotic theory of spherical electrostatic probes in a slightly ionized, collision-dominated gas. Phys. Fluids, 1963, vol. 6, No. 10.
7. Lam S. H. A general theory for the flow of weakly ionized gases. AIAA Journal, 1964, vol. 2, No. 2.
8. Baum E., Chapkis R. L. Theory of a spherical electrostatic probe in a continuum gas: an exact solution. AIAA Journal, 1970, vol. 8, No. 6.
9. Ястребов А. А. О методе решения краевых задач для зонда Ленгмюра в плотной плазме. Ж. техн. физ., 1972, т. 42, вып. 6.
10. Панкратьева И. Л., Полянский В. А. Анализ задачи об электрическом зонде в плотной плазме с разными температурами компонент. В сб.: Аэродинамика гиперзвуковых течений при наличии вдува. Изд-во МГУ, 1978.
11. Сулов О. Н., Турский Г. А., Щенников В. В. Описание химически равновесных течений многокомпонентных ионизованных смесей в рамках уравнений Навье — Стокса и Прандтля. ПМТФ, 1971, № 1.
12. de Voer P. C. T., Ludford G. S. S. Spherical electric probe in a continuum gas. Plasma Phys., 1975, vol. 17, No. 1.
13. Бенилов М. С., Турский Г. А. Об одном точном решении задачи о проводящей сфере в покоящейся слабоионизованной плазме. Докл. АН СССР, 1978, т. 240, № 6.
14. Chung P. M. Weakly ionized nonequilibrium viscous shock-layer and electrostatic probe characteristics. AIAA Journal, 1965, vol. 3, No. 5.
15. Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables. Washington, GPO, 1964.